目　录

前　言

第一章　总论 ……1

1.1　计算土力学的任务 ……1

1.2　计算土力学的作用 ……3

1.3　Biot动力固结方程 ……4

1.4　基本方程的求解 ……7

1.5　成就与展望……10

第二章　数值方法 ……14

2.1　概述……14

2.2　标准有限元……15

2.3　有限元分析步骤……19

2.4　平面等参元……22

2.5　轴对称等参元……31

2.6　三维等参元……34

2.7　无界元……39

2.8　边界元……42

2.9　有限差分……43

第三章　土的本构模型 ……46

3.1　概述……46

3.2　静力分析模型……48

3.3　动力分析模型……61

第四章　渗流分析 ……69

4.1　概述……69

4.2　渗流模型……69

4.3　有压渗流……70

4.4　自由面渗流……73

4.5　不稳定渗流……75

4.6　非饱和土渗流……77

4.7　地下水渗流……80

第五章　总应力分析 ……82

5.1　概述……82

5.2　非线性分析……82

5.3　填方和挖方……89

5.4　土-结构物相互作用 ……96

5.5　接触面单元……96

第六章　固结分析……100

6.1　概述 ……100

6.2　Biot 固结方程的数值解法 ……102

6.3　单元形态和时段的选择 ……103

6.4　边界条件 ……105

6.5　二维有限元公式 ……107

6.6　砂井地基固结计算 ……111

6.7　流变特性的考虑 ……113

6.8　Terzaghi-Rendulic 准固结理论差分解法 ……115

第七章　动力分析……121

7.1　概述 ……121

7.2　动力方程及其解法 ……121

7.3　动力问题的种类和边界条件 …123

7.4　复反应分析法 ……124

7.5　直接积分法 ……129

7.6　有效应力法 ……134

7.7　弹塑性分析 ……138

7.8　耦合分析 ……140

7.9　源问题的边界元法 ……142

第八章　极限分析……147

8.1　概述 ……147

8.2　基本方程式 ……148

8.3　极限平衡问题及其解法 ……150

8.4　变分原理 ……152

8.5　可静和可动解法 ……157

8.6　地基极限承载力 ……160

8.7　极限土压力 ……165

8.8　土坡极限分析 ……170

第九章　概率数值计算……177

9.1　概述 ……177

9.2 工程系统失效概率计算 ……177
9.3 Monte Carlo 模拟 ……183
9.4 Monte Carlo 模拟与有限差分法的耦合 ……187
9.5 随机有限元方法 ……189
第十章 浅基础……195
10.1 概述……195
10.2 条形基础……195
10.3 片筏基础……197
10.4 不规则片筏基础……205
10.5 箱形基础……210
10.6 结构物-土相互作用 ……216
10.7 相互作用分析实例……219
第十一章 桩基础的计算与分析……223
11.1 概述……223
11.2 竖直荷载下桩基础的受力分析……223
11.3 侧向荷载下桩基础的受力分析……251
11.4 打桩动力分析——波动方程法……258
第十二章 地下工程与深开挖……268
12.1 概述……268
12.2 地下铁道……268
12.3 地下连续墙……276
12.4 深开挖……281
第十三章 土坝……289
13.1 概述……289
13.2 混凝土面板坝……292
13.3 混凝土防渗墙坝……294
13.4 土质心墙坝……298
13.5 均质坝和水坠坝……304
13.6 尾矿坝和灰坝……306
13.7 围堰……308
第十四章 挡土墙……313
14.1 概述……313
14.2 刚性挡土墙……314
14.3 柔性挡土墙……319
14.4 加筋挡土墙……324
14.5 装配式锚定挡土墙……326
14.6 抗滑桩和桩的抗滑作用……330
第十五章 土工问题的反分析……336
15.1 概述……336
15.2 逆分析法……336
15.3 直接分析法……339
15.4 概率统计法……343
15.5 工程实例分析……344

第一章 总 论

计算土力学是用数值方法分析岩土工程中的形变、应力、强度和稳定性的科学，它是六十年代随着电子计算技术而发展起来的。无论把土作为地基、作为一种建筑材料(如具有粘土防渗心墙的堆石坝，铁路公路和机场跑道的路基)还是作为结构物的环境（如地下车库和地下铁道)，都会产生因建筑的荷载和土中渗流所产生的形变、应力和稳定性问题。计算土力学的任务在于通过计算分析来认识建筑工程、水利工程、交通运输、能源建设和城市建设中与土有关的问题，提出合理而经济的解决方案。

土体是天然地质历史的产物。在饱和状态下由土骨架和孔隙水组成，在非饱和状态下，还有孔隙气。不同矿物成份和不同骨架结构组成的土体以及它和不同孔隙水成份之间的相互作用，使不同地区的土体具有千差万异的物理、力学性质。此外，由于天然土体的不均匀性，强度、变形和渗透性质的各向异性，以及土体应力-应变关系的非线性，使土的性质与钢材、混凝土等建筑材料相比变得更加复杂。

在古典土力学中，将土的性质、加荷条件和边界条件理想化，从而获得一些重要的解答。由 Coulomb 建立并由 Mohr 发展了的关于无粘性土和粘性土的 Mohr-Coulomb 强度理论为土压力理论、地基承载力和土坡稳定分析奠定了基础。Boussinesq 和 Cerruttì 分别提出了均匀的、各向同性的半无限弹性体表面在竖直力或水平力作用下的位移和应力分布理论。D'Arcy 和 Dupuit 通过室内试验建立了有孔介质中水的渗流理论。Terzaghi 建立了饱和土体中的有效应力原理，并据以提出了饱和土的一维固结理论。СоколовскиЙ 发表了"散粒体静力学"，从而把极限分析引进土力学。Biot 建立了土骨架压缩和渗流的耦合理论，把土力学推向更高的发展阶段。

经过二百多年的继承和发展而建立起来的古典土力学至今仍具有很重要的理论和实际意义。

早期的土力学虽已建立了象 Biot 理论那样的严密理论，但由于缺乏计算手段而无法应用。随着六十年代计算技术和有限元理论的发展，才使得 Biot 理论应用于解决复杂的土力学问题。

1.1 计算土力学的任务

随着工程建设规模和复杂程度的与日俱增，岩土工程面临的荷载历史、土体性质和边界条件也愈加复杂，仅仅依靠古典土力学理论已不足以解决今后将遇到的问题。

在城市中由于兴建高层建筑，从而要求合理且经济地进行箱形基础、片筏基础设计以及房屋-土体系或房屋-桩-土体系的相互作用分析。此外，由于涉及基础深开挖和地下空间利用而产生的地面变形，必须分析其对已有建筑物和地下管线的影响程度。根据土体的本构关系、施工方法、掘进速率和隧道的相对埋深可以预估地面变形的数量级和影响范围的大小，以便选择适宜的掘进方法和速率，减小或消除上述危害。

随着荷载等级的增高以及交通工具运行速率的加大，对铁路公路和机场跑道下面路基质量的要求也相应提高。铁路上部结构和公路机场路面的耐久性有赖于坚实的路基。运用计算土力学可以分析天然的或人工加固路基的稳定性，并在模拟施工过程及加载历史的情况下来预估路基的不均匀变形及其与时间的关系。

土中某点的应力达到土体的屈服强度，该点就进入极限状态。然而土中只有个别点进入极限状态，只会使土体形变速率有所增大，还不致引起整个土工结构物的失事。假使沿土体中某个面上的所有点，其应力同时或先后进入极限状态，于是就形成连续的滑裂面。土体的一部分相对于另一部分运动的现象称之为稳定性的丧失。当建筑物位于边坡地区或承受很大的水平荷载时，地基的一部分常常连同上部结构产生倾斜或倾覆，从而导致整体稳定性的丧失(整体失稳)。在海相粘土上修筑路堤或在山区软粘土上进行建筑，路堤的一部分会带着软土一道产生滑动(深层失稳)。一些工作多年的工程师甚至也会忘记进行整体稳定或深层稳定分析的必要性。在我国海洋工程和山区建设中已经有这样的工程失事。水库前面的土坝因丧失稳定性而损毁常常导致巨大的生命财产损失。

有孔介质中的渗流理论是土力学的重要组成部分。它一方面研究地下水在土工结构物或地基中的运动规律，另一方面则分析产生这些运动的条件以及渗流对土体强度、变形或稳定性的影响。地下水渗流还在水工结构物底面产生扬压力，同时对挡土结构物的土压力分布产生影响。例如当地下水从挡土墙背面向外渗流时，主动土压力增大而被动土压力减小。

近代修建的高土石坝往往用粗粒料堆筑坝壳，以维持坝体稳定，同时用粘土或混凝土修筑防渗心墙。不同性质的材料组合在一起，就可能引起应力重分布，局部产生塑性区或张拉裂缝。类似的问题也可能出现在路堤填方中。运用计算土力学中的数值方法，可以预估在不同施工阶段坝体张拉区或地基中塑性区开展的纵深程度和演变规律，从而为改进设计或采取预防性措施提供依据。

我国是一个多地震的国家，在有记录的灾害性地震中已经蒙受了巨大的生命财产损失。重要的水利工程、桥梁工程、建筑工程和核反应堆等结构物应当用有代表性的强震记录作地震反应分析，以检验是否具有足够的抗震安全度。其它一些土工结构物或地基在爆炸荷载或机械振动激发下也需要作动力分析。

工业的发展带来日益严重的环境污染。除了地面水污染和空气污染以外，污染源流入地下，随着地下水的运动使污染物产生的扩散和弥散，于是地基土也受到严重污染。它改变了土的物理力学性质，也改变了奠基于其上的建筑物的工作状态。运用计算土力学中的渗流分析和弥散分析就可以定量地估计地基土中有害物质波及的范围以及土体性质受影响的程度，以便采取相应的对策。

解决上述问题需要有正确的理论、计算方法和反映实际情况的计算参数。它们共同的要求是应当满足土体，有时还加上建筑物的平衡条件，场变量(有时还有它的导数)的连续性条件和课题的全部边界条件，更重要的，还应当具有反映土体应力-应变关系的本构定律。

近年来，国内外的一些学者综合室内试验和理论分析的成果，提出了各种反映土体应力-应变非线性关系的本构定律，它标志着人们通过多次工程实践对土体本质的认识已逐步深化。诚然，影响土体本构定律的因素很多，很难建立一种能反映所有因素，并可以用数学关系表达的本构关系，于是只能把握其中的主要因素。此外，随着研究的不断深入，本构定律

的表达形式也日趋复杂。本书旨在由博返约，使其形式得以简化。对本构定律中的参数则尽可能通过三轴压力仪或平面应变仪这些常规仪器精确地测定，以便使这些本构定律在工程设计中推广使用。

计算方法和土的本构关系选定以后，如何确定土的计算参数就成为重要的问题。除了用室内土工试验求得所需的参数以外，还可以对原型建筑物及其地基的长期观测资料进行反分析，从而求得这些参数或它们之间的相关关系，供类似条件下土工分析之用。

由于土体或地基的不均性，所测得的参数往往具有离散性，因此有必要把统计方法和概率论引入土力学。对一些地区土性质参数的统计分析表明，力学参数的变异程度较之物理参数为甚。例如，在土坡稳定分析中把土的强度指标作为非确定性的随机变量，而将土的容重作为确定性的变量来分析安全系数的可靠性指标，并据以估计土坡的失效概率。

运用概率论方法还可以估计计算参数的可能变化给形变和应力分析带来的变化幅度。

1.2 计算土力学的作用

近代电子计算机和数值方法的发展，对土体本构关系认识的不断深入，使得解决复杂的土质条件、加荷历史和边界条件下的岩土工程问题成为可能；计算土力学就是总结二十多年来这一领域中的研究成果而建立起来的一门新的土力学分支学科。

运用计算土力学的原理和方法可以分析土体的应力和变形分布，并模拟逐步加载或逐步卸载的施工程序。在计算中可以引入复杂的边界条件而毋需简化。可以用线性的或非线性的本构关系来考虑土骨架压缩与孔隙水压力变化之间的耦合作用。

能够在施工以前预估土体和结构物的形变、应力和稳定性的变化过程和发展趋势，以便分析在施工阶段和长期使用阶段可能出现的变化，并采取适宜的对策。

有可能模拟不同的加荷速率和施工程序对土坝路堤或软土地基中塑性区开展的范围和深度、应力集中的部位、应力迁移的方向、张拉区的分布和沉降中心的位置，必要时可以修改原先的设计。

可以分析不同的加荷历史、不同的应力路径对于非线性应力-应变关系、强度增长和形变发展的影响。例如码头、筒仓的活载在总荷载中占很大比例，开挖深基坑以后又砌筑基础。因此，地基经受着反复的加载-卸载-再加载。这种过程可以在计算土力学中得到解决，因而获得比古典土力学和经验规则更加可靠的结论。

对非均质土体在复杂加荷条件下，应力、形变和孔隙水压力随时间的发展过程也可以定量地描述。

从计算土力学的观点看来，各种岩土工程问题可以归纳成下列三类：

平衡问题	特征值问题	瞬态问题
土体形变应力分析	土坝振动的固有频率和振型分析	饱和土或非饱和土的渗流固结
基础梁、板分析	结构物-土体系的固有频率和振型分析	结构物-土相互作用的时效
桩和桩群	近岸和离岸工程在风浪激发下的动力响应	应力波在土中的传播
填方和深开挖		有孔介质中的非稳定渗流
土坡稳定		土体中的温度场
稳定渗流		污染源的扩散与弥散
结构物-土相互作用		
地下空间的形变应力		

1.3 Biot 动力固结方程

除极限平衡问题情况特殊，将在第八章讨论外，上述土力学问题大多数可归结为Biot动力固结方程的求解。因此把这一方程称为计算土力学的基本方程。下面针对饱和土和接近饱和土，或孔隙气压力可以忽略的非饱和土来建立该方程及其简化形式。

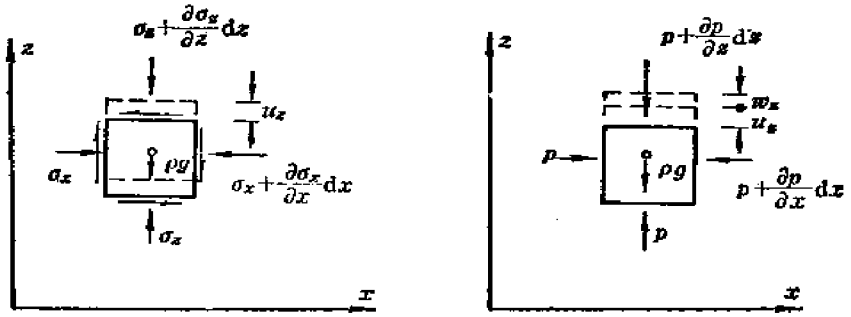


图 1.1 土体平衡(a)；流体平衡(b)

设 u_x、u_y 及 u_z 为微分体积土骨架的位移分量，而 w_x、w_y 及 w_z 为土中液相相对于土骨架的位移分量(在图 1.1 中只示出 x 和 z 方向的分量)。

土体平衡方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}-\rho \ddot{u}_x-\rho_f \ddot{w}_x=0\\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}-\rho \ddot{u}_y-\rho_f \ddot{w}_y=0\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}-\rho \ddot{u}_z-\rho_f \ddot{w}_z-\rho g=0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

有效应力原理：

$$\sigma_x=\sigma'_x+p,\ \sigma_y=\sigma'_y+p,\ \sigma_z=\sigma'_z+p \tag{1.2}$$

土体应力-应变关系：

$$\{\sigma'\}=f(\{\varepsilon\}) \tag{1.3}$$

或

$$\{\sigma'\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}) \tag{1.3a}$$

式中 $\{\varepsilon_0\}$ 为考虑非线性时土体中的初应变。

变形几何关系：

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x=-\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=-\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\
&\varepsilon_y=-\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \gamma_{yz}=-\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\\
&\varepsilon_z=-\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=-\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

或记作

$$\{\varepsilon\}=-[B]\{u\} \tag{1.4a}$$

土孔隙中流体的平衡方程：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{k_x}\dot{w}_x+\rho_f\ddot{u}_x+\rho_f\ddot{w}_x/n$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{k_y}\dot{w}_y+\rho_f\ddot{u}_y+\rho_f\ddot{w}_y/n \tag{1.5}$$
$$-\rho_f g-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{k_z}\dot{w}_z+\rho_f\ddot{u}_z+\rho_f\ddot{w}_z/n$$

渗流连续性方程

$$-\frac{d\dot{w}_x}{dx}-\frac{d\dot{w}_y}{dy}-\frac{d\dot{w}_z}{dz}=\frac{d\dot{u}_x}{dx}+\frac{d\dot{u}_y}{dy}+\frac{d\dot{u}_z}{dz}+\frac{n}{K_f}\dot{p} \tag{1.6}$$

式中 K_f 为流体的压缩模量，其它符号见《土力学与基础工程名词》。

假使略去式(1.5)右端的后两项，留下的便是土力学中有名的 D'Arcy 定律。

根据 Zienkiewicz 的分析，除土体中高频振动的情况外，可以将流体相对于土骨架运动的惯性力 $\rho_f\ddot{w}$ 略而不计[5]。在此情况下，把式(1.5)代入式(1.6)，并以水头 $h=z+p/(\rho_f g)$ 作为场变量，于是有渗流连续性方程的另一种表达式：

$$\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{n}{K_f}\dot{h}$$
$$-\left(\frac{\partial\dot{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial\dot{u}_z}{\partial z}\right)+\rho_f(\ddot{u}_x+\ddot{u}_y+\ddot{u}_z)=0 \tag{1.7a}$$

记 $\beta=n/K_f$ 为单位土体内流体的压缩系数。

现在转而讨论平衡方程的另一种表达形式。

对于式(1.3a)中表示应力-应变关系的 $[D]$ 矩阵有各种具体的形式。在岩土工程中具有重要意义的横向各向同性土体，$[D]$的形式如下：

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & & & \\ d_{12} & d_{11} & d_{13} & & 0 & \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & & & \\ & & & d_{44} & & \\ & 0 & & & d_{44} & \\ & & & & & d_{66} \end{bmatrix}$$

式中 $d_{66}=d_{11}-d_{12}$。可以看出，在$[D]$中只有五个独立常数。

把式(1.2)、(1.3)及(1.4)代入式(1.1)，就得到以位移分量表示的平衡方程：

$$d_{11}\frac{\partial^2u_x}{\partial x^2}+d_{44}\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}+d_{66}\frac{\partial^2u_x}{\partial z^2}+(d_{12}+d_{44})\frac{\partial^2u_y}{\partial x\partial y}$$
$$+(d_{13}+d_{66})\frac{\partial^2u_z}{\partial z\partial x}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial x}+X^0=\rho\ddot{u}_x \tag{1.7b}$$
$$d_{44}\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+d_{11}\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}+d_{44}\frac{\partial^2u_y}{\partial z^2}+(d_{12}+d_{44})\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial y}$$
$$+(d_{13}+d_{44})\frac{\partial^2u_z}{\partial y\partial z}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial y}+Y^0=\rho\ddot{u}_y \tag{1.7c}$$
$$d_{66}\frac{\partial^2u_z}{\partial x^2}+d_{44}\frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}+d_{11}\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}+(d_{13}+d_{66})\frac{\partial^2u_x}{\partial x\partial z}$$
$$+(d_{13}+d_{44})\frac{\partial^2u_y}{\partial z\partial x}+(\rho-\rho_f)g-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial z}+Z^0=\rho\ddot{u}_z \tag{1.7d}$$

式中 X^0、Y^0 及 Z^0 为由初应变$\{\varepsilon_0\}$引起的等价体积力；$(\rho-\rho_f)g$ 就是浮容重。

式(1.7a)、(1.7b)、(1.7c)和(1.7d)构成三维条件下土力学的基本方程，即 Biot 动力固结方程。

边界条件：

位移边界条件

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \tag{1.8a}$$

应力边界条件

$$\{\sigma\}\{n\} = \{\bar{t}\} \tag{1.8b}$$

流势边界条件

$$h = \bar{h} \tag{1.8c}$$

流量边界条件

$$-k_n\frac{\partial h}{\partial n} = \bar{q} \tag{1.8d}$$

现在考虑土力学中的各种具体课题。

为了节省篇幅，下面只讨论平面应变和广义虎克定律适用的情况，即在应力-应变矩阵 $[D]$ 中，$d_{11}=d_{22}=d_{33}=d_1$，$d_{12}=d_{21}=d_{23}=d_{32}=d_{13}=d_{31}=d_2$，$d_{44}=d_{55}=d_{66}=d_3$，且有 $d_3=(d_1-d_2)/2$。此时式(1.7)简化为

$$d_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial x}+X^0=\rho\ddot{u}_x \tag{1.9a}$$

$$d_3\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial x}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial z}+Z^0=\rho\ddot{u}_z+(\rho-\rho_f)g \tag{1.9b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial h}{\partial z}-\beta\dot{h}-\left(\frac{\partial\dot{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot{u}_z}{\partial z}\right)+\rho_f\left(\frac{\partial}{\partial x}k_x\ddot{u}_x+\frac{\partial}{\partial z}k_z\ddot{u}_z\right)=0 \tag{1.9c}$$

动力平衡方程　当土体中不存在孔隙压力时，$h=Z$。式(1.9a、b)简化为

$$\begin{aligned} d_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+X^0&=\rho\ddot{u}_x\\ d_3\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial x}+Z^0-\rho g&=\rho\ddot{u}_z \end{aligned} \tag{1.10}$$

这就是土体的动力平衡方程。

静力平衡方程　当土体中不存在惯性力时，$\ddot{u}_x=\ddot{u}_z=0$。

$$\begin{aligned} d_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+X^0&=0\\ d_3\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial x}+Z^0&=\rho g \end{aligned} \tag{1.11}$$

渗流方程　假设土骨架为刚性，即孔隙水渗流并不引起土骨架压缩时，$u_x=u_z=0$，此时式(1.9a)和(1.9b)恒能满足。式(1.9c)简化为下述土体渗流方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial h}{\partial z}=\beta\dot{h} \tag{1.12}$$

固结方程　现在转而讨论土体固结问题。

土骨架的体应变变化率 $\dot{\varepsilon}_v$ 用平均有效应力的变化率 $\dot{\sigma}'_m=(\dot{\sigma}'_x+\dot{\sigma}'_y+\dot{\sigma}'_z)/3$ 表示时，有

$$\dot{\sigma}'_m=\dot{\varepsilon}_v/m_v$$

m_v 为土的体积压缩系数。考虑到 $\varepsilon_v=\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$，并设渗透系数为常量，于是有

$k_x=k_y=k_z=k$，同时不考虑惯性力 $\rho\ddot{u}_x$，$\rho\ddot{u}_y$ 及 $\rho\ddot{u}_z$，于是式(1.7a)可简化为

$$k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)=\frac{n}{K_f}\dot{h}-m_v\dot{\sigma}'_m \tag{1.13}$$

对于饱和土，由于 $K_f=\infty$，于是有 $\beta=n/K_f=0$。上式简化成

$$\nabla^2 h=\frac{m_v}{k}(\dot{\sigma}_m-\dot{p}) \tag{1.13a}$$

考虑到

$$h=z+p/\rho_f g \quad 以及 \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\rho_f g z=0$$

于是有

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=-c_v(\dot{\sigma}_m-\dot{p}) \tag{1.13b}$$

式中 $c_v=k/\rho_f g m_v$ 称为土的固结系数。

特别是当土体中平均应力的变化率 $\dot{\sigma}_m=0$ 时，上式成为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=c_v\dot{p} \tag{1.14}$$

这就是土力学中的 Terzaghi-Rendulic 固结方程。

相应的边界条件(1.8d)现在成为

$$\frac{-k_n}{\rho_f g}\frac{\partial p}{\partial n}-k_n\frac{\partial z}{\partial n}=\tilde{q} \tag{1.15}$$

应当注意，切不可把式(1.15)左端第二项忘记掉。

1.4 基本方程的求解

Biot 动力固结方程是土力学的基本方程，它的求解可分两步进行，首先在空间上把计算域离散，然后在时间上离散。

设场变量 u_x、u_y、u_z 及 h 用下式近似：

$$\begin{aligned}\{u\}&=[N_u]^T\{\bar{u}\}\\ h&=[N_h]^T\{\bar{h}\}\end{aligned} \tag{1.16}$$

式中$[N_u]$及$[N_h]$分别为场变量$\{u\}$及$\{h\}$的形函数。它们可以取得一样，也可以取得不同；$\{\bar{u}\}=\{u_x\ u_y\ u_z\}^T$ 及 $\{\bar{h}\}$ 为结点的待定场变量。将式(1.16)代入式(1.7)，并用加权残数法，得

$$\begin{aligned}[M]\{\ddot{\bar{u}}\}+[K]\{\bar{u}\}-[C]\{\bar{h}\}&=\{F_1\}\\ [C]\{\dot{\bar{u}}\}+[S]\{\dot{\bar{h}}\}+[H]\{\bar{h}\}&=\{F_2\}\end{aligned} \tag{1.17}$$

式中

$$[M]=\int_\Omega[N_u]^T\rho[N_u]\mathrm{d}\Omega\text{——质量矩阵} \tag{1.17a}$$

$$[K]=\int_\Omega[B_u]^T[D(\{\varepsilon\})][B_u]\mathrm{d}\Omega\text{——劲度矩阵} \tag{1.17b}$$

$$[C]=\int_\Omega[B_u]^T[N_h]\mathrm{d}\Omega\text{——耦合矩阵} \tag{1.17c}$$

$$[S]=\int_\Omega[N_h]^T\beta[N_h]\mathrm{d}\Omega\text{——流体压缩矩阵} \tag{1.17d}$$

$$[H]=\int_\Omega[B_h]^T k[B_h]\mathrm{d}\Omega\text{——渗透矩阵} \tag{1.17e}$$

$$\{F_1\}=\int_\Omega[N_u]\begin{Bmatrix}X^0\\Y^0\\Z^0-(\rho-\rho_f)g\end{Bmatrix}\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma[N_u]\{\bar{t}\}\mathrm{d}\Gamma\text{——结点力}\tag{1.18}$$

$$\{F_2\}=\int_\Gamma N_h\bar{q}\mathrm{d}\Gamma\text{——结点流量}\tag{1.19}$$

下面针对平面问题说明式(1.17)的推导过程。先将式(1.16)改写为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x&=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,z)u_{xi}(t)\\\tilde{u}_z&=\sum_{i=1}^{n}N_i(x,z)u_{zi}(t)\\\tilde{h}&=\sum_{i=1}^{\bar{n}}\bar{N}_i(x,z)h_i(t)\end{aligned}\tag{1.16a}$$

(~在此表示近似)

式中 N_i, $\bar{N}_i$ 相当于$[N_u]$和$\{N_h\}$, u_{xi}、u_{zi}及h_i为结点 i 的待定变量,n及$\bar{n}$分别为出现$\{u\}$及h的结点数,由于上式是近似的,代入式(1.9)后将出现残数。按 Galerkin 法,使残数的加权积分为零,可得下述$(2n+\bar{n})$个对时间的常微分方程。

$$\begin{aligned}&\int_\Omega N_i\Big\{\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(d_1\frac{\partial^2N_j}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2N_j}{\partial z^2}\Big)u_{xj}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2N_j}{\partial x\partial z}u_{zj}-\rho N_j\ddot{u}_{xj}\Big]\\&\qquad-\rho_f g\sum_{j=1}^{\bar{n}}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}h_j+X_i^0\Big\}\mathrm{d}\Omega=0\\&\int_\Omega N_i\Big\{\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(d_3\frac{\partial^2N_j}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial^2N_j}{\partial z^2}\Big)u_{zj}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2N_j}{\partial x\partial z}u_{xj}-\rho N_j\ddot{u}_{zj}\Big]\\&\qquad-\rho_f g\sum_{j=1}^{\bar{n}}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial z}h_j+Z_i^0-(\rho-\rho_f)g\Big\}\mathrm{d}\Omega=0\\&\int_\Omega\bar{N}_i\Big\{\sum_{j=1}^{\bar{n}}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial z}\Big)h_j-\beta\bar{N}_j\dot{h}_j\Big]\\&\quad-\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial N_j}{\partial x}\dot{u}_{xj}+\frac{\partial N_j}{\partial z}\dot{u}_{zj}+\rho_f\Big(k_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\ddot{u}_{xj}+k_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\ddot{u}_{zj}\Big)\Big]\Big\}\mathrm{d}\Omega=0\end{aligned}\tag{1.20}$$

由于

$$N_i\frac{\partial^2N_j}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(N_i\frac{\partial N_j}{\partial x}\Big)-\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}$$

且考虑边界条件

$$\begin{aligned}\Big(d_1\frac{\partial u_x}{\partial x}+d_2\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x}\Big)n_x+d_3\Big(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\Big)n_z&=t_x\\d_3\Big(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\Big)n_x+\Big(d_2\frac{\partial u_x}{\partial x}+d_1\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z}\Big)n_z&=t_z\end{aligned}$$

对式(1.20)作分部积分,可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big\{\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(d_1\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\Big)u_{xj}+\Big(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\Big)u_{zj}\\&\qquad+\rho N_iN_j\ddot{u}_{xj}\Big]-\rho_f g\sum_{j=1}^{\bar{n}}\bar{N}_j\frac{\partial N_i}{\partial x}h_j\Big\}\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega N_iX_i^0\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma N_it_x\mathrm{d}\Gamma\\&\int_\Omega\Big\{\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(d_3\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_1\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\Big)u_{zj}+\Big(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\Big)u_{xj}\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\rho N_i N_j \ddot{u}_{zj}]-\rho_f g\sum_{j=1}^{\bar{n}}\bar{N}_j\frac{\partial N_i}{\partial z}h_i\Big\}\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega N_i Z_i^0\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma N_i t_z\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega N i\rho g\mathrm{d}\Omega\\
&\int_\Omega\Big\{\sum_{j=1}^{\bar{n}}\Big[\Big(-k_x\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial x}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}-k_z\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial z}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial z}\Big)h_j-\beta\bar{N}_i\bar{N}_j\dot{h}_j\Big]\\
&\qquad-\sum_{j=1}^{\bar{n}}\Big(\bar{N}_i\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}\dot{u}_{xj}+\bar{N}_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\dot{u}_{zj}\Big)+\rho_f\Big(k_x\bar{N}_i\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}\ddot{u}_{xj}\\
&\qquad+k_z\bar{N}_i\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial z}\ddot{u}_{zj}\Big)\Big\}\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\bar{N}_i q_n\mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}\right\}\quad(1.21)
$$

式(1.21)可简写成

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\Big[m_{ij}\ddot{u}_{xj}(t)+k_{ij}^{11}u_{xj}(t)+k_{ij}^{12}u_{zj}(t)+\sum_{j=1}^{\bar{n}}k_{ij}^{13}h_j(t)\Big]=F_i^1(t)\\
&\sum_{j=1}^{n}\Big[m_{ij}\ddot{u}_{zj}(t)+k_{ij}^{21}u_{xj}(t)+k_{ij}^{22}u_{zj}(t)+\sum_{j=1}^{\bar{n}}k_{ij}^{23}h_j(t)\Big]=F_i^2(t)\\
&\sum_{j=1}^{n}\Big[c_{ij}^1\ddot{u}_{xj}+c_{ij}^2\ddot{u}_{zj}+k_{ij}^{31}\dot{u}_{xj}(t)+k_{ij}^{32}\dot{u}_{zj}(t)\Big]+\sum_{j=1}^{\bar{n}}s_{ij}\dot{h}_j(t)+k_{ij}^{33}h_j(t)=F_i^3(t)
\end{aligned}\right\}\quad(1.22)
$$

式中

$$
m_{ij}=\int_\Omega\rho N_i N_j\mathrm{d}\Omega,\qquad s_{ij}=\int_\Omega\beta\bar{N}_i\bar{N}_j\mathrm{d}\Omega,
$$

$$
c_{ij}^1=\rho_f k_x\int_\Omega\bar{N}_i\frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}\Omega,\qquad c_{ij}^2=\rho_f k_z\int_\Omega\bar{N}_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\mathrm{d}\Omega,
$$

$$
k_{ij}^{11}=\int_\Omega\Big(d_1\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\Big)\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{12}=\int_\Omega\Big(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\Big)\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{21}=\int_\Omega\Big(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_1\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\Big)\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{22}=\int_\Omega\Big(d_3\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_1\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\Big)\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{33}=-\int_\Omega\Big(k_x\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial x}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial x}+k_z\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial z}\frac{\partial\bar{N}_j}{\partial z}\Big)\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{13}=-\rho_f g\int_\Omega N_j\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial x}\mathrm{d}\Omega,\qquad k_{ij}^{31}=-\int_\Omega\bar{N}_i\frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}\Omega
$$

$$
k_{ij}^{23}=-\rho_f g\int_\Omega N_j\frac{\partial\bar{N}_i}{\partial z}\mathrm{d}\Omega,\qquad k_{ij}^{32}=-\int_\Omega\bar{N}_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\mathrm{d}\Omega
$$

$$
F_i^1(t)=\int_\Omega N_i X_i^0\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma N_i t_x\mathrm{d}\Gamma
$$

$$
F_i^2(t)=\int_\Omega N_i Z_i^0(t)\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma N_i t_z\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega N_i\rho g\mathrm{d}\Omega
$$

$$
F_i^3(t)=\int_\Gamma\bar{N}_i q_n\mathrm{d}\Gamma
$$

方程组(1.17)是一组对于时间的常微分方程，在时域上离散化。设 t_1、t_2、…、t_n、t_{n+1} 时刻的结点变量为 $\{\bar{u}\}_1$、$\{\bar{u}\}_2$、…、$\{\bar{u}\}_n$、$\{\bar{u}\}_{n+1}$ 以及 $\{\bar{h}\}_1$、$\{\bar{h}\}_2$、…、$\{\bar{h}\}_n$、$\{\bar{h}\}_{n+1}$，则在时段 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 内，可以用下列线性插值公式：

$$
\dot{\bar{u}}=\dot{\bar{u}}_n+(\dot{\bar{u}}_{n+1}-\dot{\bar{u}}_n)\tau/\Delta t
$$

$$\bar{h}=\bar{h}_n+(\bar{h}_{n+1}-\bar{h}_n)\tau/\Delta t \qquad \tau:0\to\Delta t \tag{1.23}$$

由此得

$$\begin{aligned}\bar{u}&=\bar{u}_n+\dot{\bar{u}}_n\tau+(\dot{\bar{u}}_{n+1}-\dot{\bar{u}}_n)/\Delta t-\tau^2/2\\ \ddot{\bar{u}}&=(\dot{\bar{u}}_{n+1}-\dot{\bar{u}}_n)/\Delta t\\ \dot{\bar{h}}&=(\bar{h}_{n+1}-\bar{h}_n)/\Delta t\end{aligned} \tag{1.24}$$

将上述表达式代入式(1.17)，并在时域上用加权残数法：

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta t}W\left([M]\{\ddot{\bar{u}}\}+[K]\{\bar{u}\}-[C]\{\bar{h}\}\right)\mathrm{d}\tau&=\int_0^{\Delta t}W\{F_1\}\mathrm{d}\tau\\ \int_0^{\Delta t}\overline{W}\left([C]^T\{\dot{\bar{u}}\}+[S]\{\dot{\bar{h}}\}+[H]\{\bar{h}\}\right)\mathrm{d}\tau&=\int_0^{\Delta t}\overline{W}\{F_2\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.25}$$

把以上两式的右端项仍记为$\{F_1\}$和$\{F_2\}$，于是有

$$\begin{aligned}[M]\{\ddot{\bar{u}}\}+[K]\left\{\theta_2\ddot{\bar{u}}_n\frac{\Delta t^2}{2}+\theta_1\dot{\bar{u}}_n\Delta t+\bar{u}_n\right\}-[C]\{\theta_1\dot{\bar{h}}\Delta t+\dot{\bar{h}}_n\}&=\{\bar{F}_1\}\\ [C]^T\{\theta_1\ddot{\bar{u}}\Delta t+\dot{\bar{u}}_n\}+[S]\{\dot{\bar{h}}\}+[H]\{\bar{\theta}_1\dot{\bar{h}}\Delta t+h_n\}&=\{\bar{F}_2\}\end{aligned} \tag{1.26}$$

式中

$$\theta_1=\frac{\int_0^{\Delta t}\bar{W}\tau\mathrm{d}\tau}{\Delta t\int_0^{\Delta t}W\mathrm{d}\tau},\quad \theta_2=\frac{\int_0^{\Delta t}W\tau^2\mathrm{d}\tau}{\Delta t\int_0^{\Delta t}W\mathrm{d}\tau},\quad \bar{\theta}_1=\frac{\int_0^{\Delta t}\overline{W}\tau\mathrm{d}\tau}{\Delta t\int_0^{\Delta t}\overline{W}\mathrm{d}\tau} \tag{1.27}$$

而W和$\overline{W}$为相应的权函数。

把式(1.26)中的两个方程式合并成

$$\begin{bmatrix}[M]+[K]\theta_2\dfrac{\Delta t^2}{2} & -[C]\theta_1\Delta t\\ -[C]^T\bar{\theta}_1\Delta t & -[H]\theta_1\Delta t-[S]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{\bar{u}}\}\\ \{\dot{\bar{h}}\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{\bar{F}_1\}\\ \{\bar{F}_2\}\end{Bmatrix} \tag{1.28}$$

式中

$$\{\bar{F}_1\}=\{F_1\}-[K]\theta_1\{\dot{\bar{u}}_n\}\Delta t-[K]\{\bar{u}_n\}+[C]\{\bar{h}_n\} \tag{1.28a}$$

$$\{\bar{F}_2\}=-\{F_2\}+[H]\{\bar{h}_n\}+[C]^T\{\bar{u}_n\} \tag{1.28b}$$

视权函数$\bar{W}$和$\overline{W}$的具体形式，θ_1、θ_2和$\bar{\theta}_1$可能在0～1之间变化。但只有在满足下列条件

$$\theta_2\geqslant\theta_1\geqslant 1/2,\ \bar{\theta}_1\geqslant 1/2 \tag{1.29}$$

时，上述时间差分方程才是无条件稳定的。

解出$\{\ddot{\bar{u}}\}$及$\{\dot{\bar{h}}\}$以后，回代到式(1.23)和(1.24)，以便求解下一时刻的位移$\{u\}_{n+1}$和流势$\{h\}_{n+1}$。

1.5 成就与展望

多年来，工程师根据土力学理论、对工程项目的现场观测以及积累的经验教训解决了许多岩土工程问题。我国已经并正在对大坝、水工结构、房屋建筑、电站和桥梁进行系统的观测。许多工程项目将计算分析、中间试验、施工、现场监测、反分析和修改设计等不同阶段有机结合，使计算土力学获得进一步发展。

先后在南宁、西安、成都和珠海召开了岩土工程数值分析学术讨论会，并在上海举行了两次国际海洋岩土工程及近岸离岸结构讨论会。提出了有关土的本构关系、土工结构物和

藏 615052 书

地基的应力和变形、土体动力响应分析、挡土结构物、渗流固结、结构物-土相互作用和概率分析等课题的理论分析、工程设计、试验研究和工程实录等成果。它反映了我国计算土力学的当前水平，并根据生产需要提出应进一步研究的课题。

根据《土木工程学报》、《岩土工程学报》、《水利学报》和《建筑结构》等重要刊物近十年来发表的有关计算土力学的论文进行统计，各类课题的频数分布如图1.2所示。

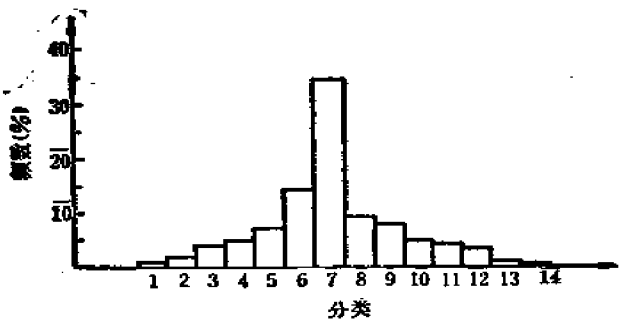


图1.2 岩土工程问题的频数分布

1. 极限分析；2. 三维渗流固结；3. 三维应力和变形；4.二维渗流固结；5. 动力分析；6. 土的本构关系；7. 二维应力变形分析；8. 土的参数研究；9. 概率分析；10. 浅基础；11. 挡土结构物；12. 结构物-土相互作用；13.土体非线性分析；14. 桩-土相互作用

由图1.2可以看出：

1. 土坝、铁路、公路和建筑物的地基应力与位移分析的数目占压倒优势。它一方面反映了我国水利建设、交通运输、能源建设和工业与民用建筑对计算土力学的客观需求，另一方面也显示了工程师注意力的集中程度。

2. 本构关系和参数研究亦占据重要地位。它说明该问题的理论研究和实际应用在计算土力学中的重要地位。动力响应分析、结构物-土相互作用及其时效、浅基础设计和概率分析已引起越来越多的注意。

3. 且不论线性的，即使是非线性的应力变形分析，饱和粘土的渗流固结，砂土液化，基础梁板内力及挠曲以及结构物-土相互作用等问题的分析理论和计算方法均日趋成熟，并广泛用于工程设计中。

4. 二维分析多于三维分析，线性分析多于非线性分析。它说明工程师宁愿采用较简单的计算方法。桩-土相互作用则刚刚引起注意。

随着我国建设的进一步发展，预计下列课题将引起越来越多的重视。

土的本构关系

本构关系的研究经历了由简单到复杂的过程。对现有的本构关系应通过现场量测资料或离心模型试验成果的检验，弄清其适用条件，然后进行筛选、简化并应用到工程设计中去，研究不同加荷方式，如单调增加的加载、快速加载、间歇加载、冲击加载和扰动加载对本构关系的影响，进一步研究不同的应力路径、围压升高、围压降低以及土体接近破坏时的本构关系。

在本构关系中还应当考虑土的非弹性体积变化、超固结比、结构性、流变性、剪胀性和剪缩性的影响。不同频率和不同激发方式下动力本构关系的研究则刚刚开始。

除宏观本构关系以外，还应开展细观本构关系的研究。以更好地理解土体变形和破坏

的机理，使宏观本构关系臻于完善。

渗流固结

目前饱和土或接近饱和土的渗流固结耦合分析中，既可以考虑线性的也可以考虑非线性的本构关系。分析理论和计算方法日趋成熟。然而，在地球表面，非饱和土的覆盖面积比饱和土的大得多，可能需要建立每个结点有五个自由度(三个位移分量，一个孔隙水压力和一个孔隙气压力)的渗透固结方程，并为此确定相应的计算参数。

黄土和膨胀土在我国的分布很广，需要在计算中考虑黄土的湿陷性和膨胀土的胀缩性。泥炭土和吹填淤泥的变形量有时超过30%，在大变形固结中可能需要考虑几何非线性。

土-结构物相互作用

随着高层建筑的日益增加，可能需要研究箱基-桩基，筏基-桩基以及厚筏基础的计算方法和优化设计。研究跨数、层数、上部结构形式和劲度、不同地基变形特性等因素对建筑物和基础变形的抑制作用和荷载重分布的影响。发展土-结构物相互作用的地基极限承载力分析方法。

城市地下铁道的兴建，地下空间的开发与利用以及高层建筑基础工程深开挖会带来周围土体的位移及其对现有相邻建筑的影响。深开挖会危及有重要历史意义的地面建筑，需要对这些影响作定量的估计。

为了支撑深基坑而需要研究挡墙-锚杆-土体系的相互作用以及不同开挖方法对位移场的影响。

人工地基与加筋土

交通运输中铁路公路运输量的增加和交通工具时速的提高，对路基质量提出越来越高的要求。需要研究不同人工地基和多层路面结构的应力与变形，加筋土挡墙和加筋土路堤的工作特性，使用土工布或尼龙织物对改善路堤填方变形和稳定性的作用。

环境岩土工程

土体和地下水的污染日益严重。不同成份的有害物质在土中的扩散与弥散速度与范围及其对土物理力学性的影响，有关参数的室内试验与现场测定，核废料的地下贮存引起的扩散等是亟需研究的课题。

大量开采地下水和地下天然油气已经造成城镇大面积地表沉降。沉降中心的产生已经危及地面建筑和设施。矿山采空区的地面变形对建筑物也产生影响。因此需要研究开采速率和开采方式对地面变形的影响。

概率分析

进一步将概率分析引入土力学。目前在计算方法、计算模型、计算参数和分析结果等四个环节中，前二者是确定性的，后二者则是随机的。只有定值的方法达到成熟的阶段以后，把概率分析广泛应用于土力学才具备必要的前提条件。将概率分析用于分层总和法。土坡稳定分析和单桩承载力分析，目前还处于初级发展阶段。期待着对区域性土性质指标的统计分析及其相关关系，静力触探、孔隙水压力量测和旁压试验的成果分析及其与室内试验结果的相关关系进行研究；对浅基础设计、桩基础、地基承载力和挡土结构物作可靠性和失效概率分析。

反分析

计算方法和土的本构关系选定以后，选取计算参数就成为重要问题。我国对一些重要的水工结构，电厂和工业与民用建筑进行了长期观测，积累了系统的资料。充分利用它进行反分析以取得土体计算参数，并建立这些参数与室内试验参数的相关关系，为相近条件下的工程设计服务。

参 考 文 献

1. 沈珠江，当前土力学研究中的几个问题，岩土工程学报，1986年第5期，p.1—7.
2. 袁建新，岩土力学研究趋向，岩土力学，1987年第3期，p.3—9.
3. 岩土力学与工程战略讨论会，岩土力学，1987年第12期，p.43—81.
4. B.B.布鲁姆斯，国际岩土工程发展的新动向，在同济大学的报告，1988年8月.
5. Zienkiewicz, O. C., The coupled problems of soil-pore fluid-external fluid interaction, 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol.4, p.1731, 1985.

第二章 数值方法

2.1 概述

除极限平衡方程经常用特征线法求解以外，土力学的基本方程可通过加权残数法用有限元、边界元或有限差分等数值方法求解。这三种方法可以统称为广义有限元法。许多土力学问题可以写成偏微分方程，它在分析域 Ω 中得到满足，并在边界 Γ 上满足特定的边界条件。即

在分析域 Ω 中

$$A(\bar{u})+Q=0 \tag{2.1a}$$

在边界 Γ 上

$$B(\bar{u})+b=0 \tag{2.1b}$$

A 和 B 为适当的微分算子，$\bar{u}$ 是待定场变量，而 Q 和 b 为已知的向量函数。

由于土体的非均匀性、非线性和边界条件的复杂性，只能寻求近似的，而对于工程设计足够满意的解答。在广义有限元中，用下列展开式近似地表示场函数 $\bar{u}$：

$$\bar{u}\approx u=\sum_{i=1}^{n}N_i a_i \tag{2.2}$$

式中 N_i 为试函数。与连续分布的未知场函数 $\bar{u}$ 不同，a_i 只是一些离散点 i 上的待定场变量。因为 u 是近似解，与精确解 $\bar{u}$ 相比，会产生一定的误差(或残数 R)，即

$$(A(u)+Q+B(u)+b)-(A(\bar{u})+Q+B(\bar{u})+b)=R \tag{2.3}$$

令 ∇_j^T 和 $\bar{\nabla}_j^T$ 为适当的权函数。使残数的加权积分等于零，并考虑到式(2.1a和b)，从而有

$$\int_{\Omega}\nabla_j^T(A(u)+Q)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\bar{\nabla}_j^T(B(u)+b)\mathrm{d}\Gamma=0 \quad j=1,2\cdots n \tag{2.4}$$

视权函数 ∇_j 和 $\bar{\nabla}_j$ 的取法不同，从而区分出标准有限元、有限差分和边界元等不同的数值分析方法。

2.1.1 标准有限元

Galerkin 选取试函数 N_j 作为权函数 ∇_j 和 $\bar{\nabla}_j$。把分析域离散成许多子域 Ω^e，同时把边界离散成分段边界 Γ^e，考虑到式(2.2)，于是有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}N_j^T[A(N_i a_i)+Q]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}N_j^T[B(N_i a_i)+b]\mathrm{d}\Gamma\\&=\sum_{e=1}^{m}\left\{\int_{\Omega^e}N_j^T[A(N_i a_i)+Q]\mathrm{d}\Omega^e+\sum_{e=1}^{n}\int_{\Gamma^e}N_j^T[B(N_i a_i)+b]\,\mathrm{d}\Gamma^e\right\}=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

式中 m 为子域 Ω(即有限元 e)的个数，而 n 为分段边界 Γ^e 的个数。

完成对式(2.5)的积分，就可以得到一组代数方程

$$[K]\{a\}=\{f\} \tag{2.6}$$

以位移法解平衡问题为例，$[K]$为体系的劲度矩阵，$\{a\}$ 为所有结果的未知位移列向量，而 $\{f\}$ 为外荷列阵。

本书中大量使用标准有限元，将在 2.2 和以后各节中详细讨论。

2.1.2 有限差分

在式(2.4)中，以 Dirac 函数作为权函数，于是就产生有限差分法。Dirac 函数的特点在于被积函数 $f(x)$ 在 dx 趋近于零处趋向无穷大，于是有

$$D=\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$$

而式(2.4)成为

$$\int_{\Omega} D[A(u)+Q]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma} D[B(u)+b]\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{2.7}$$

进一步的讨论在 2.8 节中。在本书中，凡涉及时间域的离散，都用有限差分法来分析。

2.1.3 边界元

由于土体的几何尺度很大，将计算域的边界离散为若干个边界元，解出边界上的未知场变量，再进而求解土体内部的场变量。

在式(2.4)中，取基本解作为权函数，而形成所谓边界元法。以二维平衡问题为例，所谓基本解就是边界上 j 点的 x(或 z)方向的单位力在 i 点产生的 x(或 z) 方向位移分量。进一步的讨论列于 2.9 节中。

2.2 标准有限元

为了使讨论不致过于抽象，将通过几个有代表性的土力学问题来说明标准有限元的原理。

2.2.1 扩散和弥散

污染物在地下水中的扩散-弥散问题日益受到重视。地下水的污染会改变土体的物理力学性质，影响人类的生活环境和工程活动。

即使在静止的地下水中，污染源会由于布朗运动而产生分子扩散；假使地下水有水头梯度，土中一点的污染物浓度分布会由于流速的加大而减小，同时液体中的污染物会从浓度较高处向较低处弥散。污染物浓度 C 在土中的分布，既是空间的函数，也是时间的函数。为简单起见，本节中只讨论稳态弥散，即场变量及其导数与时间无关。

考察微分体积中流进流出的物质守恒和渗流的连续性条件，而建立了扩散-弥散方程(二维问题)：

$$D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial C}{\partial x}-u_z\frac{\partial C}{\partial z}-W=0 \tag{2.8}$$

式中 C——地下水中各点的污染物浓度，作为未知场变量。因为在一点各个方向的浓度相等，所以，每个结点只有一个自由度；

D_x、D_z——在相应方向上，单位时间、单位面积内污染物的通过量，由专门的土工试验测定，并称为弥散系数；

u_x、u_z——地下水在相应方向的实际流速，等于平均渗流速率 v_x、v_z 分别除以孔隙率 n 而得；

W——源汇项，表示土中由于吸附或溶解而产生的污染物积聚。

根据 Galerkin 原理，先对式(2.8)的前二项，接着对后二项作加权残数积分。至于问题的边界条件则留待总特性矩阵建立以后再做处理。

令

$$C=\Sigma N_i C_i \tag{2.9}$$

于是式(2.8)中第一项的加权残数积分为

$$\iint_\Omega N_j\left[D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\iint_\Omega N_j\left[D_x\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,C_i \tag{2.10}$$

通过分部积分，并利用 Green 原理，有

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega N_j\left[D_x\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\&=\iint_\Omega N_j D_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\iint_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial x}D_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\&=\oint_\Gamma D_x N_j\frac{\partial N_i}{\partial x}\cos(n,x)\mathrm{d}\Gamma-\iint_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial x}D_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2.10a}$$

式中 $\cos(n,x)$ 为边界外法线 n 的方向余弦(图 2.1)。

同理，式(2.8)中第二项的加权残数积分为

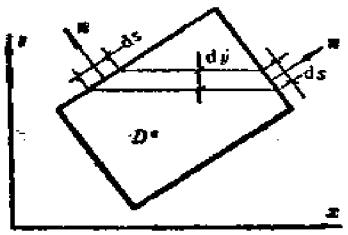


图 2.1 计算域 Ω^e 及其边界

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega N_j\left[D_z\frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\&=\iint_\Omega N_j D_z\frac{\partial N_i}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-\iint_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial z}D_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\&=\oint_\Gamma N_j D_z\frac{\partial N_i}{\partial z}\cos(n,z)\mathrm{d}\Gamma-\iint_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial z}D_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{2.10b}$$

在各个内部单元 e 中，式(2.10a)和(2.10b) 右端第一项的线积分等于零。而边界条件在以后再考虑。

综合式 (2.10a)和(2.10b)，可以得到

$$\iint_\Omega N_j\left[D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,C_i-\iint_\Omega N_j W\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=0$$

或

$$\iint_\Omega\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}D_x\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}D_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,C_i-\iint_\Omega N_j W\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=0 \tag{2.11}$$

或

$$[KP]\{C\}=\{W\} \tag{2.11a}$$

式中

$$[KP]=\iint_\Omega\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}D_x\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}D_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2.12}$$

称为渗流矩阵。

以四结点四边形等参单元为例，$[KP]$可以写成矩阵形式

$$[KP]=\iint\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&\frac{\partial N_1}{\partial z}\\\frac{\partial N_2}{\partial x}&\frac{\partial N_2}{\partial z}\\\frac{\partial N_3}{\partial x}&\frac{\partial N_3}{\partial z}\\\frac{\partial N_4}{\partial x}&\frac{\partial N_4}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_x&0\\0&D_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x}&\frac{\partial N_2}{\partial x}&\frac{\partial N_3}{\partial x}&\frac{\partial N_4}{\partial x}\\\frac{\partial N_1}{\partial z}&\frac{\partial N_2}{\partial z}&\frac{\partial N_3}{\partial z}&\frac{\partial N_4}{\partial z}\end{bmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2.13}$$

或

$$[KP]=\iint[T]^T[D_{xz}][T]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2.14}$$

现在转而讨论式(2.8)的第三、四项。按 Galerkin 原理做加权残数积分

$$\begin{aligned}
&-\iint_\Omega N_j\left[u_x\frac{\partial}{\partial x}(N_iC_i)+u_z\frac{\partial}{\partial z}(N_iC_i)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\
&=-\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_xN_j(N_iC_i))+\frac{\partial}{\partial z}(u_zN_j(N_iC_i))\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\
&\quad+\iint_\Omega\left[u_x\frac{\partial N_j}{\partial x}N_iC_i+u_z\frac{\partial N_j}{\partial z}N_iC_i\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\
&=-\oint_\Gamma[u_xN_jN_i\cos(n,x)+u_zN_jN_i\cos(n,z)]\mathrm{d}\Gamma C_i\\
&\quad+\iint_\Omega\left[u_x\frac{\partial N_j}{\partial x}N_i+u_z\frac{\partial N_j}{\partial z}N_i\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,C_i
\end{aligned} \tag{2.15}$$

在计算域内部，上式右端第一项线积分等于零。综合式(2.11)和(2.15)，最后得到

$$\iint_\Omega\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}D_x\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}D_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\{C\}^e-\iint_\Omega\left[u_xN_i\frac{\partial N_j}{\partial x}+u_zN_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\{C\}^e$$

$$-\iint_\Omega N_jW\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=0 \tag{2.16}$$

或

$$([KP]-[Ku])\{C\}=\{W\} \tag{2.16a}$$

或

$$[KE]\{C\}=\{W\} \tag{2.16b}$$

式(2.16b)就是扩散-弥散问题用有限元离散以后的矩阵方程。$[KE]$ 是单元特性矩阵，其中第一部分为分子扩散对地下水浓度分布所作的贡献，第二部分为渗流的贡献。由于渗流使浓度减小，所以$[KU]$前面带负号。

在图 2.2 中，近地面处的阴影部分为已知浓度的污染源。在距 z 轴足够远的竖直边界上，$C=0$。在地基深处有水平砂脉，于是有边界条件 $u_z\frac{\partial C}{\partial z}-w=0$；而在对称轴上，有边界条件 $\frac{\partial C}{\partial x}=0$。

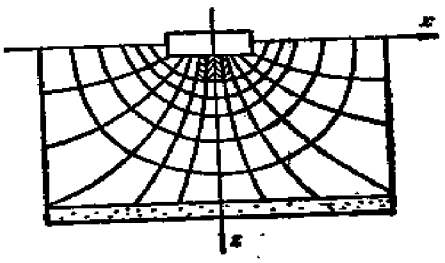


图 2.2 地基中污染物的扩散与弥散

把各个单元的贡献集合起来，就形成总特性矩阵。同时把各单元的右端项集合起来，形成总的“荷载项”。按实际情况引入边界条件，使方程组得以求解。

应当注意，在式(2.16)中，由于 $N_i\frac{\partial N_j}{\partial x}\neq N_j\frac{\partial N_i}{\partial x}$ 以及 $N_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\neq N_j\frac{\partial N_i}{\partial z}$，所以单元特性矩阵$[KU]$是不对称的，从而使总系数矩阵也成为不对称。它需要求解非对称方程组的子程序。

2.2.2 土体质量矩阵

在土体动力响应分析中，表示瞬态平衡的运动方程为

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Ku-F(t)=0 \tag{2.17}$$

式中各项依次为惯性力、阻尼力、静力和外界激发力。

把土体离散为若干有限元，并为每个单元建立质量矩阵。根据 Galerkin 原理，取形函数 N_i 作为权函数。于是式(2.17)中第一项的加权残数积分为

$$\iint N_i^T\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2.18}$$

取 $u=N_iu_i$，又因 N_i 只是坐标 x 和 z 的函数，而与时间无关，于是式(2.18)成为

$$\iint N_i^T\rho N_i\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{u\} \tag{2.19}$$

式中 ρ 是土体的质量密度。

最后，质量矩阵$[M]$为

$$[M]=\iint N_i^T\rho N_i\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{2.20}$$

2.2.3 条形基础的劲度矩阵

条形基础的平衡微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}=q(x)-p(x) \tag{2.21}$$

式中 EI 为基础的抗弯劲度；w 为基础挠度，而 $q(x)$ 和 $p(x)$ 分别为分布荷载及分布反力。

把基础划分为若干单元。每个结点有两个自由度：挠度 w 和转角 θ。而任一点的位移向量为

$$\{w\}=N_1w_1+N_2\theta_1+N_3w_2+N_4\theta_2 \tag{2.22}$$

式中位移函数

$$N_1=(L^3-3Lx^2+2x^3)/L^3,\qquad N_2=(L^2-4Lx+3x^2)/L^2,$$
$$N_3=(3Lx^2-2x^3)/L^3,\qquad N_4=(3x^2-2Lx)/L^2 \tag{2.23}$$

根据 Galerkin 原理，对式(2.21)作加权残数积分：

$$\int N_i^T\left(EI\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}w\right)\mathrm{d}x-\int N_i^Tq(x)\mathrm{d}x+\int N_i^Tp(x)\mathrm{d}x=0 \tag{2.24}$$

为了避免对上式第一项连续积分四次，可以连续两次做分部积分，并利用 Green 原理，于是有

$$EI\int N_i^T\frac{\mathrm{d}^4N_i}{\mathrm{d}x^4}\,\mathrm{d}x\{w\}=-EI\int\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3N_i}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{d}x\{w\}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}^2N_i}{\mathrm{d}x^2}EI\frac{\mathrm{d}^2N_i}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\{w\} \tag{2.25}$$

把式(2.25)的积分结果定义为基础单元的劲度矩阵$[KE]$，即

$$[KE]=\int_0^L\frac{\mathrm{d}^2N_i}{\mathrm{d}x^2}EI\frac{\mathrm{d}^2N_i}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2\\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L\\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2\\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L\end{bmatrix} \tag{2.26}$$

式(2.26)与大学教程结构力学中的分析结果完全一致。

通过扩散-弥散方程、运动方程和梁的平衡微分方程这些典型的土力学问题，可以看出，

利用 Galerkin 原理均可建立上述问题的单元特性矩阵。

在不同的微分方程中，可能出现场函数 u 及其一阶、二阶或四阶导数，通过残数的加权积分，其单元特性矩阵具有下列共性：

含有项	单元特性矩阵	例子
u	$\int N_i N_j \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$	质量矩阵
$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\int N_i \frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$	扩散弥散
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\int \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$	土中渗流
$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	$\int \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$	基础板挠曲

掌握上述共性，就能顺利地研究土力学中的其它课题。

2.3 有限元分析步骤

标准有限元(以后简称有限元)是求解连续区域内的边值问题或初值问题的数值方法。把分析域离散成有限个只在结点相联结的子域，即有限元。全部有限元的集合就静力等价于整个分析体系。有限元内的待定场函数则近似地用若干形函数迭加而成。只求解场函数如位移、流势、浓度、温度在结点上的值，据以了解它们在整个区域内的分布和变化规律。

有限元分析的关键在于首先进行单元特性分析，接着进行总体分析。这种从局部到整体，从个别到一般的分析方法在工程设计和科学技术研究中是经常使用的。

根据上述基本思想，有限元分析可分为以下几个步骤。

1．连续体的离散化

用若干个有限元将连续体离散。根据问题的性质选择合适的单元类型、大小与排列，应尽可能正确地模拟原来的土体和结构。单元的边线应当与力学性质不同的土层界面相一致。在应力梯度很大的地方如基础边缘和坝体坡脚处，单元应加密。

一维的梁杆单元用于条形基础、桩以及框架结构-土的相互作用分析。平面三角形或四边形单元则用于二维分析。在三维分析中，经常使用八结点或二十结点的六面体单元。在轴对称问题中，应当使用环状的、横剖面为三角形或四边形的单元。

2．选择位移函数

用位移函数 $N(x, y)$ 表示场变量在单元内的分布形态和变化规律，以便用场变量在结点上的值来描述单元内任一点的场变量。

选择位移函数是有限元分析的出发点，它可以是局部坐标(ξ, η)或整体坐标(x, y)的多项式，也可以取为 Fourier 级数等等。

以具有四个结点的四边形等参单元 1234 为例，单元内任一点的水平和竖直位移 u 和 v，可以用结点处的相应值表示：

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \end{aligned} \tag{2.27}$$

式中位移函数

$$N_1=(1-\xi)(1-\eta)/4,\quad N_2=(1-\xi)(1+\eta)/4$$
$$N_3=(1+\xi)(1+\eta)/4,\quad N_4=(1+\xi)(1-\eta)/4 \tag{2.28}$$

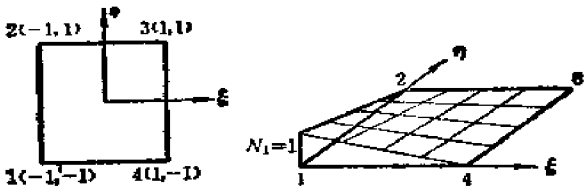


图 2.3 四结点等参元和形函数

位移函数应当是连续可微的函数。有时候还要求其一阶导数(如斜率)甚至二阶导数(如基础的曲率和扭率)连续。

形函数N应具有下述特点，即

N_i在i点(如图2.3中$i=1, 2, 3, 4$)的值等于1，而在其它点等于零。这对保证场函数在i点取结点的场变量是必要的。

$\Sigma N_i=1$，这可以用i点坐标代入而得到证明。

此外，形函数还必须满足协调性和完备性的要求。

协调性就是除了满足场函数在相邻单元的公共结点、公共边或公共面上的连续性条件外，有时还要求满足一阶甚至二阶导数的连续性。只有这样，才能保证当有限元的尺寸逐步取小时，计算结果收敛于正确解。假使形函数仅能保证场函数本身的连续性，就称为C^0阶连续性；当形函数具有C^1阶连续性时，除了场变量以外，还能保证一阶导数的连续性；C^2阶形函数尚能保证二阶导数，如孔隙压力梯度沿深度变化的连续性等等。然而，为了谋求更高的分析精度而使用高阶形函数时，计算工作量大大增加。有时候只采用具有C^0阶连续性的形函数，计算工作量大大减小，而精度亦能满足工程设计的需要。

用例子来说明形函数或位移函数应具有完备性。如二维六结点三角形单元选取如下的位移模式

$$u=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2$$
$$v=\alpha_7+\alpha_8x+\alpha_9y+\alpha_{10}x^2+\alpha_{11}xy+\alpha_{12}y^2 \tag{2.29}$$

由于此单元具有三个角结点和三个边中点，于是位移模式取为x、y的完全多项式，因而具有完备性。这是为了保证当有限元产生位移时，仍然具有几何同性。

不管内部单元或边界附近的单元均可选取相同的位移函数，因此为它们建立单元特性矩阵的方法是相同的。

3. 单元特性矩阵

将土体用有限元离散以后，各单元只有几何尺寸和材料参数的差异，其单元特性矩阵仍具有一些共性。在第2.2节已经讨论了建立单元特性矩阵的方法。此外，还应当把作用在单元上的面力或体力化成静力等效的结点荷载$\{P\}^e$。

4. 总特性矩阵

把全部单元特性矩阵按对号入座的方法集合起来以形成整个体系的总特性矩阵。它反映了所有相邻单元之间的相互影响和相互制约关系。具体说来，它描述了各个结点的平衡条件、位移或渗流的连续性条件以及所有的边界条件。在相邻单元的公共结点、公共边或公共面上，场函数的连续性能自动满足。所选用的形函数合适，应力、流量或弯矩、剪力亦能自动满足；而当协调性不能满足时，上述物理量仅能近似地满足。

对于用位移法解平衡问题来说，总特性矩阵就是联系总荷载列阵$\{P\}$、总反力列阵$\{R\}$以及总位移列阵$\{u\}$的总劲度矩阵$[K]$，即

$$[K]\{u\}=\{P\}-\{R\} \tag{2.30}$$

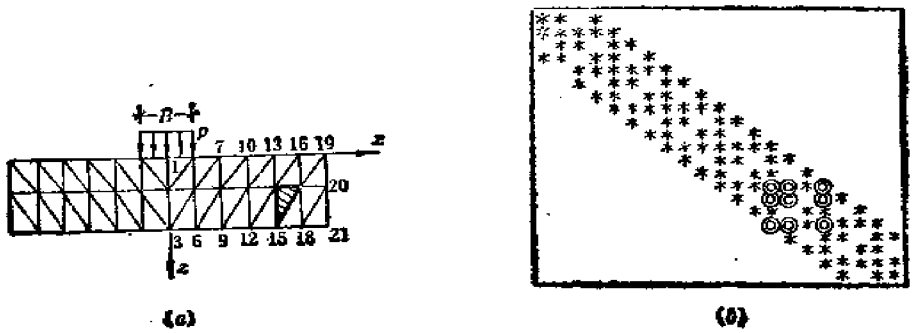


图 2.4 双层地基的有限元离散(a)；总劲度矩阵(b)

图 2.4 表示用平面三角形单元解双层地基的位移场和应力场。结点编号为 14、15、17 的单元劲度矩阵在总劲度矩阵中的位置亦已标明。还可以看出，总劲度矩阵是带状的，这是因为一点的位移只与它本身和相邻结点的位移有关；总劲度矩阵是对称的，这可以用变位互等定理来说明；它还是正定的，这是由于单位体积内的比应变能 $\{\sigma\}\{\varepsilon\}$ 在连续体内总和起来，总是具有正号。

5. 引入边界条件

土力学中许多问题可以用数理方程表示，它们只能在满足所有边界条件时才得以求解；否则，总系数矩阵是奇异的，其逆阵不存在，因而无法求解。这好象土体自由地作没有任何约束的刚体运动一样。

边界条件分为齐次和非齐次边界条件两种。

齐次边界条件表示边界结点的某个自由度完全地受到约束，亦即沿该自由度方向的场变量等于零。只要把与该自由度有关的行和列从总特性矩阵中划去，就表示已考虑了这一边界条件。

还可以在总劲度矩阵中用分块矩阵来表示齐次边界条件。在图 2.5 中，用 $\{u_1\}$ 表示没有受到约束而行将产生位移的内部结点自由度，而 $\{u_2\}$ 为完全受到约束的边界结点自由度(在图 2.5b 中以 0 表示)。

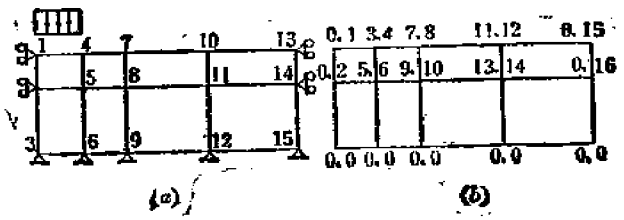


图 2.5 结点编号(a)；结点自由度编号(b)

用分块矩阵来表示体系的平衡方程：

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ R \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

或

$$\begin{aligned} K_{11}u_1 + K_{12}u_2 &= P \\ K_{21}u_1 + K_{22}u_2 &= R \end{aligned} \tag{2.31a}$$

由于 $\{u_2\}=0$，于是有

$$\{u_1\}=[K_{11}]^{-1}\{P\} \tag{2.32}$$

$$\{R\}=[K_{21}][K_{11}]^{-1}\{P\} \tag{2.33}$$

其中 $\{u_2\}=0$ 为齐次边界条件，而 $\{R\}$ 为保证边界上某些位移等于零而必须施加的反力。由于只需求解那些不等于零的位移量，有效方程组的数目因而大大减少。

非齐次边界条件表示一个边界结点沿某自由度的场变量为给定值，但不等于零。处理这种边界条件在于把总特性矩阵中的相应主对角元加个大数(如 10^{12})，同时把相应的右端项改为场变量的已知值乘以相同的大数。设每个结点有两个位移自由度，而结点 i 的水平位移已知为 3.7 mm，于是原方程变成

$$k_{2i-1,1}u_1+K_{2i-1,2}u_2+\cdots+(k_{2i-1,2i-1}+10^{12})u_{2i-1}+\cdots=3.7(k_{2i-1,2i-1}+10^{12}) \tag{2.34}$$

解出

$$u_{2i-1}=\frac{3.7(k_{2i-1,2i-1}+10^{12})}{(k_{2i-1,2i-1}+10^{12})+\Sigma} \tag{2.34a}$$

式中 Σ 为该方程式左端除主对角元以外的其余各项之和，它远小于分母中的第一项而可以略去。于是有 $u_{2i-1}=3.7\text{mm}$。这就说明了上述处理方法的正确性。

6. 求解方程组

视对称、带状的方程组采用一维或二维存放而采用不同的求解方法。当偏微分方程含有一阶导数时，方程组是非对称的，也已经编制了求解非对称方程组的子程序。

求出位移场以后，可以进一步求出应力场。利用绘图程序，可以绘制位移分布，应力等值线或应力椭圆分布等，从而获得直观的图象。

2.4 平面等参元

土力学中很多问题可以当作平面问题来分析。将土体离散成若干三角形或任意四边形单元(图 2.6)。本节主要讨论等参元。

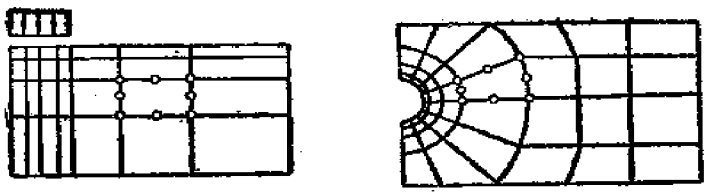


图 2.6 地基和地下铁道用平面等参元分割

根据等参元理论，单元内任一点坐标 x，z 与结点坐标用形函数 N 来联系：

$$\begin{aligned}x(\xi,\eta)&=\sum_{i=1}^{r}N_ix_i=N_1x_1+N_2x_2+\cdots+N_rx_r\\ z(\xi,\eta)&=\sum_{i=1}^{r}N_iz_i=N_1z_1+N_2z_2+\cdots+N_rz_r\end{aligned} \tag{2.35}$$

式中 r 为等参元结点数。

同时，单元内任一点的场变量 u，v 与结点变量之间用位移函数 N 来联系：

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=N_1u_1+N_2u_2+\cdots+N_ru_r\\ v(\xi,\eta)&=N_1v_1+N_2v_2+\cdots+N_rv_r\end{aligned} \tag{2.36}$$

用同一种参数N来表示单元的几何形态和场变量分布，称之为等参数单元，简称等参元。

选用何种具体形式的N取决于所谋求的分析精度，同时又不太增加计算工作量。选用四结点的恒应变单元，精度不够理想；而具有三次形函数的12结点等参元，计算工作量又太大，因此，本节只讨论具有二次形函数的八结点单元(图2.7b)。单元内的应力分量呈线性变化，并具有C^1阶连续性。

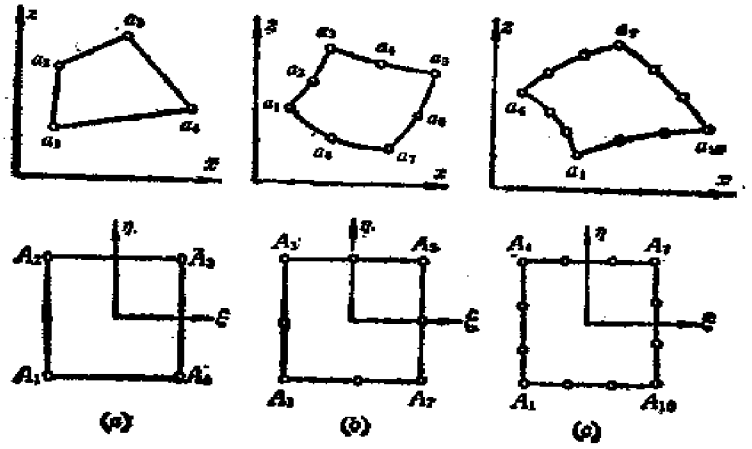


图2.7 位移函数等参元
(a)一次； (b)二次； (c)三次

等参元可以模拟不规则的边界，甚至曲线的边界。通过坐标变换，任意四边形都可以映射成边长为2的正方形，其边界分别为$\xi=\pm1$和$\eta=\pm1$。每个结点可以有一个自由度(如温度、水头或浓度)，也可以有二或三个自由度。根据等参元的特点，用形函数可以把局部坐标ξ,η中的等参元结点映射成总坐标系中任意四边形的对应结点；把正方形的各边映射成任意四边形的对应边。于是有

$$a_i(x,z)=A_i(\xi,\eta) \tag{2.37}$$

同时，等参元的结点位移$u(\xi,\eta)$也与原来单元的结点位移$u(x,z)$一一相等，即

$$u(x,z)_{a_i}=u(\xi,\eta)_{A_i} \tag{2.38}$$

四结点等参元的结点坐标和形函数N为

$$\begin{aligned}
&A_1(-1,-1) && N_1=(1-\xi)(1-\eta)/4,\\
&A_2(-1,1) && N_2=(1-\xi)(1+\eta)/4,\\
&A_3(1,1) && N_3=(1+\xi)(1+\eta)/4,\\
&A_4(1,-1) && N_4=(1+\xi)(1-\eta)/4
\end{aligned} \tag{2.39}$$

八结点等参元的结点坐标和形函数N为

$$\begin{aligned}
&A_1(-1,-1) && N_1=(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4,\\
&A_2(-1,0) && N_2=(1-\xi)(1-\eta^2)/2,\\
&A_3(-1,1) && N_3=(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4,\\
&A_4(0,1) && N_4=(1-\xi^2)(1+\eta)/2,\\
&A_5(1,1) && N_5=(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4,\\
&A_6(1,0) && N_6=(1+\xi)(1-\eta^2)/2,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$A_7(1,\ -1) \qquad N_7=(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4,$$
$$A_8(0,\ -1) \qquad N_8=(1-\xi^2)(1-\eta)/2$$

等参元结点既可以顺时针，也可以逆时针编号。它只有局部意义，而不影响分析结果。

应变-位移关系

根据弹性理论，平面问题中应变$\{\varepsilon\}$与结点位移$\{\delta\}^e$的关系为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}\{\delta\}^e \qquad i=1,\ 2\cdots 8 \tag{2.41}$$

或记为

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{2.41a}$$

由于位移函数N_i为ξ，η的函数，为了求得N_i对于x，z的导数，必须作坐标变换：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N}{\partial z}\end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

式中$[J]$为Jacob矩阵

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial \xi}[N]\\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}[N]\end{bmatrix}[\{x\}\ \{z\}] \tag{2.43}$$

其中$\dfrac{\partial N_1}{\partial \xi}=(1-\eta)(2\xi+\eta)/4$以及$\dfrac{\partial N_1}{\partial \eta}=(1-\xi)(\xi+2\eta)/4$等等；而$\{x\}$及$\{z\}$为八结点等参元的结点坐标。式(2.43)右端第一个矩阵不随各单元的位置而变化，但第二个矩阵则随单元而不同。因此，对每个单元均需形成各自的Jacob矩阵。

由高等数学，可以用式(2.43)作积分变量置换：

$$\iint_{x_1x_3} F(x,\ z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\int_{\xi_1}^{\xi_3}\int_{\eta_1}^{\eta_3} G(\xi,\ \eta)\left|\frac{\partial(x,\ z)}{\partial(\xi,\ \eta)}\right|\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{2.44}$$

式中$|\partial(x,\ z)/\partial(\xi,\ \eta)|$为*Jacob*行列式的值$|J|$，并由下式给出：

$$|J|=\begin{vmatrix}\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i\\ \Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i\end{vmatrix}_{i=1,2\cdots 8} \tag{2.45}$$

求得N_i对于局部坐标ξ，η的导数以后，通过Jacob逆阵$[J]^{-1}$就得到N_i对于总坐标x，z的导数

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i & -\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i\\ -\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

把 Jacob 逆阵记为

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix} JI_{11} & JI_{12} \\ JI_{21} & JI_{22} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x}&=JI_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}&=JI_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad i=1,2\cdots 8 \end{aligned} \tag{2.48}$$

以上式代入式(2.41)中的应变-位移矩阵，于是有

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix} JI_{11}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & JI_{21}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{22}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ JI_{21}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{22}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & JI_{11}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{i=1,2\cdots 8}\{\delta\}^e \tag{2.49}$$

应力-应变矩阵

设土体是均匀的、各向同性的弹性体，其应力为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{2.50}$$

对于平面应力或平面形变问题，E、F 和 G 分别为

$$\begin{aligned} E&=\frac{E}{1-\nu^2}, & E&=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ F&=\frac{\nu E}{1-\nu^2}, & F&=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G&=\frac{E}{2(1+\nu)}, & G&=\frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{2.51}$$

最后得应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_x&=E\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial x}u_i+F\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial z}v_i \\ \sigma_z&=F\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial x}u_i+E\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial z}v_i \\ \tau_{xz}&=G\left[\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}u_i+\frac{\partial N_i}{\partial x}v_i\right)\right] \end{aligned} \tag{2.52}$$

r 为等参元的结点数。形函数的导数预先由式(2.48)求出，以积分点的局部坐标 ξ，η 代入式 2.52，即得应力值。

根据等参元的特点，上述应力只是积分点的应力。若要计算单元结点的应力，要用相应的坐标值代入或由积分点应力在结点外插，并进行光滑处理。必要时，还可以计算单元形心处的主应力椭圆和主应力方向。

单元劲度矩阵

由虚功原理可以导出联系结点力 $\{F\}^e$ 和结点位移 $\{\delta\}^e$ 的单元劲度矩阵 $[KE]$

$$\{F\}^e=[KE]\{\delta\}^e=\iint_e B^TDB\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,t\{\delta\}^e=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}B^TDB|J|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta t\{\delta\}^e \tag{2.53}$$

而

$$[KE]=t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}B^TDB|J|\,d\xi\,d\eta \tag{2.54}$$

t 为单元厚度。在平面应变问题中取 $t=1$。$|J|$ 为 Jacob 行列式的值，由式 (2.45)给出。

对于二次形函数的八结点等参元，其单元劲度矩阵用子矩阵的形式给出。由于对称性，只列出上三角。

$$\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18}\\
 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28}\\
 & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38}\\
 & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48}\\
 & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58}\\
 & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68}\\
 & & & & & & k_{77} & k_{78}\\
 & & & & & & & k_{88}
\end{bmatrix}$$

每个子阵 k_{ij} 是 2×2 的方阵。由于被积函数 $G(\xi,\eta)=B^TDB$ 矩阵是 ξ、η 的分式有理函数，很难用显式表示各个劲度系数。一般用 Gauss 数值积分计算，于是

$$k_{ij}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}B_i^TDB_j|J|\,d\xi\,d\eta=\sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}W_PW_QB_i^TDB_j|J| \tag{2.55}$$

式中 GP 为每个方向上 Gauss 积分点个数，一般取 $GP=2$ 或 3，W_P 及 W_Q 为相应的权系数；$|J|$ 为该单元 Jacob 行列式的值。以各积分点的局部坐标代入 $B_i^TDB_j$ 的表达式，并对全部积分点求和，即得 k_{ij} 值。这样，运用 Gauss 数值积分就把复杂函数的积分化成求和的公式。

Gauss 积分点的位置及相应的权函数由图 2.8及表 2.1 给出。

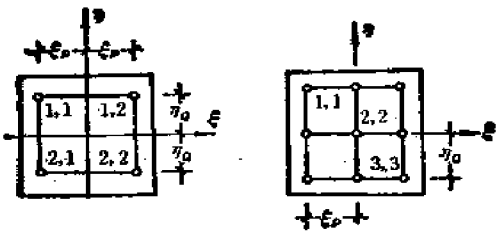


图 2.8 $GP=2$和$GP=3$时的积分点位置

表 2.1 积分点坐标和权系数

GP	ξ_P, η_P	W_P, W_Q
2	$-1/\sqrt{3}$	1.0000
	$1/\sqrt{3}$	1.0000
3	$-\sqrt{15}/5$	5/9
	0.0000	8/9
	$\sqrt{15}/5$	5/9

虽然，GP 越大，积分精度越高，但很少使用 $GP>3$。

当 $i=j$ 时，只需计算三个，而当 $i\neq j$ 时，则需计算四个劲度系数。记子矩阵

$$k_{ij}=\begin{bmatrix}k1 & k2\\ k3 & k4\end{bmatrix}=\sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}W_PW_Q|J|\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

于是有

$$\begin{aligned}
(k1)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP} W_P W_Q |J|\left(E\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+G\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\\
(k2)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP} W_P W_Q |J|\left(F\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+G\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\\
(k3)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP} W_P W_Q |J|\left(F\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}+G\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\\
(k4)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP} W_P W_Q |J|\left(E\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}+G\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

式(2.57)表明，各个劲度系数都是形函数的导数与材料常数，还有权系数和 Jacob 行列式的乘积，把各个积分点的贡献相加，即得所求的劲度系数。因为 $k_{ji}=k_{ij}$，所以很容易形成下三角。当土层性质为各向异性时，只需对式(2.57)略加修改即可。

Gauss 求积法

在建立二维或三维等参元的劲度矩阵时，因被积函数很复杂，一般用 Gauss 求积法作数值积分(图 2.9)。

为了求函数 $f(x)$在闭区间$(-1,1)$ 内与 x 轴围成的面积，特选择三个积分点 1，2 和 3，并且使

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3 = \sum_{i=1}^{GP} W_iy_i \tag{2.58}$$

式中 GP 是一个方向的积分点数(目前取 $GP=3$)。应当求出积分点的位置$(\pm b)$和相应的权系数，以便使误差为最小。

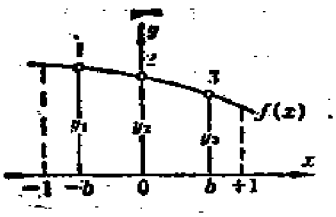


图 2.9 Gauss 数值积分

用四次多项式 $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4$ 表示 $f(x)$，于是面积的精确积分为

$$A=\int_{-1}^{1} y\mathrm{d}x = 2c_0+\frac{2}{3}c_2+\frac{2}{5}c_4$$

再按 Gauss 求积法计算面积的近似值

$$\begin{aligned}
A_1 &= W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3\\
&= W_1(c_0-c_1b+c_2b^2-c_3b^3+c_4b^4)+W_2c_0\\
&\quad +W_3(c_0+c_1b+c_2b^2+c_3b^3+c_4b^4)
\end{aligned}$$

应当使差值 $D=A-A_1$ 为最小，并据以建立一组联立方程

$$\frac{\partial D}{\partial c_i}=0 \tag{2.59}$$

从而解出

$$-b_1=-\xi_1=-\sqrt{15}/5,\ \xi_2=0,\ \xi_3=b=\sqrt{15}/5$$

以及

$$W_1=W_3=5/9,\ W_2=8/9$$

同理，在 η 方向也有三个 Gauss 积分点和相应的权系数：

$$\eta_1=-\sqrt{15}/5,\quad W_1=5/9,$$
$$\eta_2=0,\quad W_2=8/9,$$
$$\eta_3=\sqrt{15}/5,\quad W_3=5/9$$

单元荷载列阵

应当把作用在单元上的集中力、体力和面力化成静力等效的结点荷载，以建立单元荷载列阵并集合成体系的总荷载列阵。与一般单元如恒应变三角形单元不同，等参元的荷载列阵很难用直观方法建立，而应作数值积分。

1. 集中力

若集中力P正好作用在单元结点上，只需输入荷载位置与大小，直接建立结点荷载列阵$\{P\}^e$；假使P力作用在单元内某点(ξ_p,η_p)，于是有

$$\{P\}^e=[N]^T_{\xi=\xi_p,\eta=\eta_p}\cdot P \tag{2.60}$$

2. 体力

在岩土工程中，土的自重、渗流力和惯性力是常见的体力。由均布质量密度$\{\rho_x\ \rho_z\}^T$所生的结点荷载为

$$\{P\}^e=\iint_A[N]^T\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_z\end{Bmatrix}dA=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_z\end{Bmatrix}|J|d\xi d\eta$$
$$=\sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}W_PW_Q[N]^T\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_z\end{Bmatrix}|J| \tag{2.61}$$

四结点或八结点等参元由土体自重所生的结点荷载如图2.10a, b所示。

在离心模型试验中，土体所受的离心力$\omega^2R\rho$与半径R成正比。土体产生渗流时，渗流力$\rho_w\cdot\partial h_x/\partial x$与线性变化的水头梯度$\partial hx/\partial x$成正比。于是相应的结点荷载为

$$\{P\}^e=\iint_A[N]^T\omega^2R\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_z\end{Bmatrix}dA=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T\omega^2R\begin{Bmatrix}\rho_x\\ \rho_z\end{Bmatrix}|J|d\xi d\eta \tag{2.62}$$

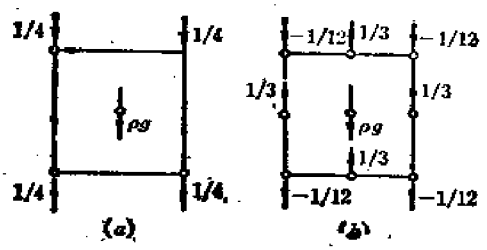


图 2.10 由土自重ρg所生的结点力
(a) 四结点单元； (b) 八结点单元

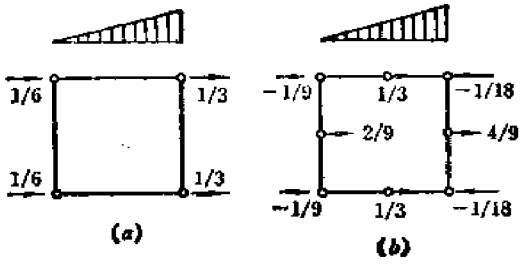


图 2.11 由水平惯性力所生的结点力
(a) 四结点单元； (b) 八结点单元

对于四结点或八结点等参元的上述数值积分如图2.11a, b所示。

3. 面力

土压力、水压力是常见的面力。设图2.12中的单元只有一边(例如$\eta=1$)位于边界上。只有该边界上的结点才有面荷载作用。

设在$\eta=1$的边上有分布力$p(KN/m)$作用，则微分长度$d\xi$上$pd\xi$的代替力(图2.12)为

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\xi \tag{2.63}$$

式中负号表示代替力分力的方向与坐标轴相反。

单元结点荷载为

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{1} p[N]^T \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\xi = \sum_{P=1}^{GP} W_p [N]^T p \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \tag{2.64}$$

数值积分的结果如图 2.13 所示，其中图 a 及 b 为均布面力作用下，而图 c 及 d 为线性分布面力作用下的单元结点荷载。

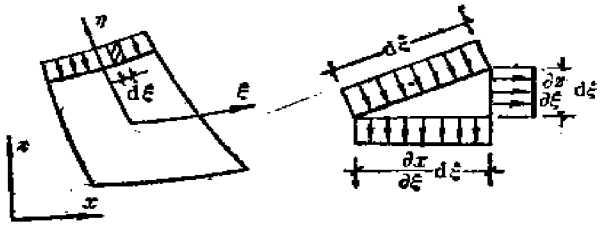


图 2.12 作用于边界 $\eta = +1$ 上的面力

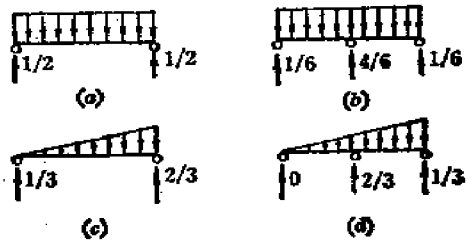


图 2.13 由面力所生的结点力

平面等参元的子程序

为了形成单元劲度矩阵 KE，需要调用若干子程序：

1．子程序 GEOM

【功能】 自动形成结点 A_1 到 A_8 的编号；形成各结点自由度数组 G(16)，供集合总劲度矩阵之用；计算结点坐标 CORD。

【标识符】 NEX，NEZ，分别为 x、z 方向单元数；AA 和 BB 为单元尺寸；P，Q 为循环变量。

```
      SUBROUTINE GEOM(P,Q,NEX,NEY,
     *AA,BB,CORD,G,NF)
C
C     NODE NUMBERING IN Z-DIREC-
C     TION,STEERING VECTOR AND
C     NODAL COORDINATES
C
      INTEGER P,Q,NEX,NEY,G(16),NF(8,2)
      INTEGER A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8
      REAL AA,BB,CORD(8,2)
      A1=(P-1)*(3*NEY+2)+2*Q+1
      A2=A1-1
      A3=A2-1
      A4=P*(3*NEY+2)+Q-NEY-1
      A5=P*(3*NEY+2)+2*Q-1
      A6=A5+1
      A7=A6+1
      A8=A4+1
      G(1)=NF(A1,1)
      G(2)=NF(A1,2)
      G(3)=NF(A2,1)
      G(4)=NF(A2,2)
      G(5)=NF(A3,1)
      G(6)=NF(A3,2)
      G(7)=NF(A4,1)
      G(8)=NF(A4,2)
      G(9)=NF(A5,1)
      G(10)=NF(A5,2)
      G(11)=NF(A6,1)
      G(12)=NF(A6,2)
      G(13)=NF(A7,1)
      G(14)=NF(A7,2)
      G(15)=NF(A8,1)
      G(16)=NF(A8,2)
      CORD(1,1)=(P-1)*AA
      CORD(1,2)=(NEY-Q+1)*BB
      CORD(3,1)=(P-1)*AA
      CORD(3,2)=(NEY-Q)*BB
      CORD(5,1)=P*AA
      CORD(5,2)=(NEY-Q)*BB
      CORD(7,1)=P*AA
      CORD(7,2)=(NEY-Q+1)*BB
      CORD(2,1)=(CORD(1,1)+CORD(3,1))/2.
      CORD(2,2)=(CORD(1,2)+CORD(3,2))/2.
      CORD(4,1)=(CORD(3,1)+CORD(5,1))/2.
      CORD(4,2)=(CORD(3,2)+CORD(5,2))/2.
      CORD(6,1)=(CORD(5,1)+CORD(7,1))/2.
      CORD(6,2)=(CORD(5,2)+CORD(7,2))/2.
      CORD(8,1)=(CORD(7,1)+CORD(1,1))/2.
      CORD(8,2)=(CORD(7,2)+CORD(1,2))/2.
      RETURN
      END
```

2. 子程序 FMQUAD

【功能】 形成位移函数对局部坐标的导数，并存放在数组 DERL(2, 8)中；列出形函数 SHAP(8)。

【标识符】 KSI = ξ, ETA = η 是积分点坐标；ETAP, ETAM 表示前面带有加减号，其意义已在语句 11 到 14 中注明。

```
1:*     SUBROUTINE FMQUAD(DERL,SHAP,SAMP,I,J)
2: c
3: c    LOCAL DERIVATIVE & SHAPE FUNCTION
4: c    FOR 8 NODAL ISOPARAM. ELEMENT
5: c
6:      INTEGER I,J
7:      REAL DERL(2,8),SHAP(8),SAMP(2,8),
8: *    ETA,KSI,ETAM,ETAP,KSIM,KSIP
9:      ETA=SAMP(I,1)
10:     KSI=SAMP(J,1)
11:     ETAM=.25*(1.0-ETA)
12:     ETAP=.25*(1.0+ETA)
13:     KSIM=.25*(1.0-KSI)
14:     KSIP=.25*(1.0+KSI)
15:     DERL(1,1)=ETAM*(2.*KSI+ETA)
16:     DERL(1,2)=-8.*ETAM*ETAP
17:     DERL(1,3)=ETAP*(2.*KSI-ETA)
18:     DERL(1,4)=-4.*ETAP*KSI
19:     DERL(1,5)=ETAP*(2.*KSI+ETA)
20:     DERL(1,6)=8.*ETAP*ETAM)
21:     DERL(1,7)=ETAM*(2.*KSI-ETA)
22:     DERL(1,8)=-4.*KSIM*ETA
23:     DERL(2,1)=KSIM*(KSI+2.*ETA)
24:     DERL(2,2)=-4.*KSIM*ETA
25:     DERL(2,3)=KSIM*(2.*ETA-KSI)
26:     DERL(2,4)=8.*KSIM*KSIP
27:     DERL(2,5)=KSIP*(KSI+2.*ETA)
28:     DERL(2,6)=-4.*KSIP*ETA
29:     DERL(2,7)=KSIP*(2.*ETA-KSI)
30:     DERL(2,8)=-8.*KSIM*KSIP
31:
32:     SHAP(1)=4.*ETAM*KSIM*(-KSI-ETA-1.)
33:     SHAP(2)=32.*KSIM*ETAM*ETAP
34:     SHAP(3)=4.*ETAP*KSIM*(-KSI+ETA-1.)
35:     SHAP(4)=32.*KSIM*KSIP*ETAP
36:     SHAP(5)=4.*KSIP*ETAP*(KSI+ETA-1.)
37:     SHAP(6)=32.*KSIP*ETAP*ETAM
38:     SHAP(7)=4.*KSIP*ETAM*(KSI-ETA-1.)
39:     SHAP(8)=32.*KSIM*KSIP*ETAM
40:     RETURN
41:     END
```

3. 子程序 JACOB

【功能】 用位移函数对于局部坐标的导数 DERL 乘以结点坐标 CORD，并存放在数组 JAC 中，用来形成 JACOB 矩阵。

4. 子程序 JACINV

【功能】 计算各单元 JACOB 行列式的值|J|，存放在 DET 中；计算 JACOB 逆阵的各个系数，存放在数组 JI 中。

```
1:*     SUBROUTINE JACOB(DERL,CORD)
2: c
3: c    JACOBIAN MATRIX
4: c
5:      CALL FMQUAD(DERL,SHAP,I,J)
6:      CALL GEOM(P,Q,NEX,AA,BB,CORD,
7: *    G,NF)
8:      CALL MATMUL(DERL,CORD,JAC,
9: *    L,M,N)
10:     RETURN
11:     END
12:
13:
14:*    SUBROUTINE JACINV(JAC,JI,DET)
15: c
16: c   JACOBIAN MATRIX INVERSION
17: c   AND DETERMINANT
18: c
19:     INTEGERK,L
20:     REAL JAC(2,2),JI(2,2),DET
21:     DET=JAC(1,1)*JAC(2,2)-
22: *   JAC(1,2)*JAC(2,1)
23:     JI(1,1)=JAC(2,2)
24:     JI(1,2)=-JAC(1,2)
25:     JI(2,1)=-JAC(2,1)
26:     JI(2,2)=JAC(1,1)
27:     DO 1 K=1,2
28:     DO 1 L=1,2
29: 1   JI(K,L)=JI(K,L)/DET
30:     RETURN
31:     END
```

5. 子程序 GAUSS

【功能】 当每排积分点个数 GP = 2 或 3 时，列出积分点坐标并放在 SAMP(GP,1)中；列出相应的权系数 W 并放在 SAMP(GP, 2)中。

6. 子程序 FORMB

【功能】 形成应变矩阵[B]。

【标识符】 调用矩阵相乘的子程序(略),把 Jacob 逆阵乘以 DERL,得到位移函数对总坐标的导数,并存放在数组 DERG 中;NOD 是单元结点数,VOL 是工作单元,K 是[B]的偶数列,L 是奇数列。

```
      SUBROUTINE GAUSS(SAMP,GP)
C
C     GAUSSIAN COORDINATES & WEIGHTS
C
      INTEGER GP
      REAL SAMP(3,2)
      GOTO(1,2,3),GP
    2 SAMP(1,1)=1./SQRT(3.)
      SAMP(2,1)=-SAMP(1,1)
      SAMP(1,2)=1.
      SAMP(2,2)=1.
      GOTO 1
    3 SAMP(1,1)=.2*SQRT(15.)
      SAMP(2,1)=.0
      SAMP(3,1)=-SAMP(1,1)
      SAMP(1,2)=5./9.
      SAMP(2,2)=8./9.
      SAMP(3,2)=SAMP(1,2)
      GOTO 1
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FORMB(BE,DERG,VOL,NOD)
C
C     STRAIN-DISPLACEMENT MATRIX B
C     IN GLOBAL COORDINATES
C
      INTEGER NOD,K,L,M
      REAL BE(3,8),DERG(2,8),VOL(8)
      DO 1 M=1,NOD
      K=2*M
      L=K-1
      VOL(L)=BE(1,L)=BE(3,K)=DERG(1,M)
      VOL(K)=BE(2,K)=BE(3,L)=DERG(2,M)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.5 轴对称等参元

当地基和结构物的几何尺寸、荷载分布以及边界约束条件都对称于 z 轴时,则位移,应变和应力也对称于 z 轴,并且与 θ 无关(图 2.14)。

圆形冷却塔、核反应堆和油罐地基是典型的轴对称问题。在本节中用若干环状四结点等参元将地基离散(图 2.14)。为了提高分析精度,也可以采用八结点环状等参元。

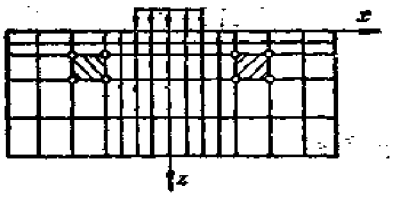


图 2.14 轴对称问题中的环形单元

每个结点有二个自由度:沿 r 轴和 z 轴的位移分量 u 和 w。单元中任一点的坐标 r, z 可以用结点坐标表示:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} [N] \tag{2.65}$$

任一点的位移 u, w 用结点位移表示:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [I N_1 \; I N_2 \; I N_3 \; I N_4] \{\delta\}^e \tag{2.66}$$

式中 I 为单位矩阵,而[N]仍用式(2.39)表示。

应变-位移关系

在轴对称问题中,每个结点有四个应变分量,即

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0\\ \frac{1}{r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r} & 0\\ \frac{N_i}{r} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r}\end{bmatrix}_{i=1,2,3,4}\{\delta\}^e=[B]\{\delta\}^e \tag{2.67}$$

由于 $N_i(\xi,\eta)$只是局部坐标的函数，为了求得 N_i 对于总坐标 r，z 的导数，应当作坐标变换：

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

式中 Jacob 矩阵$[J]$为

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}r_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i\\ \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}r_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i\end{bmatrix} \tag{2.69}$$

对$[J]$求逆，即可得到 N_i 对于 r，z 的偏导数：

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi}\\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{Bmatrix} \tag{2.70}$$

式中 Jacob 行列式$|J|$的值由式(2.71)给出：

$$|J|=\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}r_i\,\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i-\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}r_i\,\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i \tag{2.71}$$

在式(2.70)中，记 Jacob 逆阵

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix}JR_{11} & JR_{12}\\ JR_{21} & JR_{22}\end{bmatrix} \tag{2.72}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial r}&=JR_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}&=JR_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{aligned} \tag{2.73}$$

最后得到应变-位移矩阵为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}JR_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0\\ \frac{N_i}{r} & 0\\ 0 & JR_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ JR_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \eta} & JR_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JR_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\end{bmatrix}_{i=1,2,3,4}\{\delta\}^e \tag{2.74}$$

或

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{2.74a}$$

应力-位移矩阵

对于均匀的、各向同性的弹性体，应力-应变关系由广义 Hooke 定律给出

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E & F & F & 0\\ F & E & F & 0\\ F & F & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & G\end{bmatrix}\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{2.75}$$

当用式(2.74)代入上式，便得到计算应力分量的公式：

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= E\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial r}u_i+F\Sigma\frac{N_i}{r}u_i+F\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial z}w_i\\
\sigma_\theta &= F\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial r}u_i+E\Sigma\frac{N_i}{r}u_i+F\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial z}w_i\\
\sigma_z &= F\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial r}u_i+F\Sigma\frac{N_i}{r}u_i+E\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial z}w_i\\
\tau_{rz} &= G\left(\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial z}u_i+\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial r}w_i\right)
\end{aligned} \tag{2.76}$$

式中 E、F 和 G 为土的力学常数，与式(2.51)中平面应变情况下的常数相同。

单元劲度矩阵

轴对称问题条件下的单元劲度矩阵为

$$KE=2\pi\int_{r_1}^{r_3}\int_{z_1}^{z_4}B^TDBr\,dr\,dz \tag{2.77}$$

为简单起见，式中的 r 取为单元形心处的 r，即

$$r=N_1r_1+N_2r_2+N_3r_3+N_4r_4 \tag{2.78}$$

作积分变量置换，于是有

$$KE=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}2\pi rB^TDB|J|\,d\xi\,d\eta \tag{2.77a}$$

用 Gauss 求积法完成上述积分，即

$$KE=2\pi r\sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}W_PW_Q|J|B^TDB \tag{2.77b}$$

式中 GP 为每个方向的积分点数。一般取 $GP=2$ 就足够精确。有关积分点的坐标 (ξ,η) 和相应的权函数 W 从表 2.1 中取用。

单元劲度矩阵 KE 共有十六个子阵。每个子阵 k_{ij} 记为

$$(KE)_{ij}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(k_1)_{ij} &= 2\pi r\Sigma\Sigma W_PW_Q|J|\left[E\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r}+\frac{N_i}{r}\frac{N_j}{r}\right)\right.\\
&\quad\left.+F\left(\frac{N_i}{r}\frac{\partial N_j}{\partial r}+\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{N_j}{r}\right)+G\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\\
(k_2)_{ij} &= 2\pi r\Sigma\Sigma W_PW_Q|J|\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial z}+\frac{N_i}{r}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)+G\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial r}\right]
\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$(k_3)_{ij}=2\pi r\Sigma\Sigma W_P W_Q|J|\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial r}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{N_j}{r}\right)+G\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]$$

$$(k_4)_{ij}=2\pi r\Sigma\Sigma W_P W_Q|J|\left[E\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)+G\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r}\right]$$

当 $i=j$ 时，$(k_2)_{ij}=(k_3)_{ij}$。

在式 (2.79)中，$\partial N/\partial r$ 和 $\partial N/\partial z$ 应当预先由式(2.70)算出。依次用各积分点坐标代入，然后对各个积分点的贡献求和，即可计算各个劲度系数。

2.6 三维等参元

在分析核反应堆、高层房屋地基以及狭谷土坝的形变和应力时，有时需要作三维分析。把 xyz 坐标系中的土体离散成八结点或二十结点的任意六面体。它对应于局部坐标系 $\xi\eta\zeta$ 中边长为 2 的正六面体(图 2.15)。

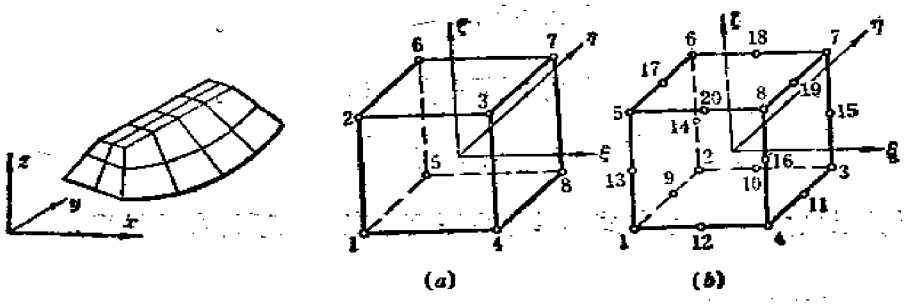


图 2.15 把土坝离散为三维单元
(a) 八结点；(b) 二十结点

具有 C^0 阶连续性的八结点单元，其结点坐标和形函数为：

$A_1(-1,-1,-1)$	$N_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8$
$A_2(-1,-1,1)$	$N_2=(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8$
$A_3(1,-1,1)$	$N_3=(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8$
$A_4(1,-1,-1)$	$N_4=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8$
$A_5(-1,1,-1)$	$N_5=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8$
$A_6(-1,1,1)$	$N_6=(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8$
$A_7(1,1,1)$	$N_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8$
$A_8(1,1,-1)$	$N_8=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8$

(2.80)

具有 C^1 阶连续性的二十结点单元，其结点坐标和形函数分别为：

$A_1(-1,-1,-1)$,	$N_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2)/8$,
$A_2(-1,1,-1)$,	$N_2=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2)/8$,
$A_3(1,1,-1)$,	$N_3=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2)/8$,
$A_4(1,-1,-1)$,	$N_4=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2)/8$,
$A_5(-1,-1,1)$,	$N_5=(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2)/8$,
$A_6(-1,1,1)$,	$N_6=(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2)/8$,
$A_7(1,1,1)$,	$N_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2)/8$,
$A_8(1,-1,1)$,	$N_8=(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2)/8$,

$$
\begin{aligned}
&A_9(-1,0,-1), && N_9=(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4,\\
&A_{10}(0,1,-1), && N_{10}=(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)/4,\\
&A_{11}(1,0,-1), && N_{11}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4,\\
&A_{12}(0,-1,-1), && N_{12}=(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)/4,\\
&A_{13}(-1,-1,0), && N_{13}=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4,\\
&A_{14}(-1,1,0), && N_{14}=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4,\\
&A_{15}(1,1,0), && N_{15}=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4,\\
&A_{16}(1,-1,0), && N_{16}=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4,\\
&A_{17}(-1,0,1), && N_{17}=(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4,\\
&A_{18}(0,1,1), && N_{18}=(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)/4,\\
&A_{19}(1,0,1), && N_{19}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4,\\
&A_{20}(0,-1,1), && N_{20}=(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)/4。
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

为了节省篇幅，只讨论八结点恒应变单元。即使如此，其单元劲度矩阵已经是 24×24 阶。若想提高精度而采用线性应变的二十结点单元，其单元劲度矩阵将是 60×60 阶。计算工作量大大增加。

单元内任一点的坐标 x, y, z 可以用结点坐标表示：

$$
\begin{Bmatrix} x\\ y\\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \{N\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T\\ \{0\}^T & \{N\}^T & \{0\}^T\\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{N\}^T \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{x\}\\ \{y\}\\ \{z\} \end{Bmatrix} \tag{2.82}
$$

单元内任一点的位移 u, v, w 与结点位移 $\{\delta\}^e$ 的关系为

$$
\{u\}=\{u\ v\ w\}^T=[IN_1\ IN_2\cdots IN_8]\{\delta\}^e
$$

应变-位移关系

应变分量

$$
\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}_{i=1,2\cdots8}\{\delta\}^e \tag{2.83}
$$

或

$$
\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{2.83a}
$$

从式(2.83)可以看出，为了建立应变-位移矩阵 $[B]$，应先求出 N 对于局部坐标的导数，然后利用 Jacob 逆阵作坐标变换，以求得形函数 N 对总坐标的导数。

根据式(2.80)，可求出 N_i 对于局部坐标的导数。例如

$$
\frac{\partial N_1}{\partial \xi}=\frac{1}{8}(\eta-1)(1-\zeta)
$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}=\frac{1}{8}(\xi-1)(1-\zeta) \tag{2.84}$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta}=\frac{1}{8}(\xi-1)(1-\eta)$$

形函数对于局部坐标和总坐标的导数通过Jacob 矩阵建立联系

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}[N]^T=[J]\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}[N]^T \tag{2.85}$$

式中 Jacob 矩阵$[J]$为

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & & \frac{\partial N_8}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ & \vdots & \\ x_8 & y_8 & z_8\end{bmatrix} \tag{2.86}$$

虽然式(2.86)右端第一个矩阵不随单元位置的改变而改变，但每个单元的结点坐标均不相同，故对每个单元均需形成不同的 Jacob 矩阵。

对式(2.86)求逆，即可得到形函数对总坐标的导数

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}[N]^T=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}[N]^T \tag{2.87}$$

式中 Jacob 逆阵$[J]^{-1}$为

$$[J]^{-1}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \zeta}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{2.88}$$

把式(2.88)矩阵中的各项除以行列式的值$|J|$以后，记 Jacob 逆阵为

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix}JI_{11} & JI_{12} & JI_{13}\\ JI_{21} & JI_{22} & JI_{23}\\ JI_{31} & JI_{32} & JI_{33}\end{bmatrix} \tag{2.89}$$

于是有

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=JI_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{13}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$$
$$\frac{\partial N_i}{\partial y}=JI_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{23}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z}=JI_{31}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{32}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{33}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$$

在建立单元劲度矩阵、单元质量矩阵或单元渗流矩阵时，都要利用上式。

最后，应变-位移矩阵 $B_i(\xi,\eta,\zeta)$ 成为

$$[B]_i=\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \\ B_{41} & B_{42} & 0 \\ 0 & B_{52} & B_{53} \\ B_{61} & 0 & B_{63} \end{bmatrix}_{i,(i=1,2-8)} \tag{2.91}$$

式中

$$\begin{aligned} B_{11}&=JI_{11}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{13}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\\ B_{22}&=JI_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{23}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\\ B_{33}&=JI_{31}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+JI_{32}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}+JI_{33}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\\ B_{42}&=B_{63}=B_{11}\\ B_{41}&=B_{53}=B_{22}\\ B_{52}&=B_{61}=B_{33} \end{aligned}$$

应力-位移关系

当把土体当作均匀的、各向同性的弹性体时，应力应变关系用广义 Hooke 定律来表示：

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{2.92}$$

而应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_x&=E\Sigma B_{11}u_i+F\Sigma B_{22}v_i+F\Sigma B_{33}w_i\\ \sigma_y&=F\Sigma B_{11}u_i+E\Sigma B_{22}v_i+F\Sigma B_{33}w_i\\ \sigma_z&=F\Sigma B_{11}u_i+F\Sigma B_{22}v_i+E\Sigma B_{33}w_i\\ \tau_{xy}&=G[\Sigma(B_{22}u_i+B_{11}v_i)]\\ \tau_{yz}&=G[\Sigma(B_{33}v_i+B_{22}w_i)]\\ \tau_{zx}&=G[\Sigma(B_{11}w_i+B_{33}u_i)] \end{aligned} \tag{2.93}$$

在三维等参元中，计算应力的工作量很大。为了节省运算时间，可以在 $B_i(\xi,\eta,\zeta)$ 中以 $\xi=\eta=\zeta=0$ 代入，即只计算等参元中心处的应力分量，接着由下式求主应力：

$$s^3-As^2+Bs-C=0 \tag{2.94}$$

式中

$$\begin{aligned} A&=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\\ B&=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2\\ C&=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

依次将算出的三个根，即 σ_1，σ_2 和 σ_3 代入下式中的 s：

$$\begin{aligned} (s-\sigma_x)l-\tau_{xy}m-\tau_{zx}n&=0\\ -\tau_{xy}l+(s-\sigma_y)m-\tau_{yz}n&=0\\ -\tau_{zx}l-\tau_{xy}m+(s-\sigma_z)n&=0 \end{aligned} \tag{2.95}$$

于是依次得到三个主应力的方向余弦：

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \tag{2.96}$$

其中有

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{2.97}$$

最大剪应力 $\tau_{max}=(\sigma_1-\sigma_3)/2$ 则作用在平分 σ_1 和 σ_3 的那个平面上。

单元劲度矩阵

根据能量原理可以建立六面体单元的劲度矩阵

$$\begin{aligned} KE &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^TDB|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \\ &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} W_PW_QW_R|J|(B^TDB) \end{aligned} \tag{2.98}$$

等参六面体单元有八个结点，每个结点有三个自由度。因此，单元劲度矩阵由 64 个 3×3 阶的子阵所组成。记子阵 k_{ij} 为如下的形式：

$$k_{ij}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

当 $i=j$ 时，由于对称性，只需求出 k_1、k_2、k_3、k_5、k_6 和 k_9 等六个；而当 $i\neq j$ 时，则应求出全部九个劲度系数。

为了使劲度系数的表达式不致过于烦琐，应当先根据式(2.90) 求出位移函数对于总坐标的偏导数。同时把三个权系数 W_P、W_Q、W_R 与行列式的值 $|J|$ 的乘积用 C_{PQR} 表示，于是有

$$\begin{aligned}
(k_1)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[E\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right] \\
(k_2)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right] \\
(k_3)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right] \\
(k_4)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\right] \\
(k_5)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[E\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right] \\
(k_6)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\right] \\
(k_7)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right] \\
(k_8)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[F\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right] \\
(k_9)_{ij} &= \sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} C_{PQR}\left[E\left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.100}$$

式中 GP 为每个方向的 Gauss 积分点个数，取 $GP=2$ 或 3 已足够精确；积分点的坐标和相应的权系数仍然从表 2.1 中采用。Jacob 行列式的值 $|J|$ 为局部坐标的有理分函数，用积分点的局部坐标代入，就可以求得各个劲度系数的值。E、F 和 G 为土的参数，由式 (2.51) 算

得。

单元荷载列阵

单元荷载一般由体力或面力所引起。

土体自重、渗流力和惯性力等都是体力。设单位体积的体力分量$\{\rho\}$为

$$\{\rho\}=\{\rho_x\rho_y\rho_z\}^T \tag{2.101}$$

由 Galerkin 原理可以求得静力等效的单元结点荷载

$$\{P\}^e=\int_V [N]^T\{\rho\}dV=\sum_{P=1}^{GP}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} W_P W_Q W_R|J|[N]^T\{\rho\} \tag{2.102}$$

假使在三维等参元的一个面上(例如$\xi=1$)受有土压力、水压力或其它面力$\{q\}$

$$\{q\}=\{q_x\ q_y\ q_z\}^T \tag{2.103}$$

则可以用 Galerkin 原理求得单元结点荷载

$$\{P\}^e=\int_A [N]^T\{q\}dxdy \tag{2.104}$$

由高等数学，对积分变量作置换，于是有

$$dxdy=\sqrt{EG-F^2}d\eta d\zeta \tag{2.105}$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$$

于是有

$$\{P\}^e=\{q\}\sum_{Q=1}^{GP}\sum_{R=1}^{GP} W_Q W_R[N]^T\sqrt{EG-F^2} \tag{2.106}$$

2.7 无界元

在半无限地基的有限元分析中，困难在于如何确定边界的位置。处理不当就会歪曲了整个位移场和应力场。假使在荷载附近仍然用有限元离散，而在距荷载较远处引入无界元，如图2.16中分别用实线和虚线所示，则既能满足精度要求，又能节省机时，并符合无穷远处位移为零的边界条件。上述优点对三维有限元尤为突出。

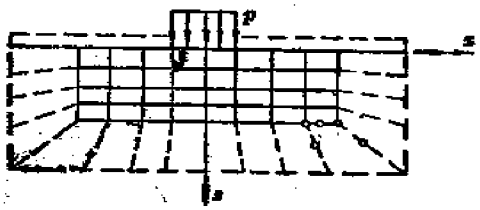


图 2.16 无界元

在建立无界元的劲度矩阵时，重要问题在于选择合适的形函数和位移函数。对于形函数，应当使局部坐标$\zeta\to 1$时，整体坐标趋向无穷大，使计算范围延伸到无穷远；在位移函数中，当$\zeta\to 1$时，位移应能趋近于零。

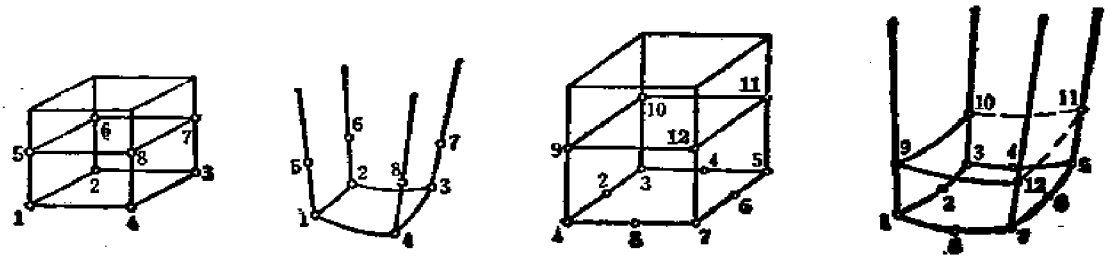
八结点和十二结点无界元(图 2.17)可以和八结点或二十结点等参元配合使用。

三维十二结点无界元中任一点的坐标为

$$x=\sum_{i=1}^{12}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i$$

$$y=\sum_{i=1}^{12}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i \tag{2.107}$$

$$z=\sum_{i=1}^{12}N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i$$



(a) (b)

图 2.17 八结点无界元(a);十二结点无界元(b)

形函数 N_i 如下

当 $\zeta\leqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}
&N_i=-(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\zeta(\xi_i\xi+\eta_i\eta-\zeta-2)/4,\quad i=1,3,5,7\\
&N_i=(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\zeta^2)/4,\quad i=9\sim12\\
&N_i=-(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)\zeta/2,\qquad i=2,6\\
&N_i=-(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)\zeta/2,\qquad i=4,8
\end{aligned}\tag{2.108}$$

当 $\zeta>0$ 时

$$\begin{aligned}
&N_i=-\zeta(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)/(4-4\zeta),\quad i=1,3,5,7\\
&N_i=-(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)/(4-4\zeta),\quad i=9\sim12\\
&N_i=0,\ i=2,4,6,8
\end{aligned}\tag{2.109}$$

无界元中任一点的位移分量 u, v, w 可用结点位移表示:

$$u=\sum_{i=1}^{12}M_iu_i,\quad v=\sum_{i=1}^{12}M_iv_i,\quad w=\sum_{i=1}^{12}M_iw_i\tag{2.110}$$

式中位移函数 M_i 取为

$$M_i=M_i^0f(r_i/r)\tag{2.111}$$

式中 M_i^0 为 $\zeta\leqslant 0$ 时的 N_i 表达式,即式(2.108);$f(r_i/r)$ 取为 (r_i/r) 或 $(r_i/r)^2$,称为衰减函数。当 $r\to\infty$ 时,能保证该处 u、v 和 w 等位移分量趋近于零的条件。

如果将总坐标系原点选作衰减中心,则 r_i 为结点 i 的衰减半径,而 r 为计算点 (x,y,z) 到衰减中心的距离,并分别由下式求出:

$$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2\tag{2.112a}$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\tag{2.112b}$$

因为无界元的形函数 N_i 与位移函数 M_i 不同,所以它不是等参元。然而,由于 M_i^0 是局部坐标的函数,在求 M_i 对总坐标的导数时,也必须通过 Jacob 矩阵作坐标变换。

无界元的应变矩阵

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\}^T=[B]\{\delta\}^e\tag{2.113}$$

以 $\varepsilon_x=\partial u/\partial x$ 为例,计算位移函数 M_i 对总坐标的偏导数,如

$$\frac{\partial M_i}{\partial x}=\frac{\partial M_i^0}{\partial x}f\left(\frac{r_i}{r}\right)+M_i^0\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial x}(r_i/r)^2-N_i\left(\frac{2r_i^2}{r^3}\right)\frac{x}{r}\tag{2.114}$$

等等。其中形函数 N_i 对总坐标的导数由下式得出

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{2.115}$$

无界元的劲度矩阵

$$KE = \sum_{P=1}^{GP} \sum_{Q=1}^{GP} \sum_{R=1}^{GP} W_P W_Q W_R |J| B^T D B \tag{2.116}$$

由于无界元多布置在计算域的外围，因此应力-应变关系 $[D]$ 可以采用线性弹性理论，而不必作非线性分析。把各单元的劲度矩阵集合成总劲度矩阵并建立总荷载列阵以后，便可求出位移场。然后用下式计算应力分量

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e \tag{2.117}$$

无限元子程序

1. 子程序 ATTEN(KA, KGASP)

【功能】 计算无界元位移函数的导数

【标识符】 KA 为衰减函数的幂次；KGASP 为一排积分点的序号；RIS 为 r_i^2；RS 为 r^2；RD 是 r 的偏导数；XXD 是工作单元；ATTE 存放衰减函数；ATTED 存放衰减函数的导数；DERIV 用以存放形函数的导数；DERIE 用以存放位移函数对局部坐标的导数；DISIF 用以存放 N_i；DERIG 用以存放位移函数对于总坐标的导数。

【说明】 循环语句31用以求衰减函数 r_i/r 的导数并存放在 ATTED 中；循环语句33则用以存贮衰减函数 $(r_i/r)^2$ 及其导数。位移函数对于局部坐标的导数 DERIE 乘以 Jacob 逆阵 XJACT 以后便得到位移函数对于总坐标的导数，并存放在 DERIG 中。

2. 子程序 STIFPS

【功能】 建立无界元劲度矩阵，存放在数组 ESTIF 中。

【标识符】 NEVAB 为单元劲度阶数；ELOOD 为单元结点坐标；NGAUS 为一排积分点个数；GPOOD 为积分点坐标。

【说明】

1. 调用子程序 MODPS，建立弹性矩阵 [D]；
2. 调用子程序 SFR3，形成位移函数的偏导数(略)；
3. 调用子程序 JACOB3 形成三维 JACOB 矩阵、行列式及其逆阵；
4. 将三个权系数与行列式的乘积赋值给简变 COEF；
5. 调用子程序 ATTEN，形成无界元位移函数及其导数；
6. 调用子程序 BMATPS，形成[B]^T；
7. 调用子程序 DBE，完成[D][B]的乘积；于是得 KE = ΣΣΣCOEF[B]^T[D][B]
8. 求应力矩阵 SMATX
9. 打印积分点坐标 GPOOD 和高斯点应力 SMATX。

```
      SUBROUTINE ATTEN(KA,KGASP)
c
c     DERIVATIVE OF DISPLACEMENT
c     FUNCTION FOR INFINITE ELEM
c
      DO 10 I=1,NNODE
      RIS(I)=0.0
      DO 11 J=1,NDIME
11    RIS(I)=RIS(I)+ELCOD(J,I)**2
10    RI(I)=SQRT(RIS(I))
      RS=GPCOD(1,KGASP)*GPCOD(1,KGASP)
     1  +GPCOD(2,KGASP)*GPCOD(2,KGASP)
     1  +GPCOD(3,KGASP)*GPCOD(3,KGASP)
      R=SQRT(RS)
      DO 21 I=1,NDIME
      RD(I)=0.0
      DO 22 J=1,NDIME
      XXD(I,J)=0.0
      DO 23 K=1,NNODE
23    XXD(I,J)=XXD(I,J)+DERIV(I,K)
     1*ELCOD(J,K)
22    RD(I)=RD(I)+GPCOD(J,KGASP)*XXD(I,J)
21    RD(I)=RD(I)/R
      IF (KA.EQ.2) GOTO 32
      DO 31 I=1,NNODE
      ATTE(I)=RI(I)/R
31    ATTED(I)=-RI(I)/RS
      GOTO 41
32    DO 33 I=1,NNODE
      ATTE(I)=RIS(I)/RS
33    ATTED(I)=-2.0*RIS(I)/RS/R
41    DO 42 I=1,NNODE
      DO 42 J=1,NDIME
42    DERIF(J,I)=DERIF(J,I)*ATTE(I)
     1 +ATTED(I)*RD(J)*DISIF(I)
      DO 51 I=1,NDIME
      DO 51 J=1,NNODE
      DERIG(I,J)=0.0
      DO 51 K=1,NDIME
51    DERIG(I,J)=DERIG(I,J)
     1 +XJACT(I,K)*DERIF(K,J)
      WRITE(KP,900)R,RI,ATTE
900   FORMAT(5X,'R=',F10.3,5X,'RI=',
     1 12F10.3,/5X,'ATTE=',12F10.4)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE STIFPS
c
c     STIFFNESS MATRIX FOR
c     INFINITE ELEMENT
c
      DO 70 IELEM=1,NELEM
      NOELEM=IELEM
      MTYPE=NRTYP(IELEM)
      LPROP=MATNO(IELEM)
      DO 10 INODE=1,NNODE
      LNODE=LNODS(INODE,IELEM)
      IF(LNODE.EQ.0) GOTO 10
      DO 5 IDIME=1,NDIME
5     ELCOD(IDIME,INODE)=
     1 COORD(IDIME,LNODE)
10    CONTINUE
      CALL MODPS(LPROP)
18    DO 20 IEVAB=1,NEVAB
      DO 20 JEVAB=1,NEVAB
20    ESTIF(IEVAB,JEVAB)=0.0
      KGASP=0
      DO 50 IGAUS=1,NGAUS
      DO 50 JGAUS=1,NGAUS
      DO 50 KGAUS=1,NGAUS
      KGASP=KGASP+1
      EXISP=POSGP(IGAUS)
      ETASP=POSGP(JGAUS)
      EZTSP=POSGP(KGAUS)
      CALL SFR3(EXISP,ETASP,EZTSP)
      CALL JACOB3(IELEM,DJACB,KGASP)
      COEF=DJACB*WEIGP(IGAUS)*
     1 WEIGP(JGAUS)*WEIGP(KGAUS)
      IF(MTYPE.GE.4)
     1 CALL ATTEN(KATTE,KGASP,1)
      CALL BMATPS
      CALL DBE
      DO 30 IEVAB=1,NEVAB
      DO 30 JEVAB=IEVAB,NEVAB
      DO 30 ISTRE=1,NSTRE
30    ESTIF(IEVAB,JEVAB)=ESTIF
     1 (IEVAB,JEVAB)+BMATX(ISTRE,IEVAB)
     1 *DBMAT(ISTRE,JEVAB)*COEF
      DO 40 ISTRE=1,NSTRE
      DO 40 IEVAB=1,NEVAB
40    SMATX(ISTRE,IEVAB,KGASP)=
     1 DBMAT(ISTRE,IEVAB)
50    CONTINUE
      DO 60 IEVAB=1,NEVAB
      DO 60 JEVAB=IEVAB,NEVAB
60    ESTIF(JEVAB,IEVAB)=
     1 ESTIF(IEVAB,JEVAB)
      WRITE(8) ESTIF,SMATX,GPCOD
70    CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.8 边界元

将土体计算域的边界离散为许多长度为ds的边界元。一个单元只有一个位于中心的结点$Q(x, z)$，而$P(x_0, z_0)$则称为源点(图 2.18)。

P点在j方向的位移$u_j(P)$与边界上任一点Q在i方向上的位移$u_i(Q)$和应力$p_i(Q)$之间的关系为

$$u_j(P)=\int_s u_{ji}(P,Q)\,p_i(Q)\,\mathrm{d}s-\int_s P_{ji}(P,Q)u_i(Q)\mathrm{d}s \tag{2.118}$$

式中 u_{ji} 为位移基本解，表示沿 Q 点 i 方向有单位力作用时，在 P 点 j 方向所产生的位移；而 P_{ji} 为应力基本解，表示沿 Q 点 i 方向产生单位位移时，在 P 点 j 方向所产生的力。这两个基本解见弹性理论教程。式(2.118)表示，可以根据 Q 点在 i 方向的位移 $u_i(Q)$ 以及 Q 点在 i 方向上的应力 $p_i(Q)$ 来计算 P 点在 j 方向的位移 $u_j(P)$。

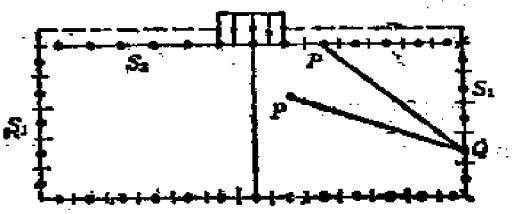


图 2.18 边界元

把 P 点从域中移到边界 s 上，于是把式(2.118)改写成

$$C_{ij}(P)u_j(P)=\int_s u_{ji}(P,Q)\,p_i(Q)\mathrm{d}s-\int_s P_{ji}(P,Q)u_i(Q)\mathrm{d}s \tag{2.119}$$

式中 C_{ij} 是与边界特性和粗糙程度有关的系数。

把式(2.119)写成矩阵的形式

$$[C]\{u_i\}=[u_{ji}]\{P_i\}-[P_{ji}]\{u_i\} \tag{2.120}$$

式中[C]是对角矩阵，由于采用了一个单元只有一个结点的边界元，且当边界光滑时，[C]中的系数 C_{ii} 全等于 1/2。$[u_{ji}]$为位移基本解矩阵，而$[P_{ji}]$为应力基本解矩阵。

把$[C]+[P_{ji}]$记为$[H]$矩阵，记$[u_{ji}]$为$[G]$矩阵，于是有

$$[H]\{u\}=[G]\{p\} \tag{2.121}$$

引入已知的位移和应力条件(在图 2.18 中的边界 S_1 上，一些位移分量为已知，而在边界S_2上应力为已知)以及一定的约束条件，即可求得未知的位移和应力。

2.9 有限差分

有限差分法是一种数学上的近似。为了表示场变量的变化率，可用差分代替微分，用割线斜率代替切线斜率。下面通过两个例子来说明有限差分在岩土工程中的应用。

二维固结(图 2.19)

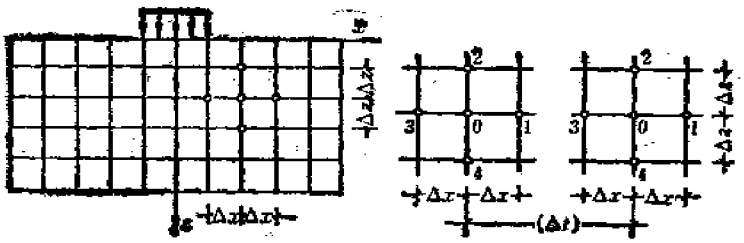


图 2.19 二维固结

用间距 $\Delta x=\Delta z=l$ 的方格网将地基的计算域分割。在二维固结方程中

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.122}$$

因为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{0,t_2}-u_{0,t_1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{l^2}(u_1-2u_0+u_3)_{t_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{l^2}(u_z-2u_0+u_4)_{t_1}$$

于是有

$$u_{0,t_2}=\left(1-\frac{4\Delta t c_v}{l^2}\right)u_{0,t_1}+\frac{\Delta t c_v}{l^2}(u_1+u_2+u_3+u_4)_{t_1} \tag{2.123}$$

式(2.123)表示可以用 t_1 时刻在 0 点及其邻近各点的孔隙水压力 u 来推算 t_2 时刻 0 点的孔隙水压力。

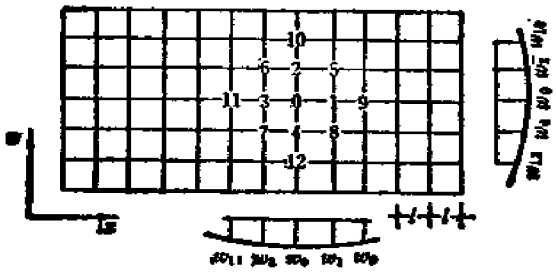
进一步的二维固结有限差分解法见第六章。

基础板的挠曲(图 2.20)

将基础板用 $\Delta x=\Delta y=l$ 的方格网离散。板的挠曲平衡微分方程为

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,y)-p(x,y) \tag{2.124}$$

式中 $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$，$w(x,y)$ 为基础板某点的挠度，$q(x,y)$ 为分布荷载，$p(x,y)$ 为分布反力，h 为基础厚度。



■ 2.20 基础板的挠曲

为基础板中某个结点 0 建立式 (2.124) 的有限差分形式。设 0 点的反力 $p_0=kw_0$。又因为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{1}{l^4}(w_9-4w_1+6w_0-4w_3+w_{11})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{l^4}(w_{10}-4w_2+6w_0-4w_4+w_{12})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{1}{l^4}[4w_0-2(w_1+w_2+w_3+w_4)+w_5+w_6+w_7+w_8]$$

将以上各式代入式(2.124)，于是有

$$\begin{aligned}&20w_0-8(w_1+w_2+w_3+w_4)+2(w_5+w_6+w_7+w_8)+(w_9+w_{10}+w_{11}+w_{12})\\&=(4ql^4/D)-(4kw_0l^4/D)\end{aligned} \tag{2.125}$$

考虑基础板四周为自由边的边界条件，结合式(2.125)，可以为基础板上 n 个结点建立 n 个方程组，从而解出全部结点的挠度 w，并计算基础板的弯矩、扭矩和剪力分布。

弯矩

$$(M_x)_0=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=\frac{-D}{l^2}[(w_1+w_3)-(2+2\nu)w_0+\nu(w_2+w_4)] \tag{2.126}$$

$$(M_y)_0=-D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=\frac{-D}{l^2}[\nu(w_1+w_3)-(2+2\nu)w_0+(w_2+w_4)] \tag{2.127}$$

扭矩

$$(M_{xy})_0=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{-D}{4l^2}(w_5-w_6+w_7-w_8) \tag{2.128}$$

剪力

$$\begin{aligned}(V_x)_0&=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]\\&=\frac{-D}{2l^3}[(2\nu-6)(w_1-w_3)+(2-\nu)(w_5-w_6-w_7+w_8)+(w_9-w_{11})]\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$(V_y)_0=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]$$

$$= \frac{-D}{2l^3}[(2\nu-6)(w_2-w_4)+(2-\nu)(w_5+w_6-w_7-w_8)+(w_{10}-w_{11})] \quad (2.130)$$

参 考 文 献

1. 徐芝伦等，弹性力学中的有限单元法，水利出版社，1986。
2. 监凯维奇，有限元法，上下册，尹泽勇等译，科学出版社，1985。
3. 潘家铮，地下结构中的有限元法，岩土工程学报，1980年第4期。
4. 潘昌实，黄土隧道有限元分析，土木工程学报，1981年第4期。
5. 王家环，电排站地基三维应力分析，岩土工程学报，1984年第4期。
6. 葛修润等，三维无界元和节理无界元，岩土工程学报，1986年第5期，p.9-20。
7. 钱群，用边界元和有限元的耦合分析结构物-土相互作用，同济大学硕士研究生论文，1987。

第三章　土的本构模型

3.1　概述

自从1963年Roscoe提出著名的剑桥模型以来，提议的各种本构模型已多得难以统计。但是，广泛地被应用于实际岩土工程计算的仍只有为数不多的几个。本章只介绍少数几个比较实用的模型，但为了全面起见，对某些影响比较大的代表性模型也作简要介绍。全面的评述可参见文献[1]。土的本构模型应当包括土骨架的应力应变模型和骨架中孔隙流体的运动模型，本章只介绍前者，后者将在渗流分析的章节中附带说明。

土骨架的应力应变模型可分为非线性弹性模型和弹塑性模型两大类。后者把应变增量区分为弹性部分和塑性部分，各自按不同的规则计算；前者则对应变增量整体按一种规则计算，但为了在卸荷时得到残余变形，所以对加荷和卸荷分别按不同规则计算。

非线性弹性模型是弹性理论中广义虎克定律的推广，按推广中采用的基本假设的不同，又可区分为变弹性模型、次弹性模型和超弹性模型三类。

变弹性模型直接把虎克定律写成增量型，认为弹性系数或弹性模量是变量，并且一般假定它们只是应力状态的函数，与应力路径无关，即

$$\{\Delta\varepsilon\} = [C(\sigma)]\{\Delta\sigma\} \tag{3.1}$$

$[C(\sigma)]$为土的柔度矩阵，一般假定是应力不变量的函数。对各向同性材料，矩阵$[C]$中包含两个参数：杨氏模量与泊松比或体积模量与剪切模量。为了在变弹性范围内考虑土的剪胀-剪缩特性，有人建议了三参数的模型[2]，即把上式改为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [C(\sigma)]\{d\sigma\} + [C_d(\sigma)]\{d\sigma\} \tag{3.2}$$

矩阵$[C_d(\sigma)]$中包含一个剪胀系数。如果假定上述参数随应力路径而变[3]，此类模型也可在一定程度上考虑应力路径的影响。

次弹性模型是变弹性模型的推广，即把矩阵$[C(\sigma)]$写成应力状态的多项式函数，例如：

$$[C(\sigma)] = [C_0]\{\delta\}\{\sigma\} + [C_1]\{\delta\}\{\sigma\} + [C_2]\{\delta\}\{\sigma\} + \cdots \tag{3.3}$$

式中　$[C_0]$，$[C_1]$，$[C_2]$…为常量。

超弹性模型是弹性理论中应变总量与应力总量之间存在唯一性的假设的推广，并由此推导出增量型应力应变关系，即

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}) \tag{3.4}$$

从而

$$\{\Delta\varepsilon\} = \frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}}\{\Delta\sigma\} \tag{3.5}$$

另一类超弹性模型则从弹性理论中应变能与应力总量之间存在唯一性的假设出发推导增量型应力应变关系，即

$$W = f(\{\sigma\}) \tag{3.6}$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial W}{\partial\{\sigma\}} \tag{3.7}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = \frac{\partial^2 W}{\partial\{\sigma\}\partial\{\sigma\}}\{\Delta\sigma\} \tag{3.8}$$

前一类模型称 Cauchy 型超弹性模型，后一类模型称 Green 型超弹性模型。

弹塑性模型把应变增量分成弹性部分和塑性部分。

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon\}^e + \{\Delta\varepsilon\}^p \tag{3.9}$$

前者按虎克定律计算，后者一般写成下列形式：

$$\{\Delta\varepsilon\}^p = \Delta\lambda\{n\} \tag{3.10}$$

式中 $\Delta\lambda$ 代表塑性应变增量的大小，$\{n\}$ 代表其方向，计算前者的规则称硬化规律，计算后者的规则称流动法则。

塑性应变的大小一般通过屈服面的概念推算，也有不通过屈服面的，即所谓无屈服面模型。有屈服面模型假定：应力空间中存在由屈服面包围的、只产生弹性应变的区域，并通过屈服面 $f(\sigma)$ 的变化推算 $\Delta\lambda$，即

$$\Delta\lambda = A\left\{\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\right\}^T\{\Delta\sigma\} \tag{3.11}$$

系数 A 可称为塑性系数，表示屈服面增加一个单位所产生的塑性应变。

许多弹塑性模型往往通过某一所谓的硬化参数 h 表征屈服面的大小，即写成：

$$F = f(\sigma) - g(h) = 0 \tag{3.12}$$

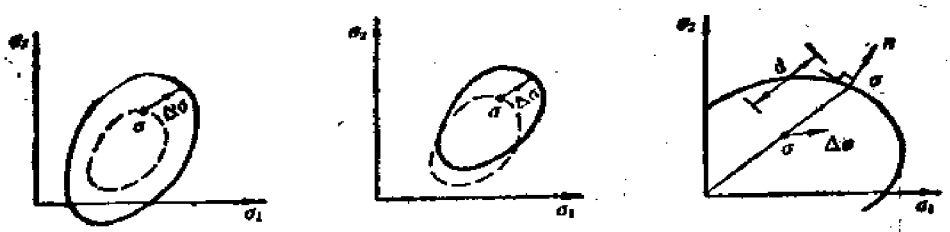


图3.1 弹塑性模型

h 一般用塑性应变的某一不变量或塑性功表示，式(3.11)中的塑性系数 A 可以通过 h 表示，从而把塑性系数与应力路线无关的假设改换成硬化参数与应力路线无关的假设。进一步假定塑性应变方向与应力路线无关，故可视 $\{n\}$ 为垂直某一等势面 Q 的单位矢量，即

$$\{n\} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\} \Big/ \sqrt{\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}^T\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}} \tag{3.13}$$

分母代表矢量的模。当选用的函数 Q 与 F 相同时，称相关联的流动法则，否则称非关联流动法则。

屈服面可以由单一的光滑曲面组成，也可以假定由几段平面或曲面组合而成，组合屈服面的交界线上有两个屈服面通过，此时式(3.10)应改为

$$\{\Delta\varepsilon\}^p = \Delta\lambda_1\{n_1\} + \Delta\lambda_2\{n_2\} \tag{3.14}$$

在此基础上发展的多重屈服面理论进一步假定塑性应变可以分成几部分，相应每一部分有一个屈服面，即把上式改为：

$$\{\Delta\varepsilon\}^p = \sum_{i=1}^{l}\Delta\lambda_i\{n_i\} \tag{3.15}$$

l 为屈服面重数。

屈服面的变化规律一般假定随塑性应变的增大而扩大或移动，但不会转动或变形。屈

服面的单纯扩大称等向硬化(图 3.1a)，单纯移动称运动(随动)硬化 (图 3.1b)。等向硬化理论假定：屈服面扩大以后应力点在屈服面内变动时不再产生塑性应变，从而不能模拟卸荷-再加荷过程中应力应变曲线中出现滞回圈的现象 (详见后面 图 3.8)。单屈服面的运动硬化模型可以算出滞回圈，但与实际情况仍不相符，因此近年来又发展了套叠式的两个或多个屈服面模型，把外面的一个大屈服面叫做边界面，只会扩大，不会移动，内部一个则是运动硬化型屈服面，因此它是等向硬化和运动硬化理论的结合。内屈服面缩小成一点是这类模型的特殊情况，这时的塑性应变可以按下式计算：

$$\{\Delta\varepsilon\}^p=\frac{1}{M_p}\{\Delta\sigma\}\{\bar{n}\} \tag{3.16}$$

塑性模量 M_p 为实际应力 $\{\sigma\}$ 与边界面上投影点应力 $\{\bar{\sigma}\}$ 之间距离 d 的函数(图 3.1c)，$d=0$时，$\frac{1}{M_p}$应与式(3.11)的 A 一致。

无屈服面弹塑性理论通过另外途径推算塑性应变大小，如内时理论通过偏应变增量的模 $\Delta\xi$，按下式推算。

$$\Delta\lambda=F(\{\varepsilon\},\{\sigma\})\Delta\xi \tag{3.17}$$

$\Delta\xi=\left(\frac{1}{2}\{\Delta e\}\{\Delta e\}\right)^{1/2}$称为内时量度，乘上某一函数 F 后得出决定塑性应变大小的量 $\Delta\lambda$，并被称为内时标度。在有屈服面的弹塑性理论中，加荷函数与屈服函数是统一的，无屈服面型理论放弃了屈服函数，但为了判别加荷-卸荷，还需规定一个加荷方向 $\{n_l\}$，当应力增量 $\{\Delta\sigma\}$ 与 $\{n_l\}$ 夹角小于 90° 时判为加荷；大于或等于 90° 时判为卸荷或中性加荷 ($\Delta\lambda=0$)。各种各样的塑性理论无非是用不同的方法确定 $\{n\}$、$\{n_l\}$ 和 $\Delta\lambda$ 三个量，这就是 Zienkiewicz 提出的一般塑性理论的概念[4]。

3.2 静力分析模型

本节讨论适用于单调加荷和局部发生一次卸荷情况的几个比较实用的模型。

3.2.1 变弹性模型

变弹性模型的应力应变关系可以写成下列增量型关系

$$\{\Delta\sigma\}=[D]_t\{\Delta\varepsilon\} \tag{3.18}$$

$[D]_t$称为切线模量矩阵，一般可写为

$$[D]_t=\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ d_2 & d_1 & & & \text{对称} & \\ d_2 & d_2 & d_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

各向同性材料的弹性常数只有两个。上述矩阵中三个参数 d_1、d_2 和 d_3 之间有下列关系：

$$d_3=\frac{1}{2}(d_1-d_2) \tag{3.20}$$

不同的作者提出了不同的参数表达方法和测定方法，下面介绍其中的两个。

(1) Duncan-张金荣模型

在三轴试验条件下，$\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_a$，$\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\Delta\sigma_r$，$\Delta\varepsilon_1=\Delta\varepsilon_a$，$\Delta\varepsilon_2=\Delta\varepsilon_3=\Delta\varepsilon_r$，其中足标 a 代表轴向，r 代表径向，定义

$$E_t=\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_a}$$

$$\nu_t=-\frac{\Delta\varepsilon_r}{\Delta\varepsilon_a} \tag{3.21}$$

代入式(3.18)后可得

$$d_1=\frac{E_t(1-\nu_t)}{(1+\nu_t)(1-2\nu_t)} \tag{3.22}$$

$$d_2=\frac{E_t\nu_t}{(1+\nu_t)(1-2\nu_t)} \tag{3.23}$$

E_t 和 ν_t 可沿用弹性理论的习惯称为切线杨氏模量和泊松比。

Duncan 和张建议用下列双曲函数拟合三轴试验应力应变曲线(图 3.2)[5]。

$$\sigma_a-\sigma_r=\frac{\varepsilon_a}{\dfrac{1}{E_i}+\dfrac{R_f\varepsilon_a}{(\sigma_a-\sigma_r)_f}} \tag{3.24}$$

$$\varepsilon_a=\frac{-\varepsilon_r}{\nu_i+D\varepsilon_r} \tag{3.25}$$

由于 $\sigma_r=$const，再假定参数 E_i、ν_i 等只与 σ_r 有关，对上述两式按(3.21)的定义求导后可得：

$$E_t=E_i(1-R_fD_s)^2 \tag{3.26}$$

$$\nu_t=\frac{\nu_i}{\left[1-D\dfrac{\sigma_a-\sigma_r}{E_i(1-R_fD_s)}\right]^2} \tag{3.27}$$

其中

$$D_s=\frac{\sigma_a-\sigma_r}{(\sigma_a-\sigma_r)_f} \tag{3.28}$$

常称为应力水平，$(\sigma_a-\sigma_r)_f$ 可用 Mohr-Coulomb 准则计算，即

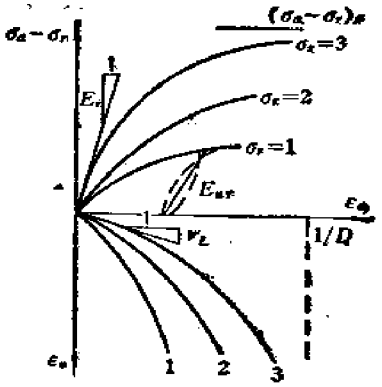


图 3.2 Duncan 模型

$$(\sigma_a-\sigma_r)_f=2\frac{c\cos\phi+\sigma_r\sin\phi}{1-\sin\phi} \tag{3.29}$$

E_t 和 ν_t 则用下列幂函数和对数函数表示

$$E_i=Kp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \tag{3.30}$$

$$\nu_t=G-F\lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \tag{3.31}$$

c、ϕ、R_f、K、n、D、G 和 F 为 8 个计算常数，可以由常规三轴试验测定。

以后，Duncan 等人又建议用下列切线体积模量代替式(3.21)中的 ν_t[6]。

$$B_t=\frac{1}{3}\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_v} \tag{3.32}$$

因为三轴试验中平均应力的增加为 $\Delta\sigma_m=\frac{1}{3}\Delta\sigma_a$，体积应变 $\Delta\varepsilon_v=\Delta\varepsilon_a+2\Delta\varepsilon_r$，由式(3.18)可解出：

$$d_1=\frac{3B_t(3B_t+E_t)}{9B_t-E_t} \tag{3.33}$$

$$d_2=\frac{3B_t(3B_t-E_t)}{9B_t-E_t} \tag{3.34}$$

B_t 随 δ_3 的变化规律仿照式(3.30)得出

$$B_t=K_bP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^m \tag{3.35}$$

此外，考虑到粗粒料的莫尔包线往往不是直线，又采用下列公式计算内摩擦角

$$\phi=\phi_1-\Delta\phi\ \lg\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right) \tag{3.36}$$

这时，式(3.35)中两个参数 K_b 和 m 将代替三个参数 G、D 和 F，ϕ_1 和 $\Delta\phi$ 将代替 c 和 ϕ。

对于卸荷-再加荷情况，此模型用下列卸荷-再加荷模量 E_{ur} 代替式(3.26)的 E_t。

$$E_{ur}=K_{ur}P_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n \tag{3.37}$$

式中 K_{ur} 是另一个计算参数。

由于 Duncan 模型应用较广，对其参数的变化情况已积累了较丰富的经验，表 3.1 中列出了各类土料 Duncan 模型参数大致变化范围，可供初步计算时作参考。

加荷函数的选择是变弹性模型中的一个难题，Duncan 等人经多年探索以后，新近提议的加荷函数为[7]

$$f_1=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\sqrt[4]{\sigma_3} \tag{3.38}$$

即当 f_1 大于历史上最大值 $(f_1)_{max}$ 时，判为加荷，否则判为卸荷或再加荷。由于卸荷模量与加荷模量之差可达 2 个数量级以上，常引起迭代过程的不稳定，故具体计算中采用下列经验办法，即当 $f_1<0.75(f_1)_{max}$ 时，判为完全卸荷，而当 f_1 介于 0.75～1.0 的 $(f_1)_{max}$ 时，则计算所用的杨氏模量按下式内插

$$E=E_t+(E_{ur}-E_t)\frac{1-f_1/(f_1)_{max}}{1-0.75} \tag{3.39}$$

表 3.1 Duncan 模型和南水双屈服面模型参数

	土类	软粘土	硬粘土	砂	砂卵石	石料
共用参数	$C(p_a)$	0～0.1	0.1～0.5	0	0	0
	ϕ	20°～30°	20°～30°	30°～40°	30°～40°	40°～50°
	$\Delta\phi$	0	0	5°	5°	10°
	R_f	0.7～0.9	0.7～0.9	0.6～0.85	0.65～0.85	0.6～1.0
	K	50～200	200～500	300～1000	500～2000	300～1000
	K_{ur}	3.0 K	1.5～2.0 K			
	n	0.5～0.8	0.3～0.6	0.3～0.6	0.4～0.7	0.1～0.5
邓肯	K_b	20～100	100～500	50～1000	100～2000	50～1000
	m	0.4～0.7	0.2～0.5	0～0.5	0～0.5	−0.2～0.4
南水	C_d	0.01～0.1	0.001～0.01	0.001～0.01	0.001～0.01	0.001～0.01
	d	0.2～0.5	0.5～1.0	1～2	1～2	1～3
	R_d	0.7～0.95R_f				

应用于具体问题时，可以对上述模型作一些修改以适应实际情况。例如，为了考虑软粘土的 K_0 固结的初始应力条件，龚晓南建议 E_t 根据三轴压缩和伸长试验的结果分别由下式计算[8]

压缩时
$$E_{t0}=\frac{K_0\sigma_m}{1-[M_0+(M_0-M_0)D_0]/3}\left(1-\frac{R_{f0}-D_0}{1-D_0}D_0\right)^2 \tag{3.40a}$$

伸长时
$$E_{t0}=\frac{K_0\sigma_m}{1-[M_0+(M_0-M_0)D_0]/3}\left(1-\frac{R_{f0}+D_0}{1+D_0}D_0\right)^2 \tag{3.40b}$$

此处用平均有效应力 σ_m 代替 σ_3 计算式(3.29)和(3.30)的抗剪强度和初始切线模量，即

$$(E_t)_0=K_0\sigma_m;\ (E_t)_0=K_0\sigma_m$$
$$(\sigma_1-\sigma_3)_{f0}=M_0\sigma_m;\ (\sigma_1-\sigma_3)_{f0}=M_0\sigma_m$$

而应力水平则改为

$$D_0=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)-M_0\sigma_m}{M_0\sigma_m-M_0\sigma_m} \tag{3.41a}$$

$$D_0=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)-M_0\sigma_m}{M_0\sigma_m-M_0\sigma_m} \tag{3.41b}$$

其中 $$M_0=\frac{3(1-K_0)}{1+2K_0},\quad D_0=\frac{M_0}{M_0}。$$

下面附上一段 Duncan 模型非线性弹性矩阵的计算程序，系根据文献[7]改写。

P.3.1 Duncan 模型切线模量矩阵计算程序

【功能】 计算 Duncan 模型的 E_t、B_t 及模量矩阵元素。

【标识符】

IM——单元材料号

AF, DF, CR, RF, CKE, CKB, CN, CM, CKU——计算参数 ϕ_1, $\Delta\phi$, c, R_f, K, K_b, n, m, K_{ur}, 式(3.29)～(3.37)

PA——大气压

P_1, P_3——σ_1, σ_3

D_1, D_2, D_3——模量矩阵元素，见式(3.19)，(3.33)和(3.34)

DL——式(3.28)中 D_0

【说明】 1. σ_3 限制最小值 0.1 p_a

2. D_0 限制最大值 0.95

```
      SUBROUTINE MODED
      COMMON /C1/IM,AF(10),DF(10)
     * CR(10),RF(10),CKE(10),CKB(
     * 10),CN(10),CM(10),CKU(10)
     * /C2/PA,P1,P3,D1,D2,D3,FLM
      PE=P3/PA
      IF(PE.LT.0.1) PE=0.1
      E0=LOG(PE)
      E1=AF(IM)-DF(IM)*E0*0.4343
      E2=SIN(E1)
      SF=E2*(CR(IM)*COS(E1)+PE*E2)
     * /(1.0-E2)
      SD=(P1-P3)/2.0/PA
      DL=SD/SF
      IF(DL.GT.0.95) DL=0.95
      BT=EXP(E0*CM(IM))*CKB(IM)*PA
      EUR=E0*CKU(IM)*PA
      E0=EXP(E0*CN(IM))
      ET=E0*(1.0-DL*RF(IM))**2*CKE(
     * IM)*PA
      FL=DL*SQRT(SQRT(PE))
      SC=FL/FLM
      IF(SC.LT.0.75) ET=EUR
      IF(SC.GT.0.75.AND.SC.LT.1.0)
     * ET=ET+(EUR-ET)*(1.0-SC)/0.25
      IF(EB.LT.ET/3.0) EB=ET/2.99
      E0=3.0*EB/(9.0*EB-ET)
      D1=(3.0*EB+ET)*E0
      D2=(3.0*EB-ET)*E0
      RETURN
      END
```

(2) Naylor 模型

在等向压缩试验中 $\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\Delta\sigma_a$，$\Delta\varepsilon_1=\Delta\varepsilon_2=\Delta\varepsilon_3=\frac{1}{3}\Delta\varepsilon_v$ 定义：

$$B_t=\frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_v} \tag{3.42}$$

σ_a 为室压力。另外，在三轴压缩试验中定义

$$G_t=\frac{1}{2}\frac{\Delta\sigma_a}{2\Delta\varepsilon_a-\Delta\varepsilon_r} \tag{3.43}$$

考虑到 $\Delta\sigma_r=0$ 和 $\Delta\varepsilon_r=-\frac{d_2}{d_1+d_2}\Delta\varepsilon_a$，将它们代入式(3.18)后即得

$$\left.\begin{aligned} d_1&=B_t+\frac{4}{3}G_t\\ d_2&=B_t-\frac{2}{3}G_t \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Naylor 建议了下列 B_t 和 G_t 的表达式[9]

$$\left.\begin{aligned} B_t&=B_i+\alpha_1\sigma_m\\ G_t&=G_i+\alpha_2\sigma_m+\alpha_3(\sigma_1-\sigma_3) \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

式中 B_i，G_i、α_1、α_2 和 α_3 为5个计算常数。此模型形式上十分简单，但式(3.45)积分得出的函数无法直接拟合试验应力应变曲线[10]，因此为了求得上述参数，需要在试验曲线上量取斜率，而且对粒状土通过等向压缩试验测定体变也十分困难，因而实际应用并不方便。

3.2.2 等向硬化弹塑性模型

等向硬化理论假定变形过程中屈服面和弹性区域不断扩大，屈服面的变化规律通常用硬化参数描述。但下面将改用塑性系数的概念推导有关公式，因为后者比前者更具有普遍性。在此以双屈服面为出发点，因为单屈服面只是其中的特例。

先把式(3.9)和(3.14)写为

$$\{\Delta\varepsilon\}=[\mathrm{D}]^{-1}\{\Delta\sigma\}+A_1\{n_1\}\Delta f_1+A_2\{n_2\}\Delta f_2 \tag{3.46}$$

其中

$$\Delta f_1=\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}\{\Delta\sigma\},\quad \Delta f_2=\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}\{\Delta\sigma\} \tag{3.47}$$

由此可得

$$\{\Delta\sigma\}=[D]\{\Delta\varepsilon\}-A_1[D]\{n_1\}\Delta f_1-A_2[D]\{n_2\}\Delta f_2 \tag{3.48}$$

把式(3.48)代入式(3.47)后可解出 Δf_1 和 Δf_2 如下：

$$\Delta f_1=\frac{\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T+A_2\left(\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T-\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T\right)}{D_{et}}[D]\{\Delta\varepsilon\} \tag{3.49}$$

$$\Delta f_2=\frac{\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T+A_1\left(\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T-\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T\right)}{D_{et}}[D]\{\Delta\varepsilon\} \tag{3.50}$$

其中

$$D_{ct}=1+A_1\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}+A_2\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}$$
$$+A_1A_2\left(\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}-\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\right)$$

把它们代回到(3.48)后可得

$$\{\Delta\sigma\}=[D]_{ep}\{\Delta\varepsilon\} \tag{3.51}$$

其中

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{1}{D_{ct}}\Big\{A_1[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T+A_2[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T$$
$$+A_1A_2[D]\Big(\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T$$
$$-\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T+\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T$$
$$-\{n_2\}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n_1\}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T\Big)\Big\}[D] \tag{3.52}$$

对单屈服面，$A_2=0$，并去掉足标1，上式简化为

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{A[D]\{n\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]}{1+A\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\{n\}} \tag{3.53}$$

在下面讨论中，将把上式中的$\{n_1\}$换成$\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma}\right\}$，$\{n_2\}$换成$\left\{\frac{\partial Q_2}{\partial\sigma}\right\}$，因此塑性系数$A_1$和$A_2$将相当于

$$A_1\Big/\sqrt{\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma}\right\}^T\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma}\right\}}\text{ 和 }A_2\Big/\sqrt{\left\{\frac{\partial Q_2}{\partial\sigma}\right\}^T\left\{\frac{\partial Q_2}{\partial\sigma}\right\}}.$$

(1) 椭圆屈服面模型

椭圆屈服面最早由 Roscoe 和 Burland 提出[11]，是 Roscoe 原先提出的弹头型屈服面的修正，常称修正剑桥模型，其屈服函数为

$$F=\sigma_m\left(1+\frac{\eta^2}{M^2}\right)-f=0 \tag{3.54}$$

其中$\eta=\sigma_s/\sigma_m$，$f=\sigma_{m0}$(图3.4)。采用正交流动法则，比较式(3.46)得

$$\{\Delta\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\Delta\sigma\}+A\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\Delta f \tag{3.55}$$

只考虑体积应变，令B为弹性体积模量，此式可写为

$$\Delta\varepsilon_v=\frac{1}{B}\Delta\sigma_m+A\Delta f\frac{\partial f}{\partial\sigma_m} \tag{3.56}$$

设等向压缩和回弹曲线均可用半对数曲线表示，如图3.3，则

$$\varepsilon_v^e=C_e\ln\frac{\sigma_{m0}}{\sigma_{mt}} \tag{3.57}$$

$$\varepsilon_v^p=(C_c-C_e)\ln\frac{\sigma_{m0}}{\sigma_{mt}} \tag{3.58}$$

由此

$$\Delta\varepsilon_v^p=(C_c-C_e)\frac{\Delta\sigma_{m0}}{\sigma_{m0}} \tag{3.59}$$

假定屈服面为 ε_v^p 等值线，比较式(3.56)和式(3.59)可得

$$A=\frac{C_e-C_c}{\sigma_{m0}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_m}} \tag{3.60}$$

而回弹体积模量则可由(3.57)得出

$$B=\frac{\sigma_{m0}}{C_e} \tag{3.61}$$

另一个模型参数M相当于土体破坏时的η值。对正常压密粘土，考虑到 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}=\dfrac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}$，

可得

$$M=\frac{6\sin\phi}{3-\sin\phi} \tag{3.62}$$

ϕ为内摩擦角。剑桥模型原来只有 M，C_c和C_e三个参数。但是为了用于实际计算，还需要弹性剪切模量G，一般假定 $\dfrac{G}{B}=\text{const}$。

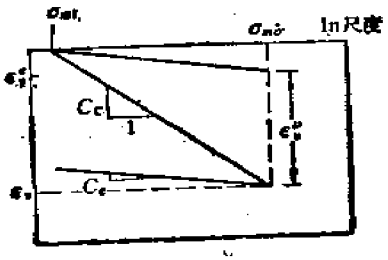


图 3.3 压缩曲线

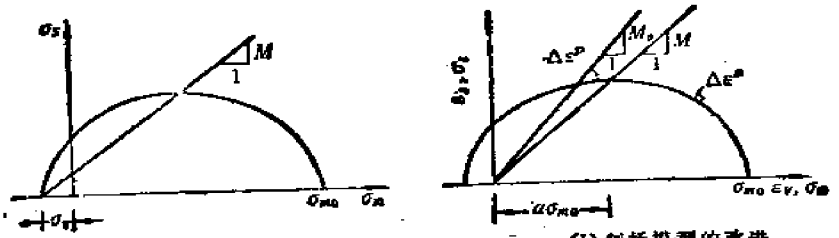
为了使剑桥模型能适用于其他土料，Duncan 等[12]建议用 $\sigma_m+\sigma_u$ 代替 σ_m，

$$\sigma_u=c\operatorname{ctg}\phi \tag{3.63}$$

相当于凝聚压力(图 3.4a)，故式(3.54)变为

$$F=\sigma_m+\frac{\sigma_s^2}{M^2(\sigma_m+\sigma_u)}-f=0 \tag{3.64}$$

剑桥模型中椭圆的长短轴之比M为常量，魏汝龙则将其改为变量[13]，而把屈服函数写为



(a) 修正剑桥模型 (b) 剑桥模型的改进

图 3.4 椭圆屈服面

$$F=\sigma_m\frac{\alpha^2-(1-\alpha)\sqrt{\alpha^2-(2\alpha-1)\dfrac{\eta^2}{M^2}}}{2(2\alpha-1)}-f=0 \tag{3.65}$$

按上述公式，破坏线都通过椭圆顶点，因此，如果采用正交流动法则，直到破坏都只有剪缩，并且另外定义 M_p 为峰值强度线，M 为零胀线，即由剪缩到剪胀的转折点的连线，就可以描述从剪缩到剪胀的全过程，这一想法曾由黄文熙等人建议过[14]，以后他们又把M改为洛德角的函数[11]，用以考虑轴对称应力状态与其他应力状态的差异。

下面附上一段剑桥模型的弹塑性矩阵计算程序，系根据 OON_2D 程序改写[12]。

P.3.2 斜桥模型弹塑性矩阵计算程序

【功能】 计算某一单元弹塑性矩阵元素

【标识符】

IM——单元材料号

CCE, CCC, CCM, CPR, CPO——计算参数 C_e, C_c, M, σ_r 和弹性泊松比 ν, 见式(3.56～3.63)

s_1, s_2, s_3, s_4——σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz}

DEP——弹塑性矩阵$[D]_{ep}$

ETA——式(3.54)中 η

F——相当于(3.64)中的 $\sigma_{m\theta}$

BU——式(3.61)中的 B

DE——弹性矩阵$[D]$

DFS——$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}$

H——硬化模量，即式(3.60)中 $\frac{1}{A}$

DP——式(3.53)中的$[D]\{n\}\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T[D]$，$\{n\}$已改为$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}$

DD——$[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}$

```
      SUBROUTINE MODEC
      COMMON /C1/IM,CCE(10),CCC(10),
     * CCM(10),CPR(10),CPO(10)/C2/
     * S1,S2,S3,S4,DEP(4,4)
      DIMENSION DE(4,4),DFS(4),DP
     * (4,4),DD(4)
      CE=CCE(IM)
      CC=CCC(IM)
      CM=CCM(IM)
      PR=CPR(IM)
      PO=CPO(IM)
      P=(S1+S2+S3)/3.0
      Q=SQRT((S1-S2)**2+(S2-S3)**2+
     * (S3-S1)**2+6.0*S4*S4)/2.0
      ETA=Q/(P+PR)
      F=(1.0+ETA*ETA/CM/CM)*(P+PR)-PR
      BU=P/CE
      E=3.0*BU*(1.0-2.0*PO)
      EA=E/(1.0-2.0*PO)/(1+PO)
      EB=EA*PO
      DO 30 I=1,3
      DE(I,I)=EA-EB
      DE(4,I)=0.0
30    DE(I,4)=0.0
      DE(1,2)=EB
      DE(2,1)=EB
      DE(1,3)=EB
      DE(3,1)=EB
      DE(2,3)=EB
      DE(3,2)=EB
      DE(4,4)=E/(1+PO)/2.0
      X=P+PR
      XX=Q*Q/3.0
      XXX=CM*CM*X*X
      DFS(1)=0.33333+(X*(2.0*S1-S2-S3)
     * -XX)/XXX
      DFS(2)=0.33333+(X*(2.0*S2-S1-S3)
     * -XX)/XXX
      DFS(3)=0.33333+(X*(2.0*S3-S1-S2)
     * -XX)/XXX
      DFS(4)=6.0*S4/CM/CM/X
      H=(DFS(1)+DFS(2)+DFS(3)*F/
     * (CC-CE)
      DO 80 I=1,4
      TE=0.0
      DO 60 J=1,4
      TE=TE+DE(I,J)*DFS(J)
60    DD(I)=TE
80    DO 90 I=1,4
      DO 90 J=1,4
90    DP(I,J)=DD(I)*DD(J)
      A=0.0
      DO 100 I=1,4
100   A=A+DFS(I)*DD(I)
      DEN=A+H
      DO 120 I=1,4
      DO 120 J=1,4
      DP (I,J)=DP(I,J)/DEN
120   DEP(I,J)=DE(I,J)-DP(I,J)
      RETURN
      END
```

(2) Lade 模型

Lade 建议了下列双屈服面模型[15]。

$$F_1 = I_1^2 + 2I_2 - f_1 = 0 \tag{3.66}$$

$$F_2 = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27\right)\left(\frac{I_1}{p_a}\right)^m - f_2 = 0 \tag{3.67}$$

假定 Q_1 与 F_1 相等，第二个塑性势面则为

$$Q_2 = I_1^3 - \left[27 + \eta_0\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m\right] I_3 \tag{3.68}$$

其中

$$\eta_0 = s \cdot f_1 + R\sqrt{\frac{\sigma_3}{p_a}} + t \tag{3.69}$$

在等向压缩条件下，f_2 不起作用。$f_1 = 3\sigma_m^2$，$\Delta f_1 = 6\sigma_m \Delta\sigma_m$，由式(3.45)得

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{1}{B}\Delta\sigma_m + 6A_1\sigma_m\Delta\sigma_m \tag{3.70}$$

由此

$$A_1 = \frac{1}{6\sigma_m}\left(\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\sigma_m} - \frac{1}{B}\right) \tag{3.71}$$

Lade 假定压缩功为下列幂函数

$$W_p = \int \sigma_m d\varepsilon_v = c\,p_a\left(\frac{f_1}{p_a^2}\right)^n \tag{3.72}$$

由此可得：

$$\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\sigma_m} = 6nc\,p_a\left(\frac{f_1}{p_a^2}\right)^{n-1} \tag{3.73}$$

在剪切试验中，f_1 不起作用，假定 f_2 与塑性功 W_p 之间存在下列关系：

$$f_2 = ae^{-bw_p}\left(\frac{W_p}{p_a}\right)\frac{1}{d} \tag{3.74}$$

其中

$$d = \alpha + \beta\frac{\sigma_3}{p_a} \tag{3.75}$$

由此可得

$$\frac{\Delta f_2}{\Delta W_p} = f_2\left(-b + \frac{1}{d}\,\frac{p_a}{W_p}\right) \tag{3.76}$$

考虑到$\Delta W_p = \{\sigma\}\{\Delta\varepsilon^p\} = A_2\Delta f_2\{\sigma\}\dfrac{\partial f_2}{\partial\{\sigma\}}$

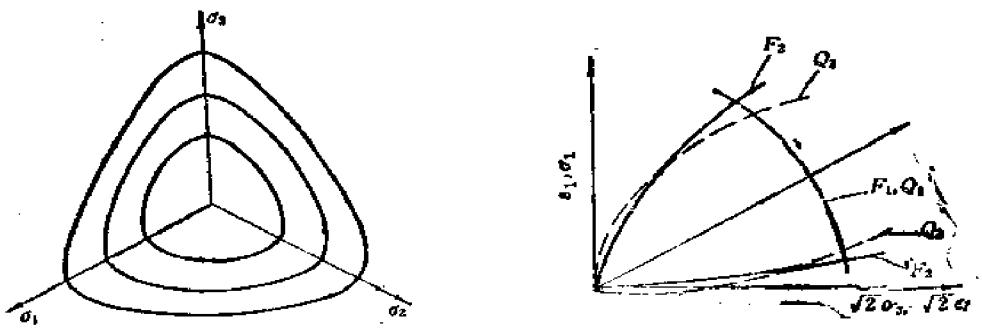


图 3.5 Lade 模型

可解出 A_2 如下

$$A_2=-\frac{1}{3f_2+m\eta_0\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m I_3}\cdot\frac{dW_p}{f_2(p_a-dW_3)} \tag{3.77}$$

上述式中 s, R, t, c, h, a, b, α, β 为计算参数。

(3) "南水"模型

双屈服面理论中通常称第一屈服面为体积屈服面，第二个为剪切屈服面，南京水科院沈珠江建议把这两个屈服面分别写为[16]

$$F_1=C_e\ln\frac{\sigma_m(1+\chi)}{\sigma_{m1}}-C_e\ln\frac{\sigma_m}{\sigma_{m1}}-f_1=0 \tag{3.78}$$

$$F_2=\frac{a\eta}{1-b\eta}\ln\frac{\sigma_m(1+\chi)}{\sigma_{m1}}-\frac{\sigma_s}{2G}-f_2=0 \tag{3.79}$$

其中

$$\chi=d\eta^n \tag{3.80}$$

并假定 F_1 只产生塑性体应变，F_2 只产生塑性剪应变，这相当于采用下列塑性势面。

$$Q_1=\sigma_m \tag{3.81}$$

$$Q_2=\sigma_s \tag{3.82}$$

上述各式中 C_e, C_c, a, b, d 和 n 为6个计算参数，G 为弹性剪切模量，σ_{m1} 为体应变为零的参考应力。

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma_m}=1,\ \frac{\partial Q_1}{\partial\sigma_s}=0,\ \frac{\partial Q_2}{\partial\sigma_m}=0,\ \frac{\partial Q_2}{\partial\sigma_s}=1$$

由式(3.46)可得

$$\Delta\varepsilon_v^p=A_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_m}\Delta\sigma_m+\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_s}\Delta\sigma_s\right) \tag{3.83}$$

$$\Delta\varepsilon_s^p=A_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_m}\Delta\sigma_m+\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_s}\Delta\sigma_s\right) \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_m}=\frac{C_e}{\sigma_m}\left(1-\frac{n\chi}{1+\chi}\right)-\frac{C_c}{\sigma_m} \tag{3.85}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_s}=\frac{C_e}{\eta\sigma_m}\frac{n\chi}{1+\chi} \tag{3.86}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_m}=-\frac{a}{\sigma_m}\frac{\eta}{1-b\eta}\left[\frac{n\chi}{1+\chi}+\frac{1}{1-b\eta}\ln\frac{\sigma_m(1+\chi)}{\sigma_{m1}}-1\right] \tag{3.87}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_s}=\frac{1}{\sigma_m}\frac{1}{1-b\eta}\left[\frac{n\chi}{1+\chi}+\frac{1}{1-b\eta}\ln\frac{\sigma_m(1+\chi)}{\sigma_{m1}}\right]-\frac{1}{2G} \tag{3.88}$$

在等向压缩试验中，$\Delta\sigma_s=0$，$\chi=0$，由式(3.83)可得

$$\frac{\Delta\varepsilon_v^p}{\Delta\sigma_m}=A_1\frac{(C_e-C_c)}{\sigma_m} \tag{3.89}$$

在 $\sigma_m=const$ 的剪切试验中，$\Delta\sigma_m=0$，由式(3.84)可得

$$\frac{\Delta\varepsilon_s^p}{\Delta\sigma_s}=A_2\left[\frac{a}{\sigma_m}\frac{1}{1-b\eta}\left(\frac{n\chi}{1+\chi}+\frac{1}{1-b\eta}\ln\frac{\sigma_m(1+\chi)}{\sigma_m}\right)-\frac{1}{2G}\right] \tag{3.90}$$

假定压缩曲线为对数曲线，剪切曲线为双曲线，则式(3.89)和(3.90)右边的乘数即为斜率 $\frac{\Delta\varepsilon_v^p}{\Delta\sigma_m}$ 和 $\frac{\Delta\varepsilon_s^p}{\Delta\sigma_s}$，故本模型中

$$A_1 = A_2 = 1 \tag{3.91}$$

为了使计算结果更符合实际情况，本模型建议在进行剪切试验测定参数 a，b，d 和 n 时，试验的应力路线尽量模拟实际，即土样先在 K_0 下固结，所得的参数分别为 a_1，b_1，d_1，n_1 和 a_2，b_2，d_2，n_2，前者用于附加应力的大主应力为垂直方向时的情况，后者则用于水平方向，对于中间情况则通过下列公式内插

$$a = a_2 + (a_1 - a_2)\sin^2\theta \tag{3.92}$$

θ 为大主应力方向与水平线夹角。参数 b，d 和 n 用同样方法计算。

上述模型曾简称为"南水"模型。实际应用表明，此模型的计算结果比较好，但还存在三个缺点，即①只适用于软土；②参数的测定要用到非常规试验；③由于采用非正交流动法则而导致弹塑性矩阵不对称，使其推广应用受到一定限制。为了克服上述缺点，沈珠江又建议了下列新的双屈服面模型[17]。

新理论只把屈服面看作弹性区域的边界，不再把它与硬化参数联系起来，具体建议的双屈服面如下(图 3.6)。

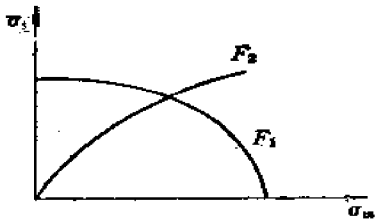


图 3.6 双屈服面

$$F_1 = \sigma_m^2 + r^2\sigma_s^2 - f_1 = 0 \tag{3.93}$$

$$F_2 = \sigma_s^2/\sigma_m - f_2 = 0 \tag{3.94}$$

因为

$$\Delta f_1 = 2\sigma_m\Delta\sigma_m + 2r^2\sigma_s\Delta\sigma_3 \tag{3.95}$$

$$\Delta f_2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_m}\left(-\frac{1}{\sigma_m}\Delta\sigma_m + \frac{s}{\sigma_s}\Delta\sigma_s\right) \tag{3.96}$$

采用正交流动法则，即 $Q_1 = F_1$；$Q_2 = F_2$，由此算出 $\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma_1}$，$\frac{\partial Q_1}{\partial\sigma_3}$，$\frac{\partial Q_2}{\partial\sigma_1}$，$\frac{\partial Q_2}{\partial\sigma_3}$；又考虑到三轴试验条件下 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$，$\sigma_s = \sigma_1 - \sigma_3$，代入式(3.46)，计及 $\Delta\varepsilon_v = \Delta\varepsilon_1 + 2\Delta\varepsilon_3$ 后可得

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta\sigma_1} = \frac{1}{E} + \frac{4}{9}(\sigma_m + 2r^2\sigma_s)(\sigma_m + 3r^2\sigma_s)A_1 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{2s}{\sigma_s}\right)\left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{3s}{\sigma_s}\right)\frac{\sigma_s^{2s}}{\sigma_m^2}A_2 \tag{3.97}$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\sigma_1} = \frac{1-2\nu}{E} + \frac{4}{3}\sigma_m(\sigma_m + 3r^2\sigma_s)A_1 + \frac{1}{3\sigma_m}\left(\frac{1}{\sigma_m} - \frac{\sigma_s^{2s}}{\sigma_s}\right)\frac{\sigma_s^{2s}}{\sigma_m^2}A_2 \tag{3.98}$$

定义 $E_t = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_1}$，$\mu_t = \frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1}$，由上式可解出

$$A_1 = \frac{1}{4\sigma_m^2}\frac{\eta\left(\frac{9}{E_t} - \frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{3}{G}\right) + 2s\left(\frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{1}{B}\right)}{2(1+3r^2\eta)(s + r^2\eta^2)} \tag{3.99}$$

$$A_2 = \frac{\sigma_m^2\sigma_s^2}{\sigma_s^{2s}}\frac{\left(\frac{9}{E_t} - \frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{3}{G}\right) - 2r^2\eta\left(\frac{3\mu_t}{E_t} - \frac{1}{B}\right)}{2(3s-\eta)(s + r^2\eta^2)} \tag{3.100}$$

令

$$\alpha = 4\sigma_m^2A_1 + \frac{\sigma_s^{2s}}{\sigma_m^4}A_2 \tag{3.101}$$

$$\beta = 4r^2\sigma_s^2A_1 + \frac{s^2\sigma_s^{2s}}{\sigma_m^2\sigma_s^2}A_2 \tag{3.102}$$

$$\gamma = 4r^2\sigma_m\sigma_sA_1 - \frac{s\sigma_s^{2s}}{\sigma_m^2\sigma_s}A_2 \tag{3.103}$$

则应用 Prandtl-Reuss 流动法则可以推出下列应力应变关系的显式

$$\Delta\sigma_m = B_p\Delta\varepsilon_v - P\frac{s_{kk}}{\sigma_3}\Delta e_{kk} \tag{3.104}$$

$$\Delta s_{ij} = 2G\Delta e_{ij} - P\frac{s_{ij}}{\sigma_3}\Delta\varepsilon_v - Q\frac{s_{ij}s_{kk}}{\sigma_3^2}\Delta e_{kk} \tag{3.105}$$

式中

$$B_p = \frac{B}{1+B\alpha}\left(1+\frac{2GB\gamma^2}{1+B\alpha+2G\delta}\right) \tag{3.106}$$

$$P = \frac{2GB\gamma}{1+B\alpha+2G\delta} \tag{3.107}$$

$$Q = \frac{4G^2\delta}{1+B\alpha+2G\delta} \tag{3.108}$$

$$\delta = \beta + B\alpha\beta - B\gamma^2 \tag{3.109}$$

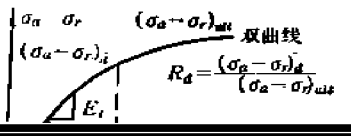
对于平面应变问题，相应的弹塑性矩阵为

$$[D]_{ep} = \begin{bmatrix} M_1 - P\frac{s_x+s_x}{\sigma_3} - Q\frac{s_x^2}{\sigma_3^2} & M_2 - P\frac{s_x+s_y}{\sigma_3} - Q\frac{s_xs_y}{\sigma_3^2} & -P\frac{s_{xy}}{\sigma_3} - Q\frac{s_xs_{xy}}{\sigma_3^2} \\ M_2 - P\frac{s_y+s_x}{\sigma_3} - Q\frac{s_ys_x}{\sigma_3^2} & M_1 - P\frac{s_y+s_y}{\sigma_3} - Q\frac{s_y^2}{\sigma_3^2} & -P\frac{s_{xy}}{\sigma_3} - Q\frac{s_ys_{xy}}{\sigma_3^2} \\ M_2 - P\frac{s_z+s_x}{\sigma_3} - Q\frac{s_zs_x}{\sigma_3^2} & M_2 - P\frac{s_z+s_y}{\sigma_3} - Q\frac{s_zs_y}{\sigma_3^2} & -P\frac{s_{xy}}{\sigma_3} - Q\frac{s_zs_{xy}}{\sigma_3^2} \\ -P\frac{s_{xy}}{\sigma_3} - Q\frac{s_{xy}s_x}{\sigma_3^2} & -P\frac{s_{xy}}{\sigma_3} - Q\frac{s_{xy}s_y}{\sigma_3^2} & G - Q\frac{s_{xy}^2}{\sigma_3^2} \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

假定三轴试验中 $(\sigma_1-\sigma_3)\sim\varepsilon_1$ 的关系曲线仍为双曲线，而 $\varepsilon_v-\varepsilon_1$ 的关系曲线为抛物线，图(3.7)，则上述式中 E_t 仍可象邓肯模型一样按式(3.27)计算，μ_t 则按下式计算

$$\mu_t = 2C_d\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^d\frac{E_iR_f}{\sigma_1-\sigma_3}\frac{1-R_d}{R_d}\left(1-\frac{D_s}{1-D_s}\cdot\frac{1-R_d}{R_d}\right) \tag{3.111}$$

D_s 的定义见式(3.28)。C_d，d 和 R_d 则为代替邓肯模型中 D、F 和 G 的另外三个参数，其典型的数字见表1。弹性体积和剪切模量则可按下式计算



CP_0——弹性泊松比

s_1, s_2, s_3, s_4, p_1, p_2, p_3——σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz}, σ_1, σ_2, σ_3

SF、DL——$(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 和 D_s

EI、EUR——见式(3.30)和(3.37)

EB、EG——弹性体积和剪切模量，见式(3.113)和(3.114)

F_1、F_2——屈服函数，见式(3.93)和(3.94)

F_1M、F_2M——历史上最大的 F_1 和 F_2

A_1、A_2——式(3.99)中 $4\sigma_m^2A_1$ 和式 (3.100)中 $\frac{\sigma_s^{2a}}{\sigma_m^2\sigma_s^2}A_2$

A、B、C——式(3.106)中的 B_p、P 和 Q

T_1、T_2、T_3——偏应力 s_x、s_y、s_z

D_{11}、D_{12}、…、D_{34}——弹塑性矩阵元素，见式(3.110)，该式中少第3列 D_{13}, D_{23}, D_{33}, D_{43}

```
      SUBROUTINE MODEN
      COMMON /C1/IM,AF(10),DF(10),
     * CR(10),RF(10),CKE(10),CKU(
     * 10),CN(10),CCD(10),CND(10),
     * CRD(10),CRK(10),CKS(10),CPO
     * (10)
      COMMON/C2/S1,S2,S3,S4,P1,P2,
     * P3,F1M,F2M,PA
      COMMON/C3/D11,D12,D13,
     * D14,D22,D23,D24,D33,D34,D44
      SD=S1-S2
      SB=S2-S3
      SA=S3-S1
      SS=SQRT(SD*SD+4.0*S4*S4)/2.0
      ST=SQRT((SD*SD+SB*SB+SA*SA+
     *6.0*S4*S4)/2.0)
      PP=(S1+S2)/2.0
      P1=PP+SS
      P2=S3
      P3=PP-SS
      IF(S3.GT.P3) GOTO 10
      P2=P3
      P3=S3
10    PM=(S1+S2+S3)/3.0
      PP=P3/PA
      A=P2/P3
      IF(PP.LT.0.1) PP=0.1
      PE=PP*EXP(LOG(A)/3.0)
      E1=AF(IM)-DF(IM)*LOG(PP)*
     * 0.4343
      E2=SIN(E1)
      PP=CR(IM)*COS(E1)/E2
      SF=E2*(PP+PE)/(1-E2)*PA
      SULT=SF/RF(IM)
      DL=(P1-P3)/SULT/2.0
      IF(DL.GT.0.95) DL=0.95
      PE=LOG(PE)
      E1=CKE(IM)*EXP(PE*CN(IM))*PA
      ET=E1*(1.0-DL)**2
      DM=CRD(IM)
      VM=CCD(IM)*EXP(PE*CND(IM))
      E1=DL/(1.0-DL)
      E2=DM/(1.0-DM)
      VT=VM*E1/SULT*(1.0-E1/E2)/E2
      IF(VT.GT.0.99) VT=0.99
      EUR=CKU(IM)*EXP(PE*CN(IM))*PA
      EB=EUR/(1.0-2.0*CPO(IM))/3.0
      EG=EUR/(1.0+2.0*CPO(IM))/2.0
      PP=PM
      IF(PP.LT.0.1) PP=0.1
      ER=CRK(IM)
      ES=CKS(IM)
      F1=PM*PM+ER*ER*ST*ST
      F2=EXP(LOG(ST)*ES)/PP
      ETA=ST/PP
      E1=3.0*VT/ET
      E2=9.0/ET
      E3=3.0/EG
      E4=2.0*(ES+ER*ER*ETA*ETA)
      E2=E2-E1-E3
      E1=E1-1.0/EB
      A1=(ETA*E2+2.0*ES*E1)/E4/
     * (1.0+3.0*ER+ER*ETA)
      A2=(E2-2.0*ER*ER*ETA*E1)/
     * E4/(3.0*ES-ETA)
      IF(F1.LT.F1M) A1=0.0
      IF(F2.LT.F2M) A2=0.0
      A=A1+ETA*ETA*A2
      B=ER*ER*ETA*ETA*A1+ES*ES*A2
      C=ER*ER*ETA*A1-ES*ETA*A2
      E1=1.0+EB*A
      E2=B*E1-EB*C*C
      E3=E1+EG*E2
      D1=EB*(1.0+EB*EG*C*C/E3)/E1
      D2=EG
      D3=EB*EG*C/E3
      D4=EG*EG*E2/E3
      T1=S1-PM
      T2=S2-PM
      T3=S3-PM
      C1=D1+4.0*D2/3.0
      C2=D1-2.0*D2/3.0
      E1=D3/ST
      E2=D4/ST/ST
      D11=C1-E1*(T1+T1)-E2*T1*T1
      D22=C1-E1*(T2+T2)-E2*T2*T2
      D33=C1-E1*(T3+T3)-E2*T3*T3
      D44=D2-E2*S4*S4
      D12=C2-E1*(T1+T2)-E2*T1*T2
      D13=C2-E1*(T1+T3)-E2*T1*T3
      D23=C2-E1*(T2+T3)-E2*T2*T3
      D14=-E1*S4-E2*T1*S4
      D24=-E1*S4-E2*T2*S4
      D34=-E1*S4-E2*T3*S4
      RETURN
      END
```

3.3 动力分析模型

下面介绍适用于地震，风浪等反复荷载作用下应力应变分析的几个模型，其中如内时模型和边界面模型，也可以用于静力计算

3.3.1 等价粘弹性模型

除了粘粒含量很大的土类外，粘滞性(流变性)对土的应力应变关系的影响一般不大，许多计算中可以忽略不计。但是，在循环荷载作用下，即使纯净的砂土也表现出明显的类似于粘弹性的滞回圈，于是人们提出了用粘弹性模型代替实际上的弹塑性体进行计算，这就是所谓的等价粘弹性模型。

大家知道，在循环荷载下理想粘弹性体的应力应变曲线表现为椭圆，等价粘弹性模型把实际滞回圈用倾角和面积相等的椭圆代替，并由此确定粘弹性体的两个基本参数：剪切模量 G 和阻尼比 λ (图 3.8)。假定滞回圈顶点轨迹(骨架曲线)为双曲线，Hardin 和 Drnevich 根据试验资料提供了下列经验公式[18]。

$$G=\frac{G_{max}}{1+\gamma_h} \tag{3.115}$$

$$\lambda=\lambda_{max}\frac{\gamma_h}{1+\gamma_h} \tag{3.116}$$

其中

$$G_{max}=k_2 p_a\left(\frac{\sigma_m}{p_a}\right)^{1/2}(OCR)^{k_3} \tag{3.117}$$

$$\lambda_{max}=c-d\lg N \tag{3.118}$$

$$\gamma_h=\frac{\gamma_a}{\gamma_r}\left[1+a\ \exp\left(-b\frac{\gamma_a}{\gamma_r}\right)\right] \tag{3.119}$$

式中 a、b、c、d、k_1 和 k_2 为经验常数，γ_a 为动应变幅值，$\gamma_r=\frac{\tau_{max}}{G_{max}}$ 称为参考应变。

但是，土体的真实变形性质是不可能完全用粘弹性体模拟的，因为粘弹性体在荷载循环结束时应变也回到初始状态，不会出现残余变形或残余孔隙压力。Martin 等人首先提出下列在等价粘弹性范围内考虑残余变形的经验公式[19]。

$$\Delta\varepsilon_v=c_1(\gamma_a-c_2\varepsilon_v)+\frac{c_3\varepsilon_v^2}{\gamma_a+c_4\varepsilon_v} \tag{3.120}$$

c_1，c_2，c_3 和 c_4 为计算常数，$\Delta\varepsilon_v$ 和 ε_v 为排水条件下每个荷载的循环的体积应变增量及累加量。根据 $\Delta\varepsilon_v$ 可按下式推算不排水条件下的残余孔隙压力

$$\Delta u=E_{ur}\Delta\varepsilon_v \tag{3.121}$$

以上等价粘弹性模型系在等向固结土样基础上推导的，下列是适用于一般情况的等价粘弹性模型(图 3.9)[20]。

$$G=\frac{k_2 p_a\left(\frac{\sigma_m}{p_a}\right)^{1/2}}{1+k_1\gamma_a} \tag{3.122}$$

$$\lambda=\lambda_{max}\frac{k_1\gamma_a}{1+k_1\gamma_a} \tag{3.123}$$

$$\Delta\varepsilon_v=c_1(\gamma_a)^{c_2}\exp(-c_3D_r^2)\frac{\Delta N}{1+N_a} \tag{3.124}$$

$$\Delta\gamma=c_4(\gamma_a)^{c_2}D_r^2\frac{\Delta N}{1+N_a} \tag{3.125}$$

其中

$$\gamma_e = \gamma_d^{3/4}/\sigma_m^{1/2} \tag{3.126}$$

$$N_e = \frac{\Sigma\gamma_d}{\bar{\gamma}_d} \tag{3.127}$$

式中 $\bar{\gamma}_d$ 为某一时段的平均动剪应变幅值，$\Sigma\gamma_d$ 为各次动应变幅值的累加值，ΔN 为荷载次数的增加，D_r 为静力应力水平，如式(3.28)，反映土的不等向应力状态。式(3.122)和(3.123)为前面 Hardin公式的简化，λ_{max} 假定为常数，参数 k_1、k_2 和 λ_{max} 通过共振柱或动三轴的模量试验测定。参数 c_1，c_2，c_3，c_4 和 c_5 则由常规的动三轴液化试验测定。

等价粘弹性模型是以一个荷载循环为基础进行考察的，所以它得出的残余变形过程只是一个平均过程，每个荷载循环内应力应变瞬间变化的细节是无法得到的。

此模型的计算程序将在第七章介绍。

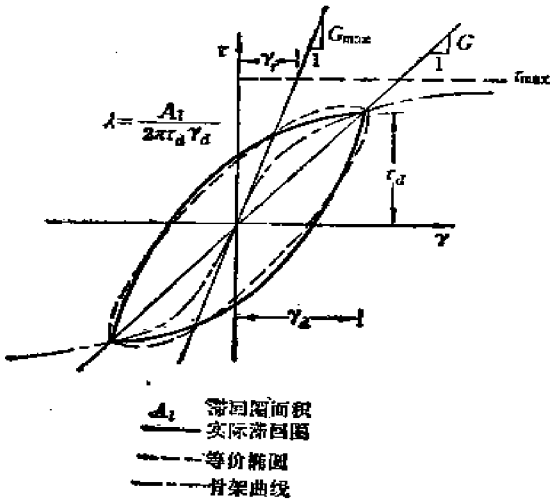


图 3.8 等价粘弹性

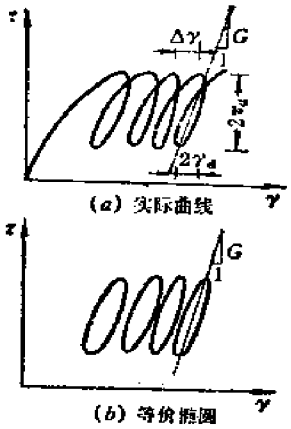


图 3.9 不等向固结土样的等价粘弹性

3.3.2 Masing 模型

本模型改用瞬时剪切模量代替前面的平均剪切模量。如前所述，滞回圈顶点轨迹可用下列双曲线表示。

$$\tau = \frac{G_{max}\gamma}{1+\frac{\gamma}{\gamma_r}} \tag{3.128}$$

Masing 建议对上述公式按应力轴坐标放大两倍的办法来描述滞回圈的应力应变关系[21]，即

$$\tau = \tau_e + \frac{G_{max}(\gamma-\gamma_e)}{1+\frac{|\gamma-\gamma_e|}{2\gamma_r}} \tag{3.129}$$

其中(τ_e, γ_e)为转折点的坐标(图 3.10)，但此式用于不规则循环荷载时会产生剪应力 τ 超过抗剪强度 τ_{max} 的情况。为了避免这一点，Pyke 对式(3.129)修正如下[22]

$$\tau = \tau_e + \frac{G_{max}(\gamma-\gamma_e)}{1+\frac{(\gamma-\gamma_e)}{\eta\gamma_r}} \tag{3.130}$$

其中

$$\eta = \left|\pm 1 - \frac{\tau_e}{\tau_{max}}\right| \tag{3.131}$$

n 在 0～2 之间变化。由式(3.130)求导可得下列瞬时切线模量。

$$G_t=\frac{G_{max}}{\left(1+\frac{\gamma-\gamma_c}{n\gamma_r}\right)^2} \tag{3.132}$$

由此可见，上述模型相当于前面介绍的变弹性模型，而且没有考虑塑性体积应变。为了计算出残余体积应变或孔隙压力，还需补充类似于(3.120)或(3.124)的经验公式。

上述模型中还可引入粘性项，得到粘弹塑性模型，即式(3.115)中的 G 用 G_t 代替，而阻尼系数 λ 则在式(3.116)的基础上打一折扣计算，并称之为退化阻尼比[22]，因此 λ 为粘性阻尼和塑性滞回阻尼之和，滞回阻尼已在塑性项中考虑，剩下的粘性阻尼就只是 λ 的一部分。

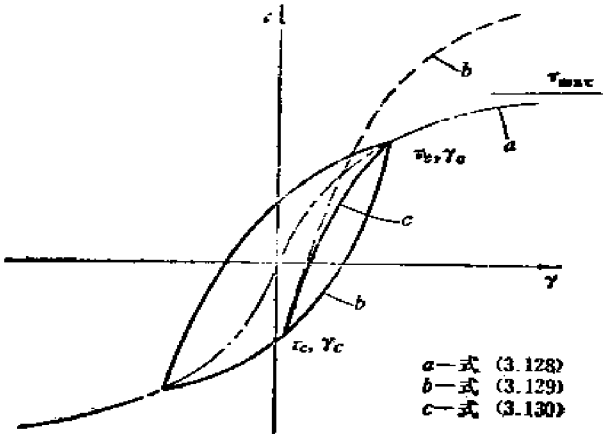


图 3.10 Masing 两倍法

Masing 模型可用Iwan 建议的并联的弹塑性元件串说明，如图 3.11 左图[24]。如果只取两串，E_1，E_2 和 σ_{f1}、σ_{f2} 分别为它们的弹性模量和破坏强度，则可以得到如图 3.11 右图的折线形滞回曲线。当并联的元件串不断增加时，折线形滞回曲线就逐渐过渡到图3.10的光滑曲线。郑大同等把滑块元件由理想塑型改换成应变软化型，即它们的初始屈服强度为 σ_{f1}、$\sigma_{f2}\cdots$，而后继屈服强度降为 $\xi\sigma_{f1}$，$\xi\sigma_{f2}\cdots$，$0<\xi<1$，得到的滞回曲线能更好地拟合试验结果[25]。

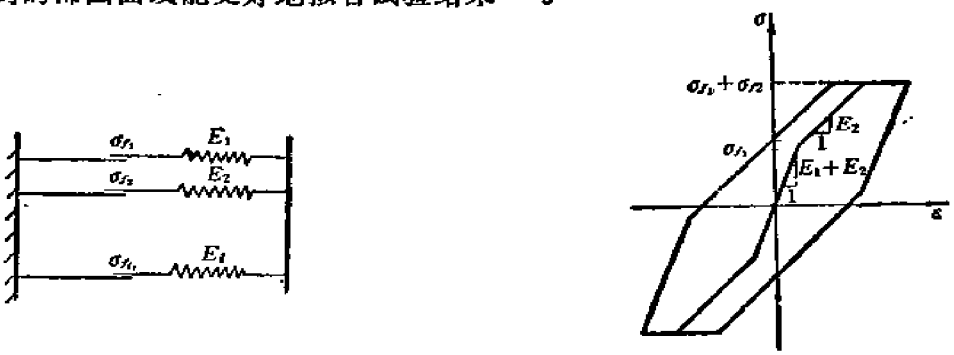


图 3.11 Iwan模型

上述模型只用于地基的一维剪切振动，下面附上一段有关的计算程序[36]。

P.3.4 Masing 模型计算程序

【功能】 计算各土层 Masing 模型的瞬时切线剪切模量并统计两次迭代中的差别

【标识符】

N——土层总数

ID——迭代中 IS 未改变的土层数

IS——0，1，－1 分别代表图(3.10)中曲线 a，b 和 c

U，H——土层上端的变位及土层厚度

SE_1、SE——本时段和上时段的剪应变 γ

SF, SFM——剪应力 τ 及抗剪强度 τ_{max}

SEC, SFC——转折点应变 γ_e 和应力 τ_e

CN——式(3.131)中的 n

GM——最大剪切模量 G_{max}

SER——参考应变 γ_r

SF_1——新的剪应力 τ，见式(3.130)

G, G_1——两次迭代中老的和新的剪切模量，见式(3.132)

【说明】 当有一个或一个以上土层的 IS 发生改变时，$ID<N$，继续迭代，重新计算变位 U，另外比较 G 和 G_1，如果它们的相对误差超过允许值，还要进行下一轮迭代，但本子程序中未反映这一点。

```
      SUBROUTINE MODEM
      COMMON N,U(50),H(50),SE(50),
     * SE1(50),IS(50),SF(50),SFM(
     * 50),SEC(50),SFC(50),G(50),
     * G1(50),GM(50)
      DIMENSION CN(50)
      ID=0
      SE1(1)=U(1)/H(I)
      DO 5 I=2,N
5     SE1(I)=(U(I)-U(I-1))/H(I)
      DE=SE1(I)-SE(I)
      DO 85 I=1,N
      IF(IS(I)) 40,10,60
10    IF(SE(I)*DE.GE.0.0) GOTO 75
      SEC(I)=SE(I)
      SFC(I)=SF(I)
      G(I)=GM(I)
      IF(DE.GE.0.0) GOTO 30
20    CN(I)=ABS(-1.0-SFC(I)/SFM(I))
      IS(I)=-1
      GOTO 85
30    CN(I)=ABS(1.0-SFC(I)/SFM(I))
      IS(I)=1
      GOTO 85
40    IF(DE.GT.0.0) GOTO 50
      GOTO 80
50    SEC(I)=SE(I)
      SFC(I)=SF(I)
      G(I)=GM(I)
      GOTO 30
60    IF(DE.LE.0.0) GOTO 70
      GOTO 80
70    SEC(I)=SE(I)
      SFC(I)=SF(I)
      G(I)=GM(I)
      GOTO 20
75    CN(I)=1.0
80    ID=ID+1
85    CONTINUE
      IF(ID.NE.N) RETURN
      DO 90 I=1,N
      SER=SFM(I)/GM(I)
      A=1.0+ABS(SE1(I)-SEC(I))/CN(I)/SER
      SF1=SFC(I)+GM(I)*(SE1(I)-SEC(I))/A
      G1(I)=GM(I)/A/A
90    CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.3.3 内时模型

介质发生塑性变形时，可以用内变量记录从一个状态到另一个状态的变化。塑性变形是不可逆的，这一性质决定了内变量的演变规律也必须是象时间一样递增。Valanis 最先应用下列偏应变增量的模作为内变量，并称为内时量度。

$$d\xi=\left(\frac{1}{2}de_{ij}de_{ij}\right)^{1/2} \tag{3.133}$$

Bazant 等人在此基础上采用 Prandtl—Reuss 流动法则建议了下列应力应变关系[27,28]。

$$\Delta\varepsilon_v=\frac{\Delta\sigma_m}{B}+\Delta\varepsilon_v^p \tag{3.134}$$

$$\Delta e_{ij}=\frac{\Delta s_{ij}}{2G}+\frac{s_{ij}}{2G}\Delta\varepsilon_s^p \tag{3.135}$$

式中 $\Delta\varepsilon_v^p$ 和 $\Delta\varepsilon_s^p$ 为残余体应变和剪应变增量，可以按下式计算

$$\Delta\varepsilon_v^p=\frac{\Delta\kappa}{c_0(1+a\kappa)} \tag{3.136}$$

$$\Delta e_s^p = \frac{\Delta\eta}{c_1\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\eta\right)\gamma} \tag{3.137}$$

式中

$$\Delta\kappa = F_0(\{\varepsilon\},\ \{\sigma\})\Delta\xi \tag{3.138}$$

$$\Delta\eta = F_1(\{\varepsilon\},\ \{\sigma\})\Delta\xi \tag{3.139}$$

F_0 和 F_1 为已有的应变和应力状态的函数，c_0、c_1、α、β 和 γ 为计算参数。F_0 和 F_1 应为正的参数，如此 Δe_s^p 将始终为正，即反映不断剪缩的趋势。参数 κ 与前面等价粘弹性模型的振动次数N类似，反映老化的趋势，即同样振幅条件下，后期的剪缩变形将随 κ 的不断增大而逐步减少。这一模型原则上可以算出瞬时残余变形，但实际上也只能反映平均趋势，除非把函数 F_0 取为随应力状态可正可负的复杂函数，以反映一个荷载循环中既有剪缩又有剪胀的特点。

早期的内时理论因为对卸荷处理不合适，在一个荷载循环中不出现闭合的滞回圈而受到批评。后来 Valanis 将式 (3.131) 定义的内时量度中的 de_{ij} 改为塑性偏应变增量 de_{ij}^p，即[29]

$$d\xi = \left(\frac{1}{2}\,de_{ij}^p de_{ij}^p\right)^{1/2} \tag{3.133a}$$

新的内时理论用于金属塑性变形计算获得一定的成功，并且陆续开发了初应力法和切线刚度法等有限元算法，扩展了它的实用价值。目前，范镜泓等人正努力研究适用于岩土材料的新内时模型[30]。

3.3.4 自发应变模型

为了使前面介绍过的等向硬化理论能用于反复荷载下的残余变形和液化计算，Zienkiewicz 等人把式(3.51)改写为[31]。

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{ep}(\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\varepsilon^c\{I\}) \tag{3.140}$$

$\Delta\varepsilon^c$ 为自发体应变，按下列与式(3.136)类似的经验公式计算

$$\Delta\varepsilon^c = \frac{A}{1+B\kappa}\Delta\kappa \tag{3.141}$$

$$d\kappa = \exp\left(\beta\frac{\sigma_s}{\sigma_m}\right)d\xi \tag{3.142}$$

A、B 和 β 为计算常数。由于体应变已由式 (3.141)算出，所以他们在选择 $[D]_{ep}$ 时采用没有体应变的不相适应的流动法则。与前面一样，此模型的自发体应变也只能反映剪缩变形的平均发展趋势。

3.3.5 边界面模型

与 Iwan 同时，Mroz 提出了多环套叠屈服面模型[32]。如图 3.12*a*，随着被应力点所推移的环数的增多，塑性模量逐段降低，由此推算的应力应变曲线将由多段折线所组成。因此，这一模型实际上就是 Iwan 模型在偏应力空间上的描述。边界面模型则是多环套叠面模型的进一步发展，它改用一个不动的边界面和一个可移动的内屈服面，应力点到达边界面时模量为零，距离边界面越远模量也越大，由于模量是连续变化的，所以推算的应力应变曲线将是光滑的(图 3.12*b*)[33]。

近年来已把边界面看作可以扩大的等向硬化面，进一步扩展了这类模型的适应能力[34]。这类模型原则上能比较全面地反映反复荷载下应力应变的瞬时过程，目前研究的人很多，下面介绍 Bardet 最近的建议[35]。

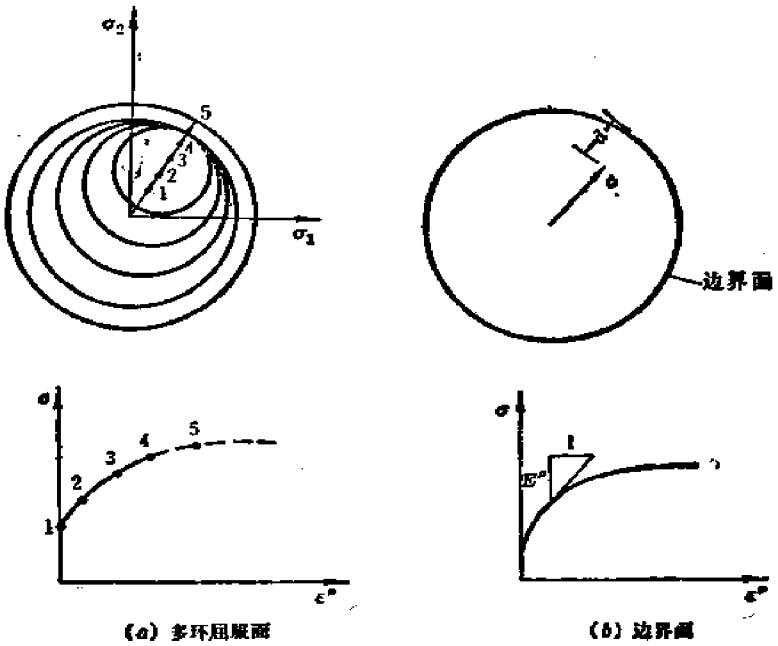


图 3.12 多环屈服面与边界面

该模型采用式(3.65)相同的椭圆屈服面作为边界面

$$F=\left(\frac{\sigma_m-\alpha\sigma_{m0}}{1-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sigma_s^2}{M(\theta)}\right)^2-f=0 \tag{3.143}$$

其中

$$M(\theta)=\frac{2M_cM_e}{M_c+M_e-(M_c-M_e)\sin 3\theta} \tag{3.144}$$

θ 为 *Lode* 角，

$$M_e=\frac{6\sin\phi_e}{3-\sin\phi_e},\quad M_c=\frac{6\sin\phi_c}{3-\sin\phi_c}$$

ϕ_e 和 ϕ_c 分别为压缩和伸长试验测定的残余内摩擦角。与剑桥模型一样，可以从式(3.56)和(3.57)得出

$$\sigma_m=\sigma_{m1}\exp\left(\frac{\varepsilon_v^p}{C_c-C_e}\right) \tag{3.145}$$

流动法则规定，当应力点落在边界面上时，用边界面的法线方向为塑性应变方向；而当应力点在边界面内时，则通过坐标原点与应力点的连线在边界面上找出映射点。映射点的法线方向即为流动方向(图 3.13)。最后塑性模量按下式计算

$$H=H_b+\frac{\sigma_m}{C_c-C_e}\cdot\frac{d}{d_{max}-d}h_0\left(\frac{M_p}{M_c}-\frac{\sigma_s}{M\sigma_m}\right) \tag{3.146}$$

其中 H_b 为应力点落在边界面上时的塑性模量，按下式计算

$$H_b=\frac{\sigma_{m0}M^2}{C_c-C_e}(r-1)\left(r+\frac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right) \tag{3.147}$$

其中

$$r=\frac{\alpha^2+(1-\alpha)\sqrt{\alpha^2+(1-2\alpha)\chi^2}}{\alpha^2+(1-\alpha^2)\chi^2} \tag{3.148}$$

$$\chi=\frac{\sigma_m}{M(\theta)\sigma_m} \tag{3.149}$$

d 为实际应力点与映射点的距离，$d \geqslant d_{max}$ 时 $H \to \infty$。式(3.146)中 $M_p = \dfrac{6\sin\phi_p}{3-\sin\phi_p}$，$\phi_p$ 为峰值内摩擦角，当 $M > M_e$ 时式(3.147)中方括弧内为负值，且 $H_p < 0$，故可反映应变软化现象。

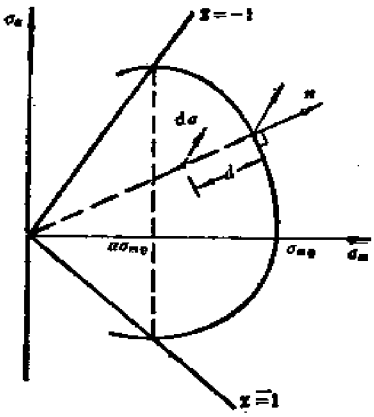


图 3.13 边界面模型

根据以上各式可以推算增量应力应变关系如下

$$\Delta\sigma_{ij} = 2G\Delta e_{ij} + \left(B - \frac{2}{3}G\right)\Delta e_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{k}N_{ki}\Delta e_{kl}N_{ij} \tag{3.150}$$

其中

$$K = H + B\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}\right)^2 + G\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_s}\right)^2(1 + 9\xi^2\cos^2 3\theta) \tag{3.151}$$

$$N_{ij} = \left(B\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} - G_\xi \frac{\partial F}{\partial \sigma_s}\right)\delta_{ij} + G\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}(1 - \xi\sin 3\theta)\frac{s_{ij}}{\sigma_s} + G\frac{\partial F}{\partial \sigma_s}\frac{s_{ik}s_{kj}}{\sigma_s^2} \tag{3.152}$$

$$\xi = \frac{M_c - M_e}{2M_cM_e}M(\theta) \tag{3.153}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = (r-1)M(\theta) \tag{3.154}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_s} = r\chi\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \tag{3.155}$$

上述公式中 C_e，C_c，α，ϕ_e，ϕ_c，ϕ_p 和 h_0 为计算常数，B 和 G 为弹性体积和剪切模量。

参 考 文 献

1. 濮家骝，李广信，土的本构关系及其验证与应用，岩土工程学报，8卷1期，1986。
2. 沈珠江，考虑剪胀性的土和石料的非线性应力应变模式，水利水运科学研究，第4期，1986。
3. Corotis, R.B.et al., Nonlinear stress-strain formulation for soils, J. GED, ASCE, Vol., 100, No, GT. 9, 1974.
4. Paster M. & Zienkiewicz O. C.A generlized plasticity, hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading, 2nd Symp. Numerical Models in Geomechanics, p.131, 1986.
5. Duncan. J.M, and Chang C.Y., Nonlinear analysis of stress and strain in soils, J. SMFD, ASCE, Vol, 96, No SM5, pp.1629, 1970.
6. Duncan. J. M. et al., Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analysis of stress and movements in soil masses, Report No.UCB/GT/80—01, University of California, Berkeley, 1980.
7. Duncan. J. M. et al., FEADAM—84, A computer program for finite element analysis of dams, Report No. UCB/GT/University of california, Berkeley 1984.
8. 龚晓南、曾国熙，油灌软粘土地基性状，岩土工程学报，7卷4期，1985。
9. Naylor. D. J. Stress-strain law for soils, Developm cnts in soil Mechanics, edited by scott, C. R. 1978.
10. 刘双光等，人工砂料非线性弹性应力——应变参数的测定，成都科技大学学报，1985年4期。
11. Roscoe, K. H. and Burland, J. B., On the generalized stress-strain behavior of 'wetclay', Engineering Plasticity, Cambridge University, 1968.
12. Duncan J. M. et al., CON_2D: A finite element computer program for analysis of consolidation, Report No. UCB/GT/81—01, Univ. of California, Berkeley, 1981.

13. 魏汝龙，正常压密粘土的本构定律，岩土工程学报。2卷3期。1981。
14. 黄文熙等：土的硬化规律和屈服函数，岩土工程学报。3卷3期。1981。
15. Lade P. V. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces, Int. J. Solid and Structures, Vol. 13, pp.1019—1035, 1977。
16. 沈珠江，一个计算软土地基固结变形的弹塑性模式，第三届土力学及基础工程学术讨论会论文选集，建筑工业出版社，1981。
17. 沈珠江，土体应力应变计算的一种新模型。第五届土力学及基础工程学术讨论会论文选集。建筑工业出版社，1990。
18. Hardin B. O. and Drnevich V. P, Shear modulus and damping in soil, JSMFD, ASCE, Vol, 102, No. SM7, 1972.
19. Martin G.R. Finn W. D. L., and Seed H. B, Fundamentals of Liquefaction under cyclic loading, JGED, ASCE, Vol 101, No. GT 5, 1975。
20. 沈珠江，一个计算砂土液化变形的等价粘弹性模式，第四届土力学及基础工程学术会议论文选集，建筑工业出版社。1986。
21. Masing, G., Eigenspannungen und verfestigung beim Messing, Proc. 2 Int.Congress Applied Mechs, pp.332—335 1926。
22. Pyke R.M., Nonlinear soil models for irregular cyclic loading, J. GED, ASCE, Vol.105 No, GT6, 1979。
23. 王志良等，粘弹塑性波动法分析土层地震反应的某些特点和规律，No.8020冶金部建筑研究总院，1980。
24. Iwan W.D., On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite system, ASME, Vol. 34, No. EM3, 1967.
25. 郑大同、王惠昌，循环荷载作用下土的非线性应力应变模型，岩土工程学报，5卷1期，1983。
26. 张敏政，水平饱和砂层地震反应的有效应力分析，中国科学院工程力学研究所硕士论文，1981。
27. Bazant, Z.P.and Krizek R.J., Endochronic constitutive Law for liquefaction of sand, J.EMD, ASCE,Vol. 102, No.EM2, 1976。
28. Bazant, Z. P. et al., Endochronic models for soils, Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loads, p.419, 1982。
29. Valanis K. C. & Read H.E., A new endochronic plasticity model for soils, Ibid, P.375, 1982。
30. 范镜泓、高芝晖、非线性连续介质力学，第10章。重庆大学出版社，1987。
31. Zienkiewicz O C. et al., Nonlinear seismic response and liquefaction, Int.J.Num. Anal. Methods in Geomechs., Vol.2, 381—404, 1978。
32. Mroz Z., On the description of anisotropic harding, J. Mech. & Physics of Solids, Vol. 15, pp. 163—175, 1967。
33. Dafalias, Y.F. and Popov, E., Plastic internal variable formalism of cyclic plasticity, J. Applied Mechs. Vol. 98, No 4, pp.645—651, 1976。
34. Dafalias. Y. F. and Herrmann, L. R., Boundary surface formulation of soil plastiwty, Soil Machanics—Trasiend and Cyclic Loading, pp.253—282, 1982。
35. Bardet J.P., Modelling of sand behaviour with bounding surface plasticity, 2nd Int. Symp.On Num. Models in Geomechs, pp. 79—90, 1986。

第四章 渗流分析

4.1 概述

渗流理论讨论刚性骨架中孔隙水和气的运动规律及其分析方法。渗流可以由多种原因引起，除重力外，还有温度及其它物理化学因素[1]。土力学中主要研究的是重力渗流，但近几年来盐水及化学物质在地下水中的扩散和运动也已引起人们广泛的注意[2]。

随着孔隙中水和气含量的不同，孔隙流体的运动可以分为三种情况：一是饱和度低时，气流通畅，可以假定孔隙气压力等于大气压力，不影响水流；二是饱和度较高时，气流与水流相互影响，宜按两相流考虑；三是接近饱和时空气封闭在水流中一起运动。前两种情况，特别是气-水两相流，只是近几年才开始研究[3]。下面主要介绍完全饱和以及饱和度大于85%时土中渗流的计算。后一种情况气体大部分以气泡形式封闭在水流中，可以把含气水当作单一的可压缩流体看待。

土力学中渗流计算的目的主要为了求得渗流量和孔隙水头或水力坡降，前者用于估计水库和渠道的渗流损失、地下水的出水量、农田排水量等；后者用于估计渗流对土体的破坏作用和对建筑物稳定的影响，如管涌、流沙和土坡稳定、混凝土结构上的扬压力以及非饱和土(如黄土)的浸水变形。

求解渗流问题的数学方法有三种：(1) 近似方法或水力学方法，(2) 解析解法，(3) 数值解法。第一种方法是把渗流方程简化以后求解，比较简便实用，但只适用于均质土及简单的边界条件；第二种方法在五十年代以前获得过迅速的发展，曾求得许多问题的精确解，当然也只适用于理想化的简单情况；第三种方法虽然早期就有人用差分法计算过，但只有在1965年Zienkiewicz引入有限单元法以后才获得迅速发展[4]。本章的介绍限于数值解法。

4.2 渗流模型

渗流理论以比流量 q 和孔隙水头 h 为场变量。考虑渗流速度很慢，略去流速水头，孔隙水头与孔隙压力的关系为

$$h = z + \frac{p}{\rho_f g} \tag{4.1}$$

z 为位置水头(向上为正)，ρ_f 和 g 分别为孔隙流体的密度和重力加速度。渗流模型建立了下列比流量与孔隙水头的关系

$$q = -kI \tag{4.2}$$

这就是Darcy定律，其中 k 为渗透系数或水力传导系数[5]，

$$I = \nabla h \tag{4.3}$$

为水力梯度。Darcy的线性渗流规律适用于大多数砂土和粘土，但对粗粒土，孔隙中产生紊流，需要采用非线性渗流模型，例如[6]

$$I = aq + bq^2 \tag{4.4}$$

a 和 b 是经验常数。

在非饱和土中，渗透系数随饱和度的降低而降低，近似地可用下列经验公式计算[6]

$$k(s) = k_s\left(\frac{s - s_0}{1 - s_0}\right)^3 \tag{4.5}$$

k_s 为饱和土的渗透系数，s_0 为只含粘结水时的饱和度。

刚性骨架假设下的渗流方程如式(1.12)，下面换成另一种简化的写法

$$\nabla^T k \nabla h - \beta \dot{h} = 0 \tag{4.6}$$

β 为单位土体内孔隙流体的压缩系数。对饱和土，水体不可压缩，上式进一步简化为

$$\nabla^T k \nabla h = 0 \tag{4.7}$$

此式即为 Laplace 方程。

与其它边值问题一样，渗流边界条件可分两类，即已知水头边界(第一类边界)及已知流量边界(第二类边界)

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1 \quad h = \bar{h} \\ &\Gamma_2 \quad k\frac{\partial h}{\partial n} = -\bar{q} \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

~代表已知值，n 为法向尺度。但是渗流计算中有一类自由面渗流问题，其边界条件需特殊处理。

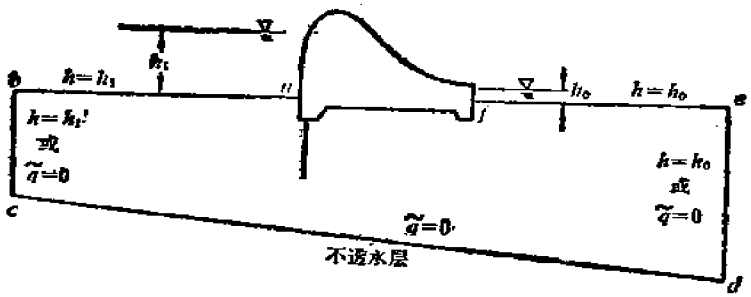


图 4.1 有压渗流

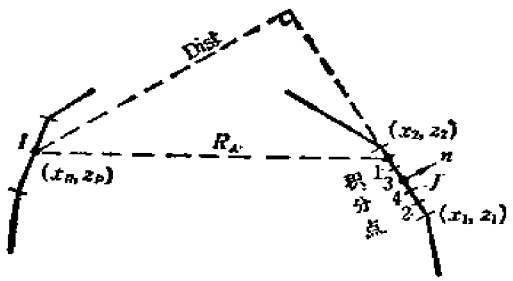


图 4.2 边界元法

4.3 有压渗流

有压渗流的计算域边界和边界条件是固定的，可以很方便地应用有限元法和边界元法计算。

4.3.1 有限元解法

如图 4.1，ab 和 ef 为第一类边界，cd 和 fa 为第二类边界，bc 和 ed 如果离感兴趣的渗流区足够远，既可当作第一类边界，也可当作第二类边界。设 n_i 为计算域内部结点数，nb_1 和 nb_2 分别为第一类和第二类边界的结点数，$n_t=n_i+nb_2$，则渗流的有限元公式可以由式(1.20)的第三式简化后得到

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^{33}h_j=f_i^3 \tag{4.9a}$$

或考虑 $n=n_i+nb_1$ 并去掉角标后改写为

$$\sum_{j=1}^{ni} k_{ij}h_j=f_i-\sum_{j=1}^{nb_1} k_{ij}n_j \tag{4.9}$$

f_i 为 i 结点的净流出水量，对已知入渗量的边界点 f_i 是给定的，对内部结点和不透水边界点均为零。

水头求出后，通过单元中某一截面的渗流量按下式计算

$$Q=-k_x l_z\sum_{i=1}^{ne}\frac{\partial N_i}{\partial x}h_i-k_z l_x\sum_{i=1}^{ne}\frac{\partial N_i}{\partial z}h_i \tag{4.10}$$

其中 n_e 为单元内结点数，l_x 和 l_z 为计算截面在 x 和 z 轴上的投影。总渗流量一般用中间截面法进行计算，即在单元形态比较规则的地方通过各单元中间连一截面，然后把各单元算出的渗流量累加起来。

4.3.2 边界元解法

势流问题的边界元公式可以写为[7]

$$\frac{1}{2}h_i+\sum_{j=1}^{nb}a_{ij}h_j+\sum_{j=1}^{nb}b_{ij}q_j=0 \qquad (i=1,\ nb) \tag{4.11}$$

q_j 为 j 结点的法向比流量，nb 为边界结点数。如果 nb_1 和 nb_2 $(nb_2=nb-nb_1)$ 分别为第一类和第二类边界结点数，上式可以分列为

$$\frac{1}{2}h_i+\sum_{j=1}^{nb_1}b_{ij}q_j+\sum_{j=nb_1+1}^{nb}a_{ij}h_j=-\sum_{j=1}^{nb_1}a_{ij}\tilde{h}_j-\sum_{j=nb_1+1}^{nb}b_{ij}\tilde{q}_j \quad (i=1,\ nb_1) \tag{4.12a}$$

$$\sum_{j=1}^{nb_1}b_{ij}q_j+\sum_{j=nb_1+1}^{nb}a_{ij}h_j=-\frac{1}{2}\tilde{h}_i-\sum_{j=1}^{nb_1}a_{ij}\tilde{h}_j-\sum_{j=nb_1+1}^{nb}b_{ij}\tilde{q}_j \quad (i=nb_1+1,\ n_b) \tag{4.12b}$$

对于非均质土，可以把计算域划分成几个大块，每块内渗透系数为常量。此时，每块的边界应划分成三部分。设 nl_1、nl_2 为第 l 块的一、二类边界结点数，nl_3 为 l 块与 $l+1$ 块的交界点数，$nl=nl_1+nl_2+nl_3$，则根据交界线上连续条件可得

$$\left.\begin{aligned} h_i^l&=h_i^{l+1}\\ q_i^l&=-q_i^{l+1} \quad (i=1,\ nl_3)\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

即对每一条交界线，增加了 $2nl_3$ 个未知数，但同时增加了同样个数的方程式。

系数 a_{ij} 和 b_{ij} 代表 j 段边界对 i 结点的影响系数，可由无限平面内点源作用下的基本解积分得出

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}&=\int_{\Gamma_j}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_i d\Gamma_j\\ b_{ij}&=\frac{1}{k}\int_{\Gamma_j}(h)_i d\Gamma_j\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

其中

$$h=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.15}$$

为基本解，r 为计算点到点源的距离。采用 4 个积分点，设 w_p 为各点的权函数，上式的数值积分公式可以写为

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left\{\ln\frac{1}{(R_A)_p}\right\}w_p\,\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2}}{2} \\ b_{ij} &= \frac{1}{2\pi k}\sum_{p=1}^{4}\ln\frac{1}{R_A}w_p\,\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

当 $i=j$ 时

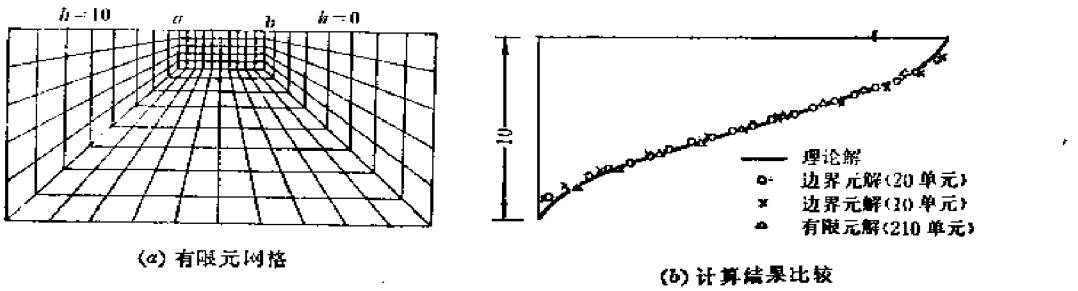
$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \\ b_{ij} &= \frac{1}{2k} \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

上述计算只适用于各向同性土。对于各向异性土，设坐标 x_1 和 x_2 方向的渗透系数分别为 k_1 和 k_2，计算域应先用 $x_2'=x_2\sqrt{k_1/k_2}$ 变换，并令 $k=\sqrt{k_1k_2}$ 代入上式。

当 b_1 边界上的 q_j 和 b_2 边界上的 h_j 求出后，计算域内任意点的水头可按下式计算

$$h_i=-\sum_{j=1}^{nb}b_{ij}q_j-\sum_{j=1}^{nb}a_{ij}h_j \tag{4.18}$$

下面附上边界元计算中关于形成基本方程式(4.12)的子程序，系根据文献[7]改写。图 4.3 为应用边界元法求解有压渗流的一个算例[8]，图中 a 为有限元网格，b 为边界 ab 段上划分 20 个边界元和 10 个边界元的计算结果，并与理论解和有限元的计算结果比较。



(a) 有限元网格　　(b) 计算结果比较

图 4.3 地基渗流边界元算例

P.4.1 势流边界元程序

【功能】 按式(4.16)和(4.17)计算系数 a_{ij} 和 b_{ij}，并最终形成总体方程式

【标识符】

N——单元总数

X，Z——单元连接点坐标

G1——积分点局部坐标

OME——积分点权值

G，H——式(4.16)和式(4.17)中 a_{ij} 和 b_{ij} 乘以 2π

FI——边界上已知水头或流量

DFI——荷载项，见式(4.12a、b)右边

KODE——边界条件，0 代表水头已知；1 代表流量已知

【说明】 本子程序系由文献 [7] 中 Program 1 的 FMAT、LITE 和 INLO 三个子程序合并而成。

```
      SUBROUTINE FMAT
      COMMON N,KODE(100),FI(100),
     * X(100),Z(100),G(100,100),
     * H(100,100),DFI(100)
      DIMENSION G1(4),OME(4)
      A=0.861133631
      B=0.33998104
      C=0.34785485
      G1(1)=A
      G1(2)=-A
      G1(3)=B
      G1(4)=-B
      OME(1)=C
      OME(2)=C
      OME(3)=1-C
      OME(4)=1-C
      X(N+1)=X(1)
      Z(N+1)=Z(1)
      DO 300 I=1,N
      XP=(X(I)+X(I+1))/2
      ZP=(Z(I)+Z(I+1))/2
      DO 300 J=1,N
      X1=X(J)
      Z1=Z(J)
      X2=X(J+1)
      Z2=Z(J+1)
      AX=(X2-X1)/2
      BX=(X2+X1)/2
      AZ=(Z2-Z1)/2
      BZ=(Z2+Z1)/2
      SR=SQRT(AX**2+AZ**2)
      IF(I.EQ.J) GOTO 250
      IF(AX.EQ.0.) GOTO 120
      TA=AZ/AX
      DIST=ABS(TA*XP-ZP+Z1-TA*X1)/
     * SQRT(TA**2+1)
      GOTO 130
  120 DIST=ABS(XP-X1)
  130 SIG=(X1-XP)*(ZZ-ZP)-(X2-XP)*
     * (Z1-ZP)
      G(I,J)=0.0
      H(I,J)=0.0
      IF(SIG.LT.0.0) DIST=-DIST
      DO 140 K=1,4
      XC=AX*G1(K)+BX
      ZC=AZ*G1(K)+BZ
      RA=SQRT((XP-XC)**2+(ZP-ZC)**2)
      G(I,J)=G(I,J)+LOG(1/RA)*
     * OME(K)*SR
  140 H(I,J)=H(I,J)-DIST*OME(K)*
     * SR/RA**2
      GOTO 300
  250 G(I,I)=2*SR*(ALOG(1/SR)+1)
      H(I,I)=3.1415926
  300 CONTINUE
      DO 500 J=1,N
      IF(KODE(J).EQ.0) GOTO 500
      DO 400 I=1,N
      CH=G(I,J)
      G(I,J)=-H(I,J)
      H(I,J)=-CH
  400 CONTINUE
  500 CONTINUE
      DO 600 I=1,N
      DFI(I)=0
      DO 600 J=1,N
      DFI(I)=DFI(I)+H(I,J)*FI(J)
  600 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.4 自由面渗流

在堤坝、渠道和地下水流计算中，自由面或浸润面事先是不知道的，因此计算域本身是未知的。自由面渗流计算是渗流计算中一个突出的难题，曾吸引不少学者进行研究。

早期的研究工作是用试算法不断改变自由面的位置，直到计算结果满足下列自由面上的边界条件为止[9,10]

$$h = z \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \tag{4.20}$$

计算中把自由面当作不透水面，所以条件(4.20)自动满足，而式(4.19)则一般不满足。如果某一结点在第 i 次计算中假定的结点高程为 z^i，求得的结点水头为 h^i，不满足式 (4.19) 的条件，则利用下列公式计算新的坐标

$$z^{i+1} = z^i + \alpha(h^i - z^i) \tag{4.21}$$

α 为 1 或接近 1 的常数。然后用新坐标进行下一轮计算。如此迭代下去，直至自由面上所有结点满足 $h - z < \varepsilon$ 的精度要求，ε 可取最大水头差的 1%。

在修改自由面过程中，为了避免出现畸形单元，有时还需修改自由面以下结点的坐标。当采用三角形单元时，如果初始自由面假定过高，修改以后的单元可能过扁，此时最好同时

采用丢单元的办法。另外，渗出段上的边界条件也为 $h=z$，但不满足 $\frac{\partial h}{\partial n}=0$，因此，如果原来假定的逸出点 e 丢弃或下移，渗出段上另一点 e' 变成新的逸出点时，就应相应地修改该点的边界信息(图 4.4)。

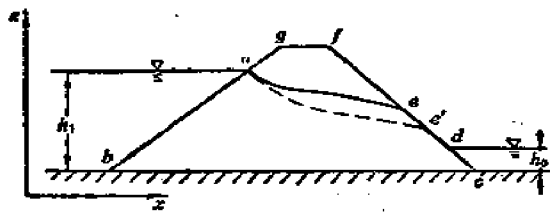


图 4.4 自由面渗流

近年来发展的另一个途径是把自由面以上的非饱和区和自由面以下的饱和区同时进行计算。计算所得的零孔隙压力线即为满足 $h=z$ 条件的自由面[11]。具体计算时把渗流域分成非饱和的负压区，饱和的正压区和过渡区三部分，并把渗透系数随孔隙压力的变化简化成三段折线，假定负压区的渗透系数很小，等于饱和区的 1/100，过渡区内渗透系数随孔隙压力 $p=\rho g(h-z)$ 直线变化(图 4.5)。此时，按图 4.4 的边界条件如下

$$\left.\begin{array}{ll} ab \text{ 和 } ag & h=h_1 \\ bc \text{ 和 } fg & \dfrac{\partial h}{\partial n}=0 \\ cd & h=h_0 \\ de \text{ 和 } ef & h=z \end{array}\right\} \qquad (4.22)$$

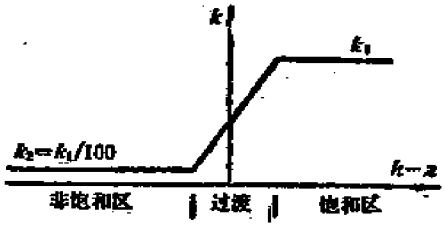


图 4.5 自由面附近的渗透系数

由于过渡区内的渗透系数随孔隙压力而变，此项计算也要用迭代法进行。为了提高计算精度，自由面附近的单元应当密一些，近来更有人采用自动加密网格的技术[12]。

上述计算中研究的重点是饱和区，但为简单起见对非饱和区采用同样的计算模型，只是假定渗透系数不一样。真正考虑非饱和区特性的计算方法将在以后介绍。

下面附上一段修改自由面的子程序。

P.4.2 自由面修改程序

【功能】 计算的水头不满足自由面边界条件时，按式(4.21)修改自由面结点坐标

【标识符】

NG——两次迭代中误差超过允许值的结点数

NF——自由面结点数

IF——自由面结点号，从上游向下游排列

XP、ZP——结点坐标

H——结点水头

Z_0——上一自由面结点 Z 坐标

EPS——允许误差

AF——结点移动路线的斜率 $\Delta x/\Delta z$

R——结点自由度，小于 0 为水头已知点

【说明】 ① 此处式(4.21)中的 α 取为 1/1.5

② 105—110 为修改自由面以下的结点坐标，保证原来位于下面的结点修改后仍低于上面结点，相差不小于 EDS/10

③ 本程序段摘自南京水科院土工所平面稳定渗流程序 SFLOW，程序中采用四边形 4 结点等参数单元

```
      SUBROUTINE RFRES
      COMMON NG,NF,IF(50),XP(500),
     * ZP(500),H(500),EPS,AF(50),
     * R(500)
100   NG=0
      ZO=10000.
      DO 120 I=1,NF
      IP=IF(I)
      X=XP(IP)
      Z=ZP(IP)
      HI=H(IP)
      IF(HI.GT.ZO) HI=ZO
      DH=HI-Z
      IF(ABS(DH).LT.EPS) GOTO 120
      NG=NG+1
      Z2=Z+DH/1.5
      X2=X+AF(I)*DH/1.5
      XP(IP)=X2
      ZP(IP)=Z2
105   IQ=IP
      DO 110 J=1,10
      IQ=IQ-1
      Z2=Z2-EPS/10
      Z1=ZP(IQ)
      IF(Z1.LT.Z2) GOTO 120
      X2=X2-EPS*AF(I)/10
      Z1=Z2
      ZP(IQ)=Z2
      XP(IQ)=X2
      IF(R(IQ).LT.0) H(IQ)=Z2
110   CONTINUE
      ZO=HI
120   CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.5 不稳定渗流

前面讨论的是渗流场不随时间变化的情况，称为稳定渗流。随时间缓慢变化的渗流称不稳定渗流。随动力荷载迅速变化的渗流问题需结合土骨架的变形同时计算，此处不加讨论。水库中水位降落时的渗透力将对土坝上游边坡造成不利的影响，容易产生滑坡，是不稳定渗流计算的主要对象。

如果不考虑水体的压缩性，不稳定渗流的控制方程式仍如式(4.7)，只是边界条件随时间而变。特别在自由面渗流中，自由面也将是变的，因此称为动边界。此时，自由面上除应满足 $h=z$ 的条件外，还应满足下列边界条件[5]

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{n_e}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial h}{\partial z}\right] \tag{4.23a}$$

或略去二次项后

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{k}{n_e}\frac{\partial h}{\partial z}=0 \tag{4.23b}$$

式中 n_e 为有效孔隙率，即除去结合水后的孔隙率，相当于单位土体的孔隙中自由水的含量。许多文献把式(4.23b)写成

$$-k\frac{\partial h}{\partial n}=\mu\frac{\partial h}{\partial t}\cos\theta \tag{4.23}$$

并把 $\mu=n_e$ 称为给水度。此式的物理含义是，进入自由面的水量恰为自由面变动区的土体(图 4.6 中阴影区)内所含的水量。

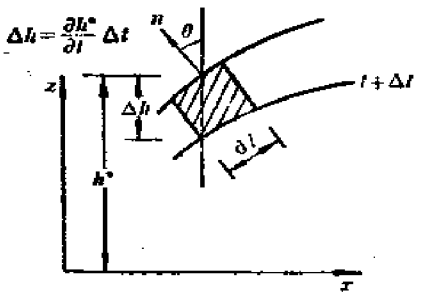


图 4.6 动边界条件

把 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 写成差分式 $\frac{1}{\Delta t}(h-h_0)$，$h_0$ 为上一时段的水头值，并代入有限元插值公式 $h=\Sigma N_j h_j$，则由式(4.23)可得 i 结点的渗出量为

$$f_i=-\sum_{j=1}^{nf}b_j(h_j-h_{j0}) \tag{4.24}$$

nf 为自由面结点数，$b_j=\frac{\mu}{\Delta t}\int N_j\mathrm{d}x$。如此，前面的有限元公式(4.9)可以改写为

$$\sum_{j=1}^{nf}k_{ij}h_j+\sum_{j=1}^{nf_2}b_jh_j=\sum_{j=1}^{nf}b_jh_{j0}-\sum_{j=1}^{nb_1}k_{ij}h_j-\sum_{j=1}^{nf_1}b_jh_j\quad(i=1,\ nt)\tag{4.25}$$

其中 $nf_2=nf-nf_1$，nf_1 为自由面上水头已知结点数，一般是它与上、下游坝面的交点，而 nt 中仍包括自由面结点 nf_2，nb_1 则为包括 nf_1 在内的所有水头已知结点。由于自由面结点上还必须满足 $h=z$ 的条件，故对每一时段 Δt 还须象上节一样进行自由面位置的迭代计算。

下面介绍一段水位降落时自由面结点上按式 (4.25) 计算的子程序[13]。图 4.7 为相应的算例。

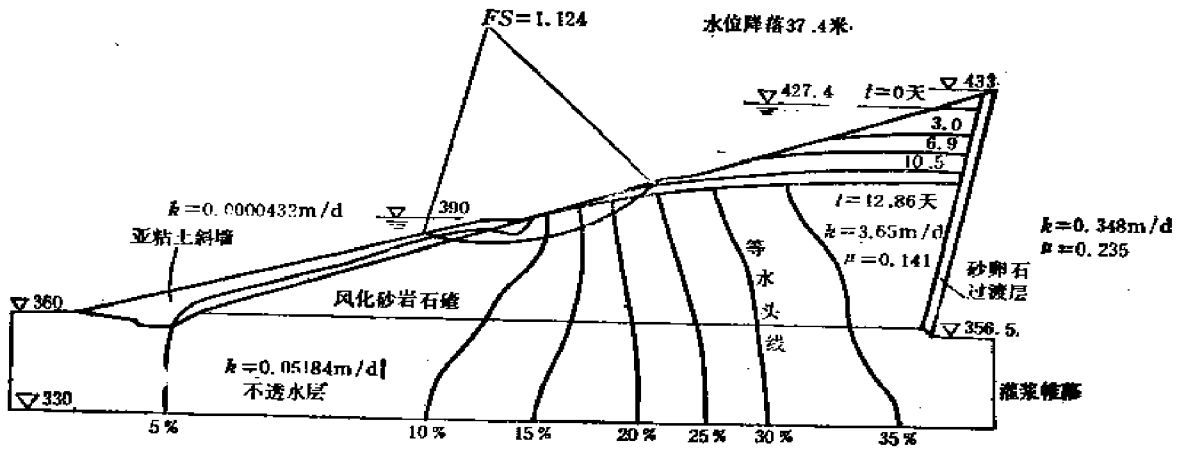


图 4.7 水库水位下降时上游坡的不稳定渗流

P.4.3 自由面变动时渗流计算程序

【功能】 按式(4.25)计算系数 k_{ij} 及其右端项

【标识符】

DT——时间步长

NN、NF——自由面结点数及各点编号

HP——给水度

XZ——结点坐标(1-x 方向；2-z 方向)

H_0，H——结点水头的初值和终值

R——结点自由度编号，小于 0 为水头已知点

F——右端项

G、M——一维存贮的系数矩阵元素及主对角元素编号

AR——式(4.25)中的 b_j

【说明】 该程序采用三角形单元，此时

$b_j=\frac{\mu\Delta x}{3\Delta t}$ $(i=j)$ 或 $b_j=\frac{\mu\Delta x}{6\Delta t}$，$\Delta x$ 为该单元自由面边长在水平轴上的投影。

```
      SUBROUTINE DRAWAL
      COMMON DT,NN,NF(40),XY(500,2),
     * HP(40),HO(500),H(500),R(500),
     * F(500),M(500),G(10000)
      INTEGER P,S,Q,T
      DO 30 I=1,NN-1
      P=NF(I)
      S=R(P)
      Q=NF(I+1)
      T=R(Q)
      IF(S.LT.O.AND.T.LT.O) GOTO 30
      X1=HP(I)
      AR=ABS(XZ(P,1)-XZ(Q,1))*X1/6/DT
      H1=HO(P)
      H2=HO(Q)
      IF(S.LT.O) GOTO 10
      IF(T.LT.O) GOTO 20
      F(S)=F(S)+AR*(2*H1+H2)
      F(T)=F(T)+AR*(2*H2+H1)
      J=M(S)
      G(J)=G(J)+AR+AR
      J=M(T)
      G(J)=G(J)+AR+AR
      IF(S.LE.T) THEN
      J=M(T)-T+S
      G(J)=G(J)+AR
      ELSE
      J=M(S)-S+T
      G(J)=G(J)+AR
      ENDIF
      GOTO 30
   10 J=M(T)
      G(J)=G(J)+AR+AR
      F(T)=F(T)+AR*(2*H2+H1-H(P))
      GOTO 30
   20 J=M(S)
      G(J)=G(J)+AR+AR
      F(S)=F(S)+AR*(2*H1+H2-H(Q))
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

4.6 非饱和土渗流

非饱和土渗流的数学模型有两种表达方法。一种是仍以孔隙水头或孔隙压力为变量，但此时应考虑水的密度随孔隙压力变化，故在推导中式(1.6)的体积连续条件应改用质量连续条件。考虑到单位土体中所含的水质量为 $ns\rho_w$，而质量流为 $\rho_w q=-\rho_w k\nabla h$，故式(4.6)应改写为

$$\nabla^T\rho_w k\nabla h=\frac{\mathrm{d}(ns\rho_w)}{\mathrm{d}t} \tag{4.26a}$$

或

$$\nabla^T\rho_w k\nabla h=\beta_m\frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.26}$$

对于刚性骨架，$n=\text{const}$，且 $\dfrac{\partial p}{\partial t}=\dfrac{\partial h}{\partial t}$，故

$$\beta_m=n\frac{\mathrm{d}(s\rho_w)}{\mathrm{d}p} \tag{4.27}$$

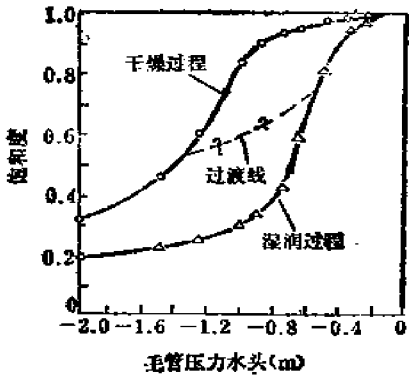


图 4.8 土体水分特征线

β_m 值可根据图 4.8 饱和度 s 与负压的关系的试验曲线得出，设 h^0 为 t 时刻的水头，$h^1=h^0+\Delta h$ 为 $t+\Delta t$ 时刻的水头，如取式(4.26)左边的 h 为 $h^0+\alpha\Delta h$，α 为 0.5～1.0 之间的常数，此式可以写成下列差分形式

$$\alpha\Delta t\cdot\nabla^T\rho_w k\nabla h^1-\beta_m h^1=(1-\alpha)\nabla^T\rho_w k\nabla h^0+\beta_m h^0 \tag{4.28}$$

下面用差分法求解式(4.28)。令 i 为差分网格的结点，在其周围划出 i 点所代表的单元(图 4.9)，则该式沿此单元积分后可得

$$\sum_{j=1}^{m}(\rho_w k)_{ij}\Gamma_{ij}\{\alpha(\nabla h^1)_{ij}-(1-\alpha)(\nabla h^0)_{ij}\}\Delta t=\beta_m A_i(h_i^1-h_i^0) \tag{4.29}$$

其中 A_i 为单元面积，Γ_{ij} 为 i 与 j 单元交界线长，m 为与 i 相邻的单元个数。取 $\alpha=\dfrac{2}{3}$，并令

$$Q_{ij}^0=(\rho_w k)_{ij}(\nabla h^0)_{ij}\Gamma_{ij},\quad Q_{ij}^1=(\rho_w k)_{ij}(\nabla h^1)_{ij}\Gamma_{ij}$$

且 $Q_{ij}^{1/2}=\dfrac{1}{2}(Q_{ij}^0+Q_{ij}^1)$，吴良骥把上式改写为[3]

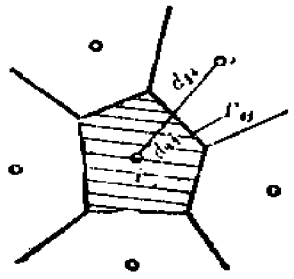


图 4.9 差分法的单元和结点

$$\sum_{j=1}^{m}(Q_{ij}^{0}+4Q_{ij}^{1/2}+Q_{ij}^{1})\frac{\Delta t}{6}=\Delta M_i \quad (i=1,n_t) \tag{4.30}$$

$\Delta M_i=\beta_m A_i(h_i^1-h_i^0)$，$nt$ 为结点总数。上式中 $(\rho_w k)_{ij}$ 取 i 和 j 两个单元的加权平均值

$$(\rho_w k)_{ij}=\frac{(\rho_w k)_i(\rho_w k)_j(d_{ij}+d_{ji})}{(\rho_w k)_i d_{ij}+(\rho_w k)_j d_{ji}} \tag{4.31}$$

$d_{ij}=d_{ji}$ 为两结点的间距，而两点间的水力梯度 $(\nabla h)_{ij}$ 则按下列差分式计算

$$(\nabla h)_{ij}=\frac{h_j-h_i}{d_{ij}+d_{ji}} \tag{4.32}$$

另一种方法是以含水量 w 为变量[15]。令 $D=\dfrac{k}{\rho_w g}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}w}$ 为传导系数，并不计水体密度的变化，考虑到 $\nabla h=\nabla z+\dfrac{1}{\rho_w g}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}w}\nabla w$ 和 $\beta_m=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p}$，则式(4.6)可以改写为

$$\nabla^T D\nabla w+\frac{\partial}{\partial z}k=\frac{\partial w}{\partial t} \tag{4.33}$$

黄俊等[15]对 D 和 k 采用了下列经验关系式：

$$D(w)=D_0+D_1w+D_2w^2$$

$$k(w)=k_0+k_1w+k_2w^2$$

D_0、D_1、D_2 和 k_0、k_1、k_2 为经验常数。上式用有限单元法离散后得下列单元方程式

$$\bar{D}_e\sum_{j=1}^{3}a_{ij}w_i-\frac{1}{2}\bar{k}_e c_i+\sum_{j=1}^{3}s_{ij}\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}t}=f_i \tag{4.34}$$

$\bar{D}_e$ 和 $\bar{k}_e$ 为 D 和 k 在单元中的平均值，采用三角形单元时

$$a_{ij}=\frac{1}{4A}(b_ib_j+c_ic_j)$$

$$s_{ij}=\frac{A}{6}\delta_{ij}\quad\left(\delta_{ii}=1,\ i\neq j\text{ 时 }\delta_{ij}=\frac{1}{2}\right)$$

A 为三角形面积，b_i 和 c_i 为 i 结点对边的垂直和水平投影，f_i 为结点渗入水量。

以上计算假定非饱和区中气流畅通无阻，空隙气压力均为大气压力，对水流无影响。考虑孔隙气流和水流相互影响的渗流理论目前正在发展之中[16]。

下面介绍非饱和土渗流的差分法计算程序中的两个子程序。图 10 为应用上述程序的算例。

P.4.4 非饱和土渗流差分法计算程序

【功能】 子程序 SEEM 计算通过边界的流量，并估算下一时段各结点水头增量；子程序 CONER 统计各结点水量和水头误差，大于控制值时继续迭代

【标识符】

NCON——单元之间边界总数

NOD_1、NOD_2——该边界左、右两边结点号

ZIP——单元周边传导系数之和

$TRAN_1$、$TRAN_2$、$TRAN_3$——时段初、时段末和时段中的单元传导系数，即式(4.29)的

$(\rho_w k)_{ij}\Gamma_{ij}/(d_{ij}+d_{ji})$

Z——结点垂直坐标

DPSI——结点压力水头增量 dh

PSI_3——式(4.29)中的 α，但程序中按变量考虑以增加收敛速度

DELT——时段长 ΔT

FEX——Δt 内通过某边界流入单元的质量

DF——Δt 内经各界面流入单元的质量和

FI——各时段流经某边界的质量的累加值

DLONG——最大压力

DWIDE——最大流量

DDPSI——下一时段压力增量的估算值

NODES——结点总数

ERRS、$ERRS_1$——压力精度和流量精度的控制误差

SLIM——单元水量变化的累计值

CAPM——式(4.27)之系数 β

CAP_2——单元含水量

KWIT——等于－1 时继续迭代

```
      SUBROUTINE SEEN
      COMMON NOCDN,NOD1(400),NOD2
     * (400),X(400),Z(400)
     * /C1/DELT,DLONG,DWIDE,DF
     * (400),DFI(400)
     * /C2/DPSI(400),ZIP(300)
     * /C3/TRAN1(300),TRAN2(300),
     * TRAN3(300),S2(300),PSI(400),
     * DDPSI(400)
      DO 100 N=1,NOCDN
      N1=NOD1(N)
      ZIP(N1)=ZIP(N1)+TRAN2(N)
      N2=NOD2(N)
      ZIP(N2)=ZIP(N2)+TRAN2(N)
      FEX=Z(N2)-Z(N1)
      X4=DPSI(N2)-DPSI(N1)
      X1=PSI(N2)-PSI(N1)+FEX
      X2=X1+X4
      X5=X2*TRAN2(N)
      X3=X1+X4*AMAXL(PSI3(N1),
     * PSI3(N2))
      FEX=DELT*(TRAN1(N)*X1+X5+
     * 4*TRAN3(N)*X3)/6.
      X1=ABS(X1)
      X2=ABS(X2)
      X1=AMAXL(X1,X2)
      DLONG=AMAXL(X1,DLONG)
      DFI(N)=FEX
      DF(N1)=DF(N1)+FEX+FI(N)
      DF(N2)=DF(N2)-FEX-FI(N)
      FEX=ABS(FEX)
      DWIDE=AMAXL(DWIDE,FEX)
      X6=X5
      IF(S2(N1).GE.0.) X6=DPSI(N2)
      DDPSI(N1)=DDPSI(N1)+X6
      X6=-X5
      IF(S2(N2).GE.0.) X6=DPSI(N2)
      DDPSI(N2)=DDPSI(N2)+X6
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CONER
      COMMON ERRS,ERRS1,KWIT,NODES
     * /C1/DELT,DLONG,DWIDE,DF(400)
     * /C2/DPSI(400),ZIP(300),CAPU
     * (300),CAP2(300),SLIM(400)
      X3=DLONG*ERRS
      DO 400 N=1,NODES
      X2=DF(N)-SLIM(N)
      X1=X2/(CAMP(N)+DELT*ZIP(N))
      ESUM=ABS(X2)
      EMAX=ABS(X1)
      X4=AMAXL(DWIDE,CAP(N))*ERRS1
      IF(EMAX.GT.X3.OR.ESUM.GT.X4)KWIT=-1
      DPSI(N)=DPSI(N)+X1
  400 CONTINUE
      RETURN
      END
```

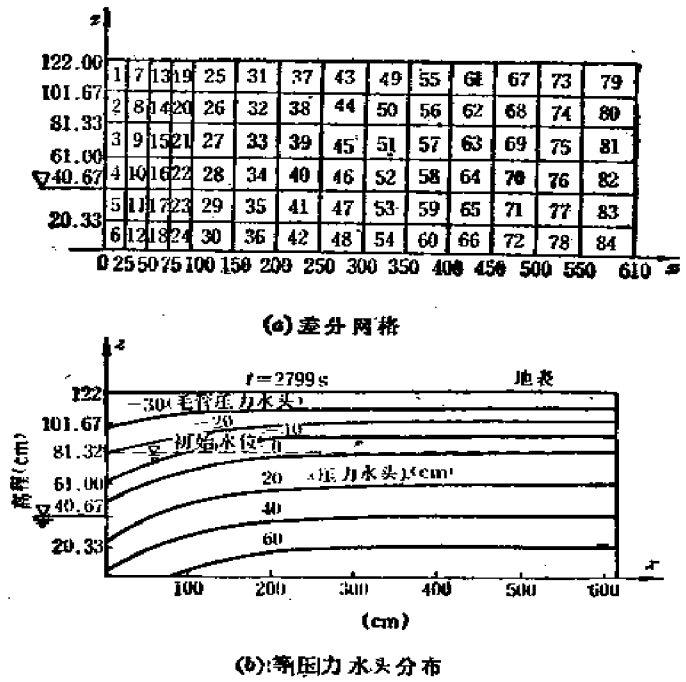


图 4.10 地下水位下降时的土壤水计算

4.7 地下水渗流

一般说来，地下水的无压渗流属三维自由面渗流问题。但是，当自由面的变化比较缓慢(缓变流)时，可以采用 Dupuit 的假设：任一垂线上的水头等于常量，并等于自由面上的位置水头，相应各点的流速也为常量。以自由面水头 H 为场变量，$V_x=-k\frac{\partial H}{\partial x}$，$V_y=-k\frac{\partial H}{\partial y}$ 为通过某一垂线的平均流速，则根据某一 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 面上水柱内水量平衡条件可得(图 4.11)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kH\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(kH\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\varepsilon=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.35}$$

其中 ε 为单位面积上的渗入或蒸发水量，μ 为单位土体内饱和含水量与毛细管含水量之差，即前面提到过的给水度。此式称为 Boussinesq 公式，可以用二维有限元法求解[17]。

对稳定平面流的简单情况，可用式(4.35)求得简单的解析解，在图 4.12 中通过截面 1

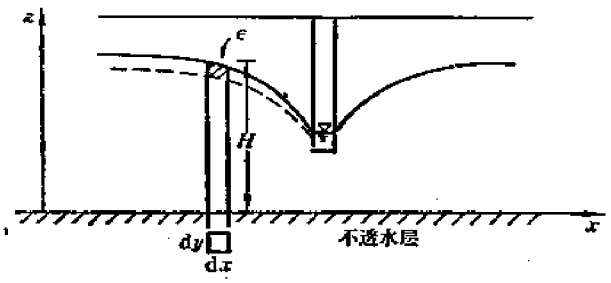


图 4.11 地下水渗流

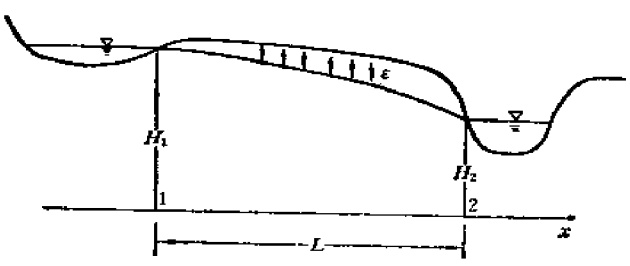


图 4.12 稳定流的解析解

和2的流量及自由面公式分别为

$$q_1 = -\frac{k(H_1^2 - H_2^2)}{2L} - \frac{\varepsilon L}{2} \tag{4.36a}$$

$$q_2 = -\frac{k(H_1^2 - H_2^2)}{2L} + \frac{\varepsilon L}{2} \tag{4.36b}$$

$$H^2 = H_1^2 - \frac{2q_1}{k}x - \frac{\varepsilon}{k}x^2 \tag{4.37}$$

式(4.37)表明自由面是一条抛物线。地下水渗流中许多简化计算公式都是从上述公式出发推导而得的。

参 考 文 献

1. 郭尚平等，渗流力学的新发展，力学进展，16卷4期，1986.
2. R. K. Rowe and J. R. Booker, The analysis of multiple-contaminent migration through a homogenous soil, 5th Int. Conf. Num. Methods in Geomechs, Vol.1, p.581, 1985.
3. 吴良骥、G. L. Bloomaburg，饱和-非饱和区中渗流问题的数值模型，水利水运科学研究，1985年1期。
4. O. C. Zienkiewicz，张佑启，Finite element in the Solution of field problems, The Engineer, Vol. 220, No. 5710, 1965.
5. J. Bell，多孔介质流体动力学，建筑工业出版社，1983.
6. 黄文熙主编，土的工程性质，第二章，水利出版社，1983.
7. C. A. Brebbia, The boundary element methods for engineers, Pentch Press, 1978.
8. 张有天、张武功，半无限域渗流问题的边界元方法，水利学报，1981年第4期.
9. W. D. L. Finn, Finite element analysis of seepage through dams, J. SMFD, ASCE, Vol.93, SM6, 1967.
10. 李春华，稳定渗流的有限元计算和决定自由面位置的一种方法，水利水电科学研究院科学研究论文集第八集(岩土工程)，水利电力出版社，1982.
11. K. J. Bathe and M. R. Khoshgoftan, Finite element for surface seepage analysis without mesh iteration, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechs, Vol. 3, pp.3—32, 1979.
12. E. Rank and H. Werner, An adaptive finite element approach for the free surface seepage problem, Int. J Num. Methods in Engineering, Vol. 23, No.7, 1986.
13. 李祖贻等，土坝二向渗流的有限元法计算与坝坡稳定分析，水利水运科学研究，1980年2期。
14. S. P. Neuman, Saturated-unsaturated seepage by finite elements, J.HYD, ASCE, HY12, 1973.
15. 黄俊、孙玉生，土坝坝体水份分布状态的数学模型和计算方法，岩土工程学报，7卷2期，1985.
16. A. T. Corey, Mechanics of heterogeneous fluid in porous media.
17. 孙纳正，地下水流的数值模型和数值方法，地质出版社，1981.

第五章　总应力分析

5.1　概述

对于非饱和土地基以及饱和粗粒土地基，或者由强透水性土料组成的土坝路堤，当孔隙水压力的大小微不足道时，就可以用总应力法分析其应力和形变。此外，由于该法比较简单，也经常用以分析饱和粘性土的应力和形变状态。根据土体中的应力变化和孔隙水压力系数也可以求得饱和土中的有效应力分布。更严密的有效应力分析在第六章中讨论。

在总应力分析中，既可以作线性弹性的应力应变分析，也可以进行非线性的应力应变分析。线性分析是非线性分析的基础。有一些非线性问题还可以用逐段线性化来近似。

在非线性分析中大量使用增量法（5.2.1节）。其最大优点在于能模拟荷载逐步施加的过程，从而掌握土体形变和应力的演变规律。迭代法（5.2.2节）则是对拟定的近似解作一系列修改，使之最终满足平衡条件和位移连续性条件。而增量迭代法（5.2.3节）则吸取了上述两种方法的优点。

填方和挖方（5.3节）是岩土工程中经常遇到的课题。前者的计算域逐步扩大，土体单元的围压逐步增加。后者的计算域则逐步缩小，土体单元的围压逐步降低。对填方或挖方作总应力分析，可以了解应力场和位移场的变化，为改进施工措施提供依据。

土-结构物相互作用是个新课题。在第5.4节中讨论土与结构物的相互影响与相互抑制作用。这些相互作用通常在基础、地下结构与土相接触的界面上发生。如何模拟两种不同材料（例如混凝土与土）之间的接触性质对改进计算分析有重要影响。在5.5节中讨论接触单元的特性和使用并涉及如何决定接触单元的计算参数。一般说来，考虑接触界面上摩擦阻力的存在，有益于工程设计。

5.2　非线性分析

土体在未达到其极限状态以前的使用荷载作用下，应力水平较低，可以当作线性弹性体看待。然而有一些土，尤其是饱和软粘土，即使在较低的应力水平已具有明显的非线性，而必须进行非线性分析。

计算土力学的一大优点在于有可能用数值方法对大多数非线性问题作定量的分析，据以了解整个位移场的分布和应力集中的部位；可以掌握土中塑性区的开展以及为了抑制其开展而应采取的工程措施；可以模拟土体在逐步加载或逐步卸载时应力和形变的发展过程。

土力学中的非线性问题可以归纳为物理非线性和几何非线性（大应变）两类。物理非线性是指土的本构关系是非线性的，而应变-位移关系仍然是线性的。土体在荷载作用下的位移与其几何尺度相比很小，因而在求出位移场以后可以用某单元原来的尺寸来计算应力场。土力学中大多数问题属于物理非线性的范畴。几何非线性表示土体几何形状的有限变化，将引起位移的很大变化。应变-位移关系不再是线性的，而应力-应变关系仍然是线性的。除

非象泥炭或吹填土的应变量达到30% 以上，一般不需作几何非线性分析。然而在变形局部化问题中，局部土体因拉伸而产生颈缩现象，大应变问题就可能占重要地位。

非线性分析的关键在于寻求能反映土体形变特性的本构关系以及确定其中的力学参数。将各个单元的劲度矩阵组合成总劲度矩阵的方法仍然和线性分析中的一样，但是建立荷载列向量的方法则有所不同。求解非线性问题的方法有增量法、迭代法和增量迭代法等三种。

5.2.1 增量法

土坝、路堤和机场跑道等填方工程都是分层夯实的。每次填筑的厚度比总厚度小很多。高层房屋是逐层修筑的，每层的荷载占总荷载的百分比很小。为了模拟加载过程而又不太增加工作量，只能把总荷载分为有限个，例如M个增量。每作用一次荷载增量$\{\Delta P\}_i$，形成一次平衡方程，解出位移增量$\{\Delta\delta\}_i$和相应的应力增量$\{\Delta\sigma\}_i$。把所有的荷载增量所产生的位移增量和应力增量分别相加，就得到最后的位移和应力。

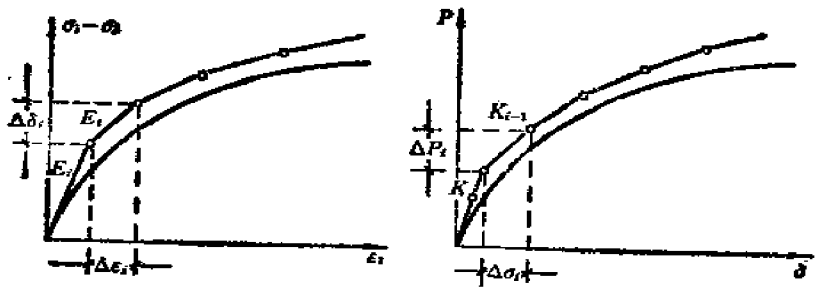


图 5.1 增量法

在增量法中，一般用切线模量E_t来建立劲度矩阵。当第一个荷载增量$\{\Delta P\}_1$作用时，则用初始切线模量E_i来建立(图5.1)。于是有

$$[K(E_i)]_0\{\Delta\delta\}_1=\{\Delta P\}_1 \tag{5.1}$$

由式(5.1)解出位移增量$\{\Delta\delta\}_1$以后，可以求出应变增量

$$\{\Delta\varepsilon\}_1=[B]\{\Delta\delta\}_1 \tag{5.1a}$$

和应力增量

$$\{\Delta\sigma\}_1=[D(\sigma_1-\sigma_3)]\{\Delta\varepsilon\}_1 \tag{5.1b}$$

这时的应力状态为

$$\{\sigma\}=\{\sigma_0\}+\{\Delta\sigma\}_1 \tag{5.2}$$

式中$\{\sigma_0\}$为土体自重引起的起始应力。根据式(5.2)可以求出与目前应力水平相应的切线模量E_t，据此建立劲度矩阵$[K]_1$，供第二级荷载增量分析之用。

不失一般性，对于第i级荷载增量$\{\Delta P\}_i$说来，利用上一级增量所建立的劲度矩阵$[K]_{i-1}$来求得$\{\Delta\delta\}_i$，即

$$[K]_{i-1}\{\Delta\delta\}_i=\{\Delta P\}_i \tag{5.3}$$

接着，根据当前的应力状态

$$\{\sigma\}_i=\{\sigma_0\}+\Sigma\{\Delta\sigma\}_i$$

建立劲度矩阵$[K]_i$，供第$i+1$级增量分析之用，直到$i=M$为止。

最终的位移$\{\delta\}$、应变$\{\varepsilon\}$和应力$\{\sigma\}$分别为

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= \{\delta_0\} + \sum_{i=1}^{M} \{\Delta\delta\}_i \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_0\} + \sum_{i=1}^{M} \{\Delta\varepsilon\}_i \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_0\} + \sum_{i=1}^{M} \{\Delta\sigma\}_i\end{aligned} \tag{5.4}$$

对于正常固结粘性土，初位移$\{\delta_0\}$和初应变$\{\varepsilon_0\}$等于零。

由此看来，增量法就是用一系列线性分析来逼近土体的非线性应力-应变关系。在每次增量分析中，劲度矩阵是常量，而在下一次分析中，则应根据该次分析中的应力水平重新建立。

在我国工程实践中经常使用由 Duncan-张金荣建立的双曲线非线性应力-应变关系(第三章)来进行增量分析，其中与应力水平 $s=(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 有关的切线模量 E_t 为

$$E_t = E_i\left(1-\frac{(\sigma_1-\sigma_3)_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_u}\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right)^2 = E_i(1-R_f s)^2 \tag{5.5}$$

其中初始切线模量 E_i 为

$$E_i = k p_a(\sigma_3/p_a)^n$$

$R_f=(\sigma_1-\sigma_3)_f/(\sigma_1-\sigma_3)_u$ 为破坏比，其它符号已在第三章说明。

下面是对上海地区有代表性的土层做了一系列固结排水和固结不排水三轴试验，并用最小二乘法求得 Duncan-张金荣模型中有关参数的平均值。

表 5-1 上海地区 Duncon-张金荣模型中的参数

土层	深度 (m)	ν	R_f	E_i/p_a	$(\sigma_1-\sigma_3)_f$ (kN/m²)
褐黄亚粘土表层	2.5～3.0	0.33	0.80	$54.10(\sigma_3/p_a)^{0.41}$	$31+1.35\sigma_3$
灰色淤泥质粘土	3～14	0.38	0.79	$106.80(\sigma_3/p_a)^{0.72}$	$33+0.50\sigma_3$
淤泥质粉质粘土	14～21	0.35	0.86	$93.50(\sigma_3/p_a)^{0.92}$	$40+0.64\sigma_3$
暗绿色可塑粘土	21～25	0.30	0.82	$54.40(\sigma_3/p_a)^{1.26}$	$78+1.22\sigma_3$

其中泊松比 ν 和破坏比 R_f 在同一土层中取为常量，而初始切线模量 E_i 和破坏时的剪应力 $(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 是固结应力 σ_3 的函数。在每次增量分析中应根据单元形心处的 σ_3 来求得有关参数，再按式(5.5)求各单元的 E_t 值。

假使把 Duncan-张金荣模型用于不排水条件下的总应力分析，不管土的种类如何，泊松比 ν 都取为 0.5 (在实际计算中取 ν 等于 0.48 或 0.49)，而不排水切线模量 E_u 应当用不固结不排水三轴试验测定。对于初次进行非线性分析的读者建议从较简单的本构关系入手。

5.2.2 迭代法

非线性分析中的迭代法是一系列逼近正确解的递推计算。在每次迭代中，土体受全部荷载作用，因此，又称为全量迭代法(图 5.2)。

迭代法又分为常劲度迭代和变劲度迭代两种。前者只需形成一次总劲度矩阵，但收敛较慢；后者在每次迭代时均需重新建立总劲度矩阵，但收敛较快。

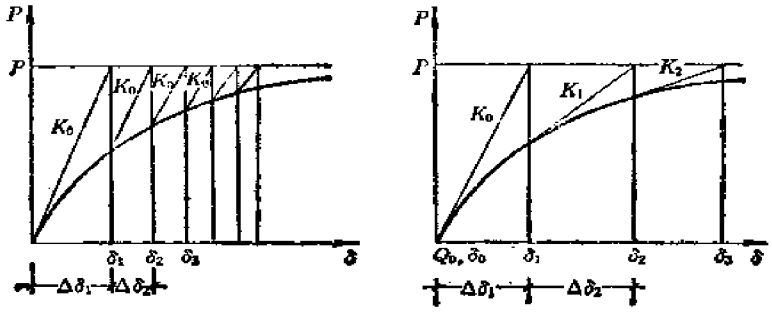


图 5.2 常劲度迭代和变劲度迭代

在迭代法中可以用切线模量 E_t 来建立劲度矩阵，但对于具有加工软化的土，则使用割线模量 E_s 更合适。

每次迭代相当于进行一次线性分析。由于所采用的单元劲度都是近似值，平衡条件得不到满足，因而出现不平衡荷载。求出此不平衡荷载，并与真实荷载加在一起，供下一次迭代计算之用。等到连续两次迭代的位移差或不平衡荷载的差值小于某一指定的限值时，迭代过程结束。因此，迭代法就是对某一暂定的解答逐次修改，最后使土体的平衡条件和位移连续性条件近似地得到满足。其基本思想可以用图 5.3 来说明。

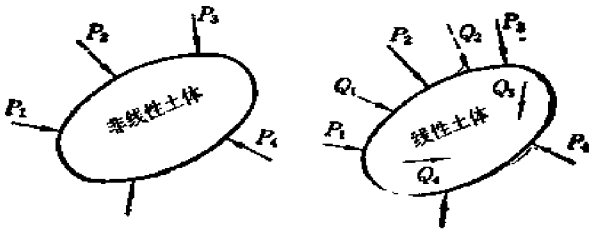


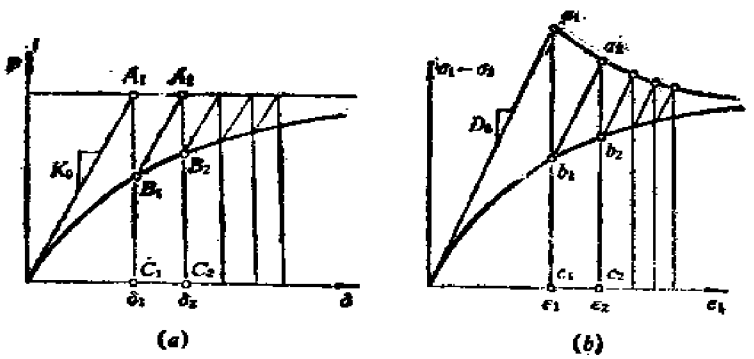
图 5.3 迭代法的基本思想

对在外界荷载{P}作用下的非线性土体进行应力和变形分析，可以转化为对同一土体作线性分析。后一种情况因不能满足平衡条件而产生不平衡荷载{Q}。此不平衡力实际上是一种"虚假的荷载"。求出{Q}值并与外界荷载{P}加在一起，对土体作线性分析，从而使土体的变形与非线性土体在{P}作用下的变形相等。

迭代法的具体步骤如下：

1. 由各单元的初始应力(或固结应力)所对应的初始切线模量 E_t 建立劲度矩阵 $[k]_0^e$，进而集合成总劲度矩阵 $[K]_0$，将全部外荷一次作用于土体上，并形成荷载列阵 $\{P\}$。求解方程组，得结点位移 $\{\Delta\delta\}_1$。

2. 为每个单元求出各高斯点上的应变 $\{\varepsilon\}$ 和弹性应力 $\{\sigma'\}_1$，它相当于图 5.4*b* 中的



(a) (b)

图 5.4 迭代法分析

a_1c_1 段，即

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x\ \varepsilon_z\ \gamma_{xz}\}^T=[B]\{\Delta\delta\}_1 \tag{5.6}$$

$$\{\sigma^e\}_1=[D_0]\{\varepsilon\} \tag{5.7}$$

由于 $\{\sigma^e\}_1$ 是按弹性分析而得到的应力状态，并不符合按非线性本构关系所对应的应力（b_1c_1 段）。于是出现对应的不平衡力 $\{Q\}_1$（A_1B_1）。与此相对应的应力 $\{\sigma_0\}$（a_1b_1 段）一般称为"初应力"，而正在讨论的方法则称为"初应力迭代法"。应当指出，这里的初应力纯粹是土力学中的一种概念，用以形成不平衡荷载列阵之用，与在建筑物出现以前由土体自重产生的天然应力状态毫不相干。

3．以常劲度迭代为例，第一次迭代中形成的初应力为

$$\{\sigma_0\}_1=[D_0]\{\varepsilon\}_1-\{\sigma\}_1 \qquad (\text{即 } a_1b_1=a_1c_1-b_1c_1) \tag{5.8}$$

式中右端第一项为假设土体为完全弹性体而求得的应力状态，而第二项为对应于非线性本构关系的应力状态。它的计算方法稍后一些将予说明。

与初应力 $\{\sigma_0\}_1$ 对应的不平衡结点荷载 $\{Q\}_1^e$ 为

$$\{Q\}_1^e=\int_V[B]^T\{\sigma_0\}_1dV \tag{5.9}$$

用各单元的不平衡荷载组成土体的不平衡荷载列阵

$$\{Q\}_1=\sum_e\int[B]^T\{\sigma_0\}_1dV$$

再与原先的 $\{P\}$ 构成新的右端项。从而有矩阵方程

$$[K]_0\{\Delta\delta\}_2=\{P\}+\{Q\}_1 \tag{5.10}$$

由式(5.10)解出 $\{\Delta\delta\}_2$。

4．求出 $\{\Delta\delta\}_2$ 以后，重复上述步骤，得

$$\{\sigma_0\}_2=[D_0]\{\varepsilon\}_2-\{\sigma\}_2 \tag{5.11a}$$

$$\{Q\}_2^e=\int_e[B]^T\{\sigma_0\}_2dV \tag{5.11b}$$

$$\{Q\}_2=\sum_{e=1}\int[B]^T\{\sigma_0\}_2dV \tag{5.11c}$$

$$[K]_0\{\Delta\delta\}_3=\{P\}+\{Q\}_2 \tag{5.11d}$$

在进行常刚度迭代时，劲度矩阵只形成一次。重复上述步骤，直到连续两次迭代的位移差值或不平衡力差值小于指定的限值为止。

迭代法的关键在于如何建立矩阵方程的右端项。一般说来，除了初应力 $\{\sigma_0\}$ 以外，还可能有初应变 $\{\varepsilon_0\}$ 存在。在正常固结粘土中，初应变为零。除了荷载因素以外，还可能由于温度变化、土的徐变以及由毛细应力而产生的收缩应变。把这些非荷载因素引起的应变统称为初应变。于是土的本构关系可写成

$$\{\sigma\}-\{\sigma_0\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}) \tag{5.12}$$

以 $\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e$ 以及式(5.12)代入单元结点力 $\{F\}^e$ 的表达式

$$\{F\}^e=\int_e[B]^T\{\sigma\}dV$$

中，于是有

$$\{F\}^e=\int[B]^T[D][B]dV\{\delta\}^e+\int[B]^T\{\sigma_0\}dV-\int[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV \tag{5.13a}$$

或
$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e+\{Q_{\sigma 0}\}^e-\{Q_{\varepsilon 0}\}^e \tag{5.13b}$$
或
$$[k]^e\{\delta\}^e=\{F\}^e-\{Q_{\sigma 0}\}^e+\{Q_{\varepsilon 0}\}^e \tag{5.13c}$$

等到把土体计算域中所有单元劲度矩阵集合成总劲度矩阵，并把式(5.13c)的右侧三项集合成总的右端项以后，便可以解出位移增量。在非线性迭代中，外荷载、初应力和初应变都可能对右端项组成作出贡献。

也有人把不平衡力 $\{Q\}$ 乘以大于1的放大系数 α（例如 $\alpha=1.5-1.8$），以加速迭代法的收敛。

迭代结束，就得到满足平衡条件、位移连续性条件以及给定非线性本构关系的位移、应变和应力。

$$\begin{aligned}\{\delta\}&=\{\delta_0\}+\sum_{i=1}\{\Delta\delta\}_i\\ \{\varepsilon\}&=[B]\{\delta\}\\ \{\sigma\}&=[D(\delta)]\{\varepsilon\}\end{aligned} \tag{5.14}$$

现在转面讨论与非线性本构关系对应的应力（式5.8右端第二项或图5.4中的 bc 段）。为节省篇幅，只限于平面问题。

在第 i 次迭代中，首先作一次弹性分析，从而求得各单元所有高斯点的应变 $\{\varepsilon\}$。

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x\ \varepsilon_z\ \gamma_{xz}\}^T=[B]\{\delta\}$$

其次，求各高斯点的主应变和大主应变的方向：

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}&=\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_z)^2+\gamma_{xz}^2}\right]\\ 2\theta&=\text{arc tg}\frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_x-\varepsilon_z}\end{aligned} \tag{5.15}$$

把主应变分解为由偏应力 $(\sigma_1-\sigma_3)$ 所生的 ε_1' 及 ε_3' 以及由等向应力 σ_3 所生的 ε_m，即 $\varepsilon_1=\varepsilon_1'+\varepsilon_m$，$\varepsilon_3=\varepsilon_3'+\varepsilon_m$ 和 $\varepsilon_3'=-\nu\varepsilon_1'$，于是有

$$\begin{aligned}\varepsilon_1'&=(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/(1+\nu)\\ \varepsilon_3'&=-\nu(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/(1+\nu)\\ \varepsilon_m&=(\nu\varepsilon_1+\varepsilon_3)/(1+\nu)\end{aligned} \tag{5.16}$$

假设在迭代中使用 Duncan-张金荣非线性本构关系，则非线性主应力

$$\begin{aligned}\sigma_3&=\frac{(1-2\nu)^{-(n-1)}p_a\sigma_3^0}{[(1-2\nu)p_a^{n-1}-k(n-1)\varepsilon_m(\sigma_3^0)^{n-1}]^{-(n-1)}}\\ \sigma_1&=\frac{\varepsilon_1'}{1/E_i+\varepsilon_1'R_f/(\sigma_1-\sigma_3)_f}+\sigma_3\end{aligned} \tag{5.17}$$

式中初始切线模量 E_i、破坏比 R_f、破坏时的剪应力 $(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 以及常数 k、n 根据三轴试验或当地经验（例如表5.1）采用。

最后，由式(5.17)反求非线性应力 $\{\sigma\}=\{\sigma_x\ \sigma_z\ \tau_{xz}\}^T$，其中

$$\begin{aligned}\sigma_x&=0.5[(\sigma_1+\sigma_3)+(\sigma_1-\sigma_3)\cos 2\theta]\\ \sigma_z&=0.5[(\sigma_1+\sigma_3)-(\sigma_1-\sigma_3)\cos 2\theta]\\ \tau_{xz}&=0.5(\sigma_1-\sigma_3)\sin 2\theta\end{aligned} \tag{5.18}$$

θ 值从式(5.15)取用。

下面三个子程序用于求单元不平衡荷载 $\{Q\}$。

子程序 TRE(EPS1, EPS)

【功能】 用高斯点的应变分量求主应变。EPS(1:3)用来存贮 ε_x、ε_z 及 γ_{xz}。EPSi(1:3)用于存贮主应变及大主应变与 x 轴的夹角 ε_1、ε_3 及 θ。A、B 为中间变量。

子程序 REPS1

【功能】 1. 对 $x-z$ 平面内的主应变进行分解，以求出偏应力 $(\sigma_1-\sigma_3)$ 作用下的主应变 ε_1'、ε_3' 及 ε_m。

2. 计算与 Duncan-张金荣本构关系相应的非线性主应力 σ_1 与 σ_3。EPS2(1:3) 用以存贮偏应力作用下的主应变 ε_1'、ε_3' 及 ε_m。SIGMAO 是 σ_3^0，SIGMAF 是 $(\sigma_1-\sigma_3)_f$，K，N，R_f 是土参数，EI 是初始切线模量，V 是泊松比，SIGMA1(1:2)用来存贮非线性主应力。其它标识符同前。

子程序 TRS

【功能】 根据存贮于 SIGMA1(1:2) 中的 σ_1 和 σ_3 计算 $x-z$ 平面内的非线性应力分量 σ_x、σ_z 及 τ_{xz}，并存贮于 SIGMA2 (1:3) 中，供计算不平衡荷载之用。A，B 是中间存贮单元。

```
      SUBROUTINE REPS1(EPS1,EPS2,V,
     *SIGMAO,SIGMAF,N,K,RF,SIGMA1)
      REAL EPS1(3),EPS2(3),V,A,B,N,
     *K,RF,PA,EI,SIGMAO,SIGMAF,
     *SIGMA1(2),C1,C2,C3,C4,C5
      A=EPS1(1)-EPS1(2)
      B=1.+V
      EPS2(1)=A/B
      EPS2(2)=-V*A/B
      EPS2(3)=(V*EPS1(1)+EPS1(2))/B
      PA=103.4
      C1=(1.-2.*V)**(N-1)
      C1=1/C1
      C1=C1*PA*SIGMAO
      C2=(1.-2.*V)*PA**(N-1)
      C3=SIGMAO**(N-1)
      C3=C3*K*(N-1)*EPS2(3)
      C4=1/((C2-C3)**(N-1))
      SIGMA1(2)=C1/C4
      EI=1/EI
      C5=EI+RF*SIGMAF
      C5=EPS2(1)/C5
      SIGMA1(1)=C5+SIGMA1(2)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TRE(EPS1,EPS)
      REAL EPS1(3), EPS(3)
      REAL A,B,C
      A=EPS(1)+EPS(2)
      B=SQRT((EPS(1)-EPS(2))**2
     *+EPS(3)*EPS(3))
      C=EPS(3)/(EPS(1)-EPS(2))
      EPS1(1)=0.5*(A+B)
      EPS1(2)=0.5*(A-B)
      EPS1(3)=ATAN(C)/2
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TRS(SIGMA1,EPS1,
     *SIGMA2)
      REAL SIGMA1(2),SIGMA2(3)
      EPS1(3),A,B
      A=0.5*(SIGMA1(1)+SIGMA1(2))
      B=0.5*COS(2.*EPS1(3))*
     *(SIGMA1(1)-SIGMA1(2))
      SIGMA2(1)=A+B
      SIGMA2(2)=A-B
      SIGMA2(3)=0.5*SIN(EPS1(3)*2.)
     **(SIGMA1(1)-SIGMA1(2))
      RETURN
      END
```

5.2.3 增量迭代法

为了提高非线性分析的精度，吸取以上二种方法的优点，避免其缺点，而提出了增量迭代法（图 5.5）。方法的实质在于把外界荷载分为若干增量，对每级荷载增量又进行若干次迭代。

由于增量迭代法的计算时间太长，尽管存在很多优点，仍难于在工程设计中推广使用。在我国工程实践中，大量使用“中点增量法”，即把外荷分为若干增量，对每级增量仅迭代一次。在计算中，首先对每级增量荷载的一半分析一次，以便按一半增量荷载时的位移和应力水平来建立中点的劲度矩阵；接着用增量荷载的全部以及上述中点的而不是该增量起始的

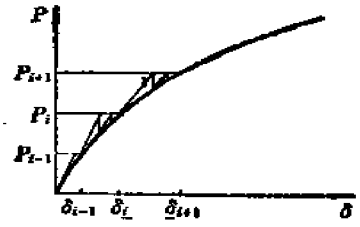


图 5.5 增量迭代法

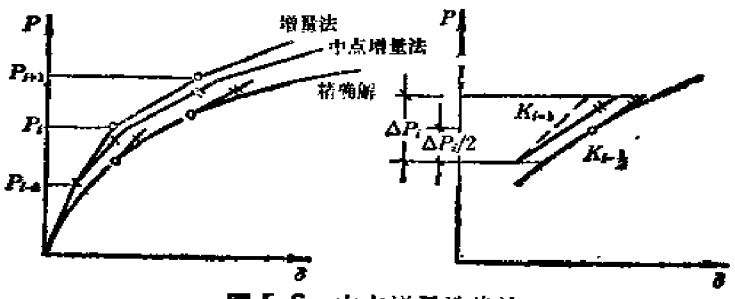


图 5.6 中点增量迭代法

劲度矩阵再作一次分析，从而求出位移增量和应力增量（图 5.6）。这种提高精度的做法是以付出加倍的工作量为代价的。

中点增量法的具体步骤：

1．对第一个荷载增量 $\{\Delta P\}_1$ 用初始切线模量 E_i 建立劲度矩阵 $[K]_0$，分别求出位移 $\{\Delta\delta\}_1$、应变 $\{\Delta\varepsilon\}_1$ 以及应力 $\{\Delta\sigma\}_1$。

2．从第二级荷载增量开始，先施加荷载增量的一半，即 $\{\Delta P\}_i/2$，利用上一增量终了时的应力水平建立劲度矩阵，求出增量中点位移 $\{\Delta\delta\}_{i-1/2}$，即

$$[K]_{i-1}\{\Delta\delta\}_{i-\frac{1}{2}} = \{\Delta P\}_i/2 \tag{5.19}$$

从第一级增量到第 i 级增量的一半为止，土体位移是

$$\{\delta\}_{i-\frac{1}{2}} = \{\delta\}_{i-1} + \{\Delta\delta\}_{i-\frac{1}{2}} \tag{5.20}$$

相应的应力状态为

$$\{\delta\}_{i-\frac{1}{2}} = \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta\sigma\}_{i-\frac{1}{2}} \tag{5.20a}$$

3．根据上述应力状态，求出相应的 E_i，并建立增量 i 的中点劲度矩阵 $[K]_{i-\frac{1}{2}}$，接着用 $\{\Delta P\}_i$ 的全部再作一次线性分析：

$$[K]_{i-\frac{1}{2}}\{\Delta\delta\}_i = \{\Delta P\}_i \tag{5.21}$$

从而求得 $\{\Delta\delta\}_i$、$\{\Delta\varepsilon\}_i$ 及 $\{\Delta\sigma\}_i$。

4．重复 2、3 两个步骤，直到最后一个增量，于是有

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= \{\delta_0\} + \sum_{i=1}^{M}\{\Delta\delta\}_i\\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_0\} + \sum_{i=1}^{M}\{\Delta\varepsilon\}_i\\ \{\sigma\} &= \{\sigma_0\} + \sum_{i=1}^{M}\{\Delta\sigma\}_i\end{aligned} \tag{5.22}$$

我国水利设计部门的经验表明，用中点增量法所得的计算结果比一般增量分析(5.2.1)更接近实际情况。

5.3 填方和挖方

在常规的填方和挖方设计中，往往简单地假设它们是瞬时完成的。随着计算土力学的发展，可以分析复杂土质条件下的填方或挖方过程。土坝、路堤或机场跑道等填方问题属于初加载，而深基坑开挖，然后浇筑基础则属于卸载-再加载过程。它们在岩土工程中有广泛的应用。

用逐段线性的或非线性的增量法来模拟填方或挖方能取得满意的结果。问题在于所提出的计算方法应能模拟施工过程与荷载历史，所采用的本构关系应能反映土体中不同的应力路径，在计算中输入的参数要符合实际，计算域的边界条件应尽量合理。填方或挖方分析没有精确解可资对比，最好有现场实测资料来检验分析结果的可靠性，对两者之间的差异作出客观的解释，使人们逐步相信把数值方法用于分析岩土工程实际问题能提供有益的知识。

5.3.1 填方模拟

确定计算域的范围和边界条件，把所讨论的地基用有限元离散。地基在填方以前的天然应力状态$\{\sigma_0\}$是

$$\{\sigma_0\} = \{\sigma_{x0}\ \sigma_{z0}\ \tau_{xz0}\}^T = \{K_0\gamma z\ \gamma z\ 0\}^T \tag{5.23}$$

式中K_0是与土的超固结比有关的侧压力系数。

采用恒应变三角形单元或任意四边形等参元来分析填方已经有足够精度而不必采用更高级的单元。

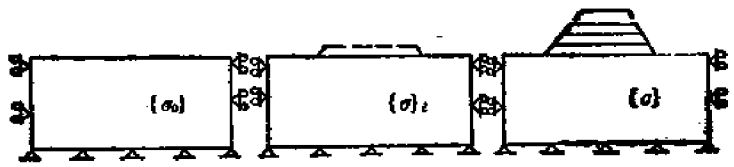


图 5.7 填方模拟

在图 5.7 中，把填方划分为M级($M=10\sim12$)增量荷载。当第一层填方施工完毕，将此增量荷载化成静力等效的结点力，同时将其离散为有限元，与地基中的各单元的劲度矩阵一起，集合成体系的劲度矩阵。根据刚完成的填方密实度来决定新填土区的劲度系数是很重要的，它一般只是密实填土的很小百分数。由于土体在天然历史应力$\{\sigma_0\}$作用下的位移在施工前已经完成，由此所引起的位移不予考虑。

由初始切线模量E_i和其它有关参数形成劲度矩阵$[K]_0$，经过一次有限元分析，求得位移增量和应力增量，即

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= \{\delta_0\} + \{\Delta\delta\}_1 \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma\}_1\end{aligned} \tag{5.24}$$

其中初始位移$\{\delta_0\}$可能为零。

由第一层填方终了时的应力水平计算新的切线模量E_i，供下一层填方建立劲度矩阵之用。

随着填方的加高，新的荷载增量又作用在地基上。用以模拟新填土的单元数目将有所增加。因此，每次均要重新建立总劲度矩阵和总荷载列阵，以便进行新的增量计算。到第i级增量为止，可以得到

$$\begin{aligned}\{\delta\}_i &= \{\delta\}_{i-1} + \{\Delta\delta\}_i \\ \{\varepsilon\}_i &= \{\varepsilon\}_{i-1} + \{\Delta\varepsilon\}_i \\ \{\sigma\}_i &= \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta\sigma\}_i\end{aligned} \tag{5.25}$$

重复上述步骤，直到最后一层填方加到地基上为止。

一般说来，荷载增量分得越多，分析结果越接近实际。然而，究竟划分多少增量，与分析的目的有关。假使主要为了弄清填方下地基的形变和应力划分增量数目可少些；若还需要了解填方本身的位移和应力，则应多些。一般分为10～12级常可获得满意结果。在非线性分析中，填方本身的位移对于增量的数目十分敏感。这需要根据有代表性的实测资料和工程师的经验作出判断。

填方的不同部位(如土坝的粘土心墙和砂石坝壳)由不同性质的材料组成。已经压实的和尚未压实的填方具有不同的应力-应变关系。此外,不同位置的单元,由于应力路径不同,其应力-应变关系也不一样。

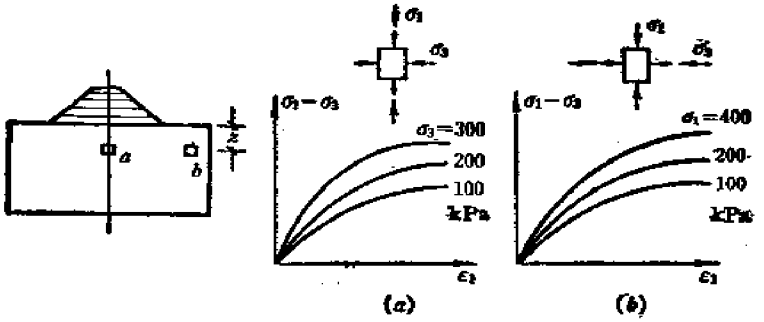


图 5.8 不同单元的应力-应变关系

位于图 5.8 对称轴附近的单元 a,其 σ_1 单调增大,而 σ_3 增长缓慢,甚至保持不变;对于远离对称轴的单元 b,其 σ_1 保持常量,而 σ_3 则缓慢增加。单元 a、b 的应力路径不同,就应当用不同的应力-应变关系曲线。若这一增量下的应力水平 $(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 高于上一增量,则属于初加载状态,否则属于卸载-再加载状态。图 5.8a、b 中的应力-应变曲线都是初加载。当 σ_1 的变化大于 σ_3 的变化时,采用 a 中的曲线,反之采用 b 中的曲线。

严格说来,填方和地基中各点的应力路径均有所不同。为了简化分析,只注意应力路径在质上的显著变化而略去量上的差异。于是把计算域分为几部分,各个部分采用具有不同应力路径的应力-应变曲线。

研究填方的形变和应力分布有两种互为补充的途径可资利用。一种是对有代表性的工程作现场量测,一种是进行数值分析。现场量测成果是土的种类、应力-应变特性、加载速率和施工方法等客观因素的综合反映,它大大丰富了人们对填方形变和应力变化过程的认识。对这些资料作反分析,还可以对土的参数进行研究,为今后相近条件下的工程设计提供分析经验和设计参数。为了获得这些珍贵资料需要动用大量人力物力,并对大量数据整理分析。因为不可能对每个填方工程作现场量测,于是利用数值分析预估填方的位移和应力分布,沉降中心的部位,应力集中和重分布现象,张拉应力区及可能产生裂缝的位置,应力主轴的偏转和塑性区的开展等,从而为改善工程设计或制订地基加固方案提供依据。

曾经对一座坝高 $h=150$ m,两侧坡度均为 1:1.5 而坝冠宽度为 19 m 的粘土心墙堆石坝进行了现场量测和计算分析。图 5.9 为坝身的纵横剖面。其中 a 为粉质粘土心墙,b 为砾石夹砂过渡区,c 为块石坝壳,d 为局部帷幕灌浆的岩基上面覆盖着厚度不等的砂夹砾石层。

在坝体中埋设了各种量测元件。在图 5.10 中,●为孔隙压力传感器,▲为竖直土压力盒,■为沉降观测标点,➡为连续式侧向位移传感器。用这些元件监测了填方过程中位移和应力的变化过程。图 5.11 和 5.12 分别表示填方完成但尚未蓄水时的位移分布和竖直应力等值线。其中显示了不同高度的位移大小和方向。由于坝体中应力分布不均匀,加上材料性质不同,因而产生了不均匀变形。沉降中心不是位于坝冠,而是位于坝内。由于心墙的压缩性大于坝壳和过渡区的材料,因而形成拱作用,使心墙处的荷载向过渡区及坝壳重分布,从

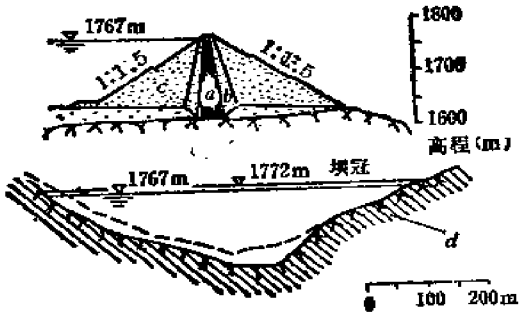


图 5.9 土坝的横剖面和纵剖面

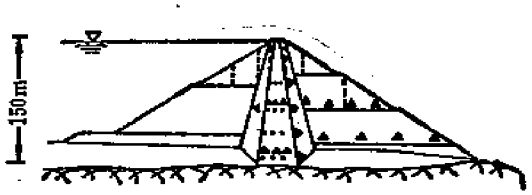


图 5.10 土坝中的量测仪器

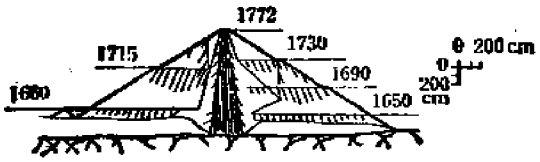


图 5.11 位移分布

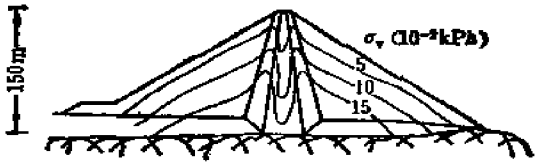


图 5.12 竖直应力等值线

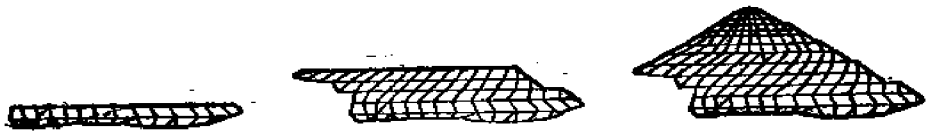


图 5.13 不同填方阶段的单元划分

而产生了非均布的位移。

土坝的几何形状不对称，材料性质又不同，为了预估其位移和应力分布而作了有限元分析。单元网格由八结点等参元组成。单元的数目随着填方的加高而增多。在图 5.13 中表示三个不同增量阶段的填方网格。

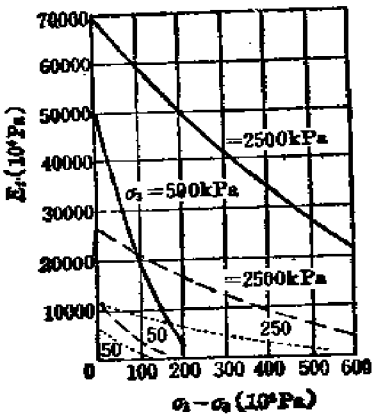


图 5.14 不同土料的切线模量 E_t 与主应力差 $\sigma_1-\sigma_3$ 的关系曲线

在分析中使用了 Duncan-张金荣的非线性本构关系。根据室内常规排水三轴试验和大型试验(试样直径 30 cm，高度 75 cm) 分别得到心墙和坝壳材料的切线模量 E_t 变化曲线，供建立不同部位劲度矩阵之用。图 5.14 中实线用于由闪长岩砾石夹砂组成的过渡区，虚线用于由未经分选的片麻岩碎石组成的坝壳，而短划线则用于粉质粘土心墙。每组曲线有很多根，根据不同的固结应力而选用。图中为每种材料只列出两根 E_t 的变化曲线。由于基岩的模量比筑坝材料的高得多，在计算中把基岩表面当作不发生位移的固定边界。

5.3.2 挖方模拟

在清理坝基，用明挖法修筑地下铁道或开挖高层房屋深基坑时均需进行挖方。与地基上在填方时处于初加载状态不同，在挖方时土体处于连续的卸载状态，而当修筑坝身或基础时，又处于再加载状态(图 5.15)。

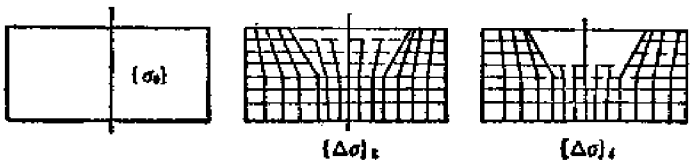


图 5.15 挖方模拟

将地基离散为恒应变三角形单元或四边形等参元。确定地基的天然应力状态$\{\sigma_0\}$。

把拟开挖的土体分为若干层。当挖去第一层单元的土，计算挖去的土重在无应力表面所形成的等价结点力。用与这些结点荷载大小相等而方向相反的力作为结点荷载，并作一次非线性分析，于是得到第一次卸载后的计算结果，即

$$\begin{aligned}\{\delta\}_1 &= \{\delta_0\} + \{\Delta\delta\}_1\\ \{\varepsilon\}_1 &= \{\varepsilon_0\} + \{\Delta\varepsilon\}_1\\ \{\sigma\}_1 &= \{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma\}_1\end{aligned} \tag{5.26}$$

随着开挖的加深，体系的单元数目逐次减少。有限元网格每次均相应于开挖一层或数层以后的几何形状，而每级卸载计算均需重新形成土体的总劲度矩阵与总荷载列阵。等到开挖到第 i 层为止，挖方中的形变和应力状态分别为

$$\begin{aligned}\{\delta\}_i &= \{\delta_0\} + \sum_{j=1}^{i}\{\Delta\delta\}_j\\ \{\varepsilon\}_i &= \{\varepsilon_0\} + \sum_{j=1}^{i}\{\Delta\varepsilon\}_j\\ \{\sigma\}_i &= \{\sigma_0\} + \sum_{j=1}^{i}\{\Delta\sigma\}_j\end{aligned} \tag{5.27}$$

式中$\{\sigma_0\}$为土体的天然应力状态，而$\{\delta_0\}$和$\{\varepsilon_0\}$为相应的位移和应变状态。假使土体中没有温度变化和由毛细压力引起的收缩形变，则$\{\delta_0\}$和$\{\varepsilon_0\}$均为零。

对挖方作有限元分析的关键在于如何计算无应力表面的等效结点荷载（图 5.16）。一般说来，在与水平面夹 θ 角的开挖面上作用有法向力 σ_n 和切向力 τ_n。由 Mohr 应力理论得

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (K_0\sin^2\theta + \cos^2\theta)\gamma z\\ \tau_n &= (1-K_0)\sin\theta\cos\theta\,\gamma z\end{aligned} \tag{5.28}$$

式中 K_0 为静止土压力系数，而 z 为目前的开挖深度。

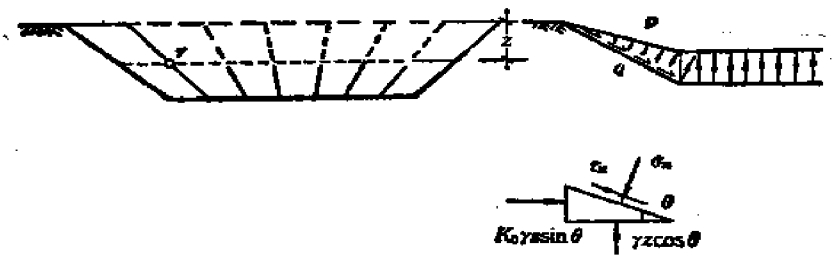


图 5.16 挖方的等效荷载

把与 σ_n、τ_n 大小相等而方向相反的应力作为开挖应力 p、q，于是有

$$\begin{aligned}p &= -\sigma_n\\ q &= -\tau_n\end{aligned} \tag{5.29}$$

由 p 和 q 在开挖面上 r 结点所产生的结点荷载为

$$\Delta P_{rx}=\int_A (p\sin\theta+q\cos\theta)N_r\mathrm{d}A$$
$$\Delta P_{ry}=\int_A (p\cos\theta-q\sin\theta)N_r\mathrm{d}A \tag{5.30}$$

式中 r 为无应力面上结点的编号，N_r 为开挖面上单元 r 点的形函数。不难看出，当开挖面坡度角 $\theta=90°$（竖直开挖面）或 $\theta=0°$（水平开挖面）时，经常有 $q=0$。

在计算开挖面上结点 r 的卸载 $\{\Delta P\}_r$ 时，每次都要牵涉到 r 点周围所有的单元，于是

$$\{\Delta P\}_r=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\{\Delta P\}_s \tag{5.31}$$

假设 r 点周围共有四个单元，即 $m=4$。s 是 r 点周围单元的编号，其中两个在开挖面上面而行将挖去的单元，另二个是位于开挖面下面而暂时还保留的单元。以八结点等参元为例，这四个单元在 r 点的形函数 N_r 分别为 N_7、N_1、N_3 和 N_5。

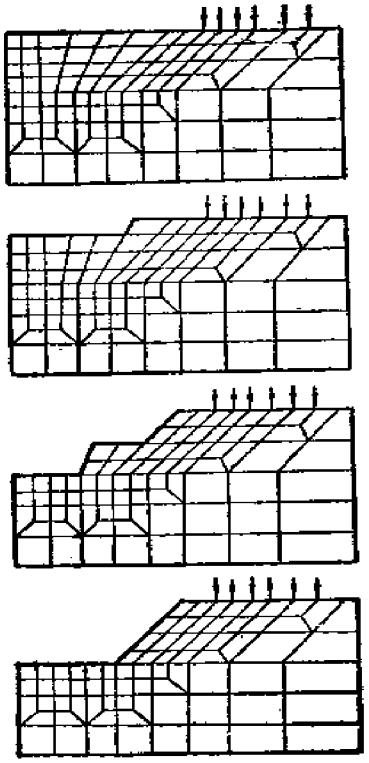


图 5.17 不同开挖阶段的有限元分割

求出无应力面上所有结点的平均结点力（式 5.31）以后，便可以建立挖方体系的总荷载列向量。

挖土是临时工程。尽管基坑的平面图形比较复杂，其长度与宽度属于同一数量级，一般也不去做三维分析，而简化为平面应变问题来处理。图 5.17 表示对挖方过程用八结点等参元离散的示意图。

假使用板桩-锚杆系统围护基坑，应在板桩两侧设置接触单元，锚杆则用一维杆件单元来近似，在灌浆段也应设置接触单元。不必事先规定挡墙上土压力的大小与分布，而仅仅引入土的体积力。只要使用合适的本构关系，就能求得土压力分布随位移的变化过程。按照古典土力学，只能人为地规定：不是按静止土压力，就是按主动土压力这两种极端情况来计算土压力分布。能够考虑土压力分布随位移的发展而变化也是计算土力学的优点。

挖方工程处于卸载-再加载状态，不应当用单调初加载的应力-应变关系来分析挖方。

考察图 5.18 中挖方中央、边缘和外侧三个不同单元 a、b 和 c 的应力路径。在开挖以前，它们均处于静止应力状态。随着开挖的加深，作用于单元 a 的 σ_1 和 σ_3 均在减少，而且 σ_1 比 σ_3 减小得还要快。单元 b 上的 σ_1 也在减少，由于地下连续墙向坑中位移，使 σ_3 处于由静止状态向被动状态改变的过程中，应当分析覆盖应力的减小和被动倾向的增长何者占优势，以决定应力水平 $(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 的增减趋势。对于单元 c，其 σ_1 保持不变，由于围护结构的位移使 σ_3 由静止状态向主动状态过渡，并导致 σ_3 持续减小。这种趋势一直到开挖到设计深度为止才能平息下来。当浇筑基础或坝体时，单元 a 的 $\sigma_1-\sigma_3$ 重新增大，而处于再加载状态；单元 b 的 σ_1 在增加，而 σ_3 所受到的被动影响则逐步减弱；单元 c 的 σ_1 保持不变，而 σ_3 所受到的主动影响则在降低。后二者也处于再加载状态。

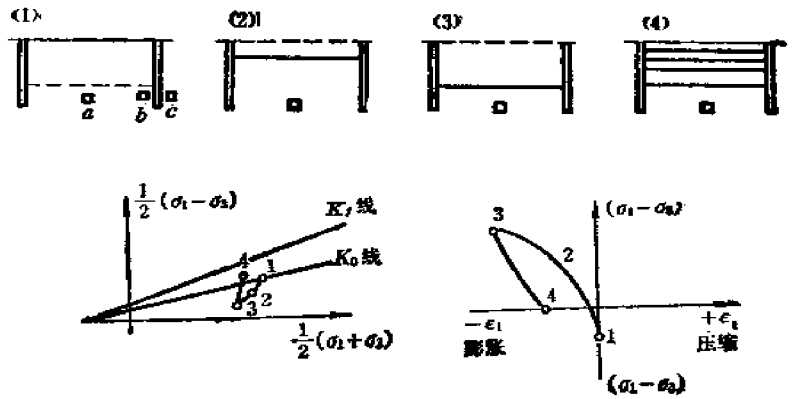


图 5.18 挖方中的应力路径

随着开挖的不断进行，并接着浇筑基础，这三个有代表性土体单元的应力路径也在变化。所使用的本构关系应能反映这种变化。

在图 5.18 中只表示了单元 a 的应力路径和相应的应力-应变关系。1 表示单元 a 处于 K_0 状态，2 及 3 表示 $\sigma_1-\sigma_3$ 在持续减小，4 则表示由于浇筑基础而使得 $\sigma_1-\sigma_3$ 增大。

现在转而讨论挖方分析的一种简化方法。为了减少基坑敞露时间，开挖和浇筑基础应尽快进行，土体来不及排水，于是用不排水模量 E_u 对挖方作线性分析。

用平面应变三角形单元对土体进行离散，并在基坑中央断面上作回弹及位移观测。

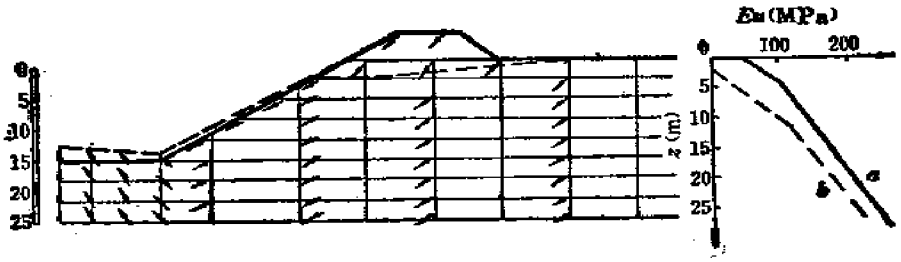


图 5.19 挖方中的位移场和不排水模量 E_u 的变化

开挖到设计深度和浇筑片筏基础分别用了七天和三星期。施工速度很快，土体因而处于不排水状态，由室内三轴不排水试验测定的土体不排水模量 E_u 随深度而增长。泊松比取为 $\nu=0.49$。将每层单元的开挖荷载和基础荷载化作静力等效的结点力，并分别对开挖终了和基础竣工时的位移场作线性弹性分析。

坑底有明显的隆起，中央大于四周。沿地表相当于坑深 1.5 倍的水平距离内有明显的下陷。据此，可以对邻近建筑物的危害程度作定量估计(图 5.19)。

用反分析方法根据实测位移对不排水模量 E_u 随深度的变化进行调整。等到地下连续墙的计算位移与实测位移相等时，所求得的 E_u 值随深度的分布就认为是合适的。这样求得的 E_u 值比土样受到扰动的室内试验值大很多。

随着基坑敞露时间的延长，坑壁因徐变而产生了附加位移。基坑开挖完毕后三星期的 E_u 换算值(曲线 b)比开挖刚结束(曲线 a)时平均降低了 15%。

5.4 土-结构物相互作用

地下结构或建筑物的地下部分以土作为环境或作为地基，因而产生土-结构物相互作用问题。这是一个崭新的课题。土-结构物体系的一个组成部分的位移和应力状态影响着另一组成部分的位移和应力状态，而且后者对前者又产生反馈作用。定量地分析整个体系中各个组成部分之间的相互影响和相互制约作用就称为土-结构物相互作用分析。

土-基础-结构物，土-桩基-结构物，土坝中的输水隧峒，土-地下铁道，挡墙-锚杆-土，加筋土-挡墙，路堤-土工织物-路基，核反应堆-土，以及在现有地下铁道的近旁开辟新的地下空间(如地下车库)均会出现土-结构物相互作用。一言以蔽之，它主要是由于土和建筑材料(如钢或钢筋混凝土)的变形模量存在很大差异而引起的。

迄今为止，把土、结构物和基础看成是三个相互无关的组成部分，相互间只有作用力的联系，而忽略了刚度和变形产生的相互影响。进行土-结构物相互作用分析的关键在于计算结构物的劲度和选择合适的土本构关系。结构物的劲度约束基础的挠曲，从而减小了基础的内力；基础的挠曲又促使结构物产生附加变形。这种相互影响是通过接触应力(基础底面反力分布)而产生的。满足平衡条件的接触应力可能有很多种分布形态，然而，既满足平衡条件又满足接触面上结构物和土变形连续性条件和边界条件的接触应力分布则是唯一的。因此任何土-结构物相互作用分析都必须同时满足上述三个条件。

为了满足接触面上结构物变形与土位移的连续性条件就需要计算土体的变形。因此，选择土的本构关系具有很大的重要性，此外，为了提高分析质量，切合实际情况，需要在结构物与土的界面上设置接触面单元。

5.5 接触面单元

浅基础、桩基础或地下结构物与土的接触面具有特殊的性质，它起因于混凝土和土的变形模量有很大的差异。近来，地下连续墙在上海等城市的地下工程中获得广泛应用。用以保持地下连续墙槽壁稳定的班脱土触变性泥浆会不同程度地渗入土孔隙中，甚至在槽壁表面结成泥皮。这种渗有泥浆的土便构成接触面的材料，其性质与原先的土有很大不同。

这种接触面既能传递法向应力 σ_n，又能传递剪应力 τ_s。为了模拟这种性质而设置接触面单元。以浅基础为例，考虑接触面上剪应力的存在会减小基础挠曲，从而减小了基础弯矩。在地下结构物或挡土墙的界面上考虑剪应力的存在，土压力将减小，稳定性则有所增加。

过去在处理这种接触面时，常采用理想化的假设：接触面十分粗糙，因而无相对滑动；接触面十分光滑，因而无剪力。为了使土力学的分析比较符合实际，应当研究中间的情况。

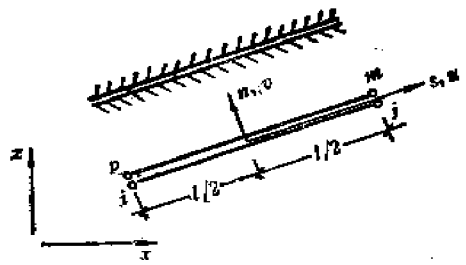


图 5.20 接触面单元

沿接触面设置长度与土体单元边长相匹配，而厚度为充份小的接触单元 $ijmp$ (图 5.20)，它一面与结构单元而另一面与土单元的边界相重合。因此，结点 i 和 p，j 和 m 有相同的坐标。该单元只在结点处与相邻单元有力的联系，于是结点力 $\{F\}^e$ 为

$$\{F\}^e = \{S_i\ N_i\ S_j\ N_j\ S_m\ N_m\ S_p\ N_p\}^T \quad (5.32)$$

相应的结点位移 $\{\delta\}^e$ 为

$$\{\delta\}^e = \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_m \ v_m \ u_p \ v_p\}^T \tag{5.33}$$

不言而喻，在结点力之间，下述关系式成立：

$$S_i = -S_p,\ S_j = -S_m,\ N_i = -N_p,\ N_j = -N_m \tag{5.34}$$

取位移模式为线性函数，且令 $A = 1 + 2x/l$，$B = 1 - 2x/l$，于是接触单元中任一点的位移分量为

$$\begin{Bmatrix} u_{上} \\ v_{上} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A & O & B & O \\ O & A & O & B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \tag{5.35}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{下} \\ v_{下} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} B & O & A & O \\ O & B & O & A \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{5.36}$$

用单元两侧的相对位移$\{\Delta u\}$来表示一点的应变$\{\varepsilon\}$：

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{上} - u_{下} \\ v_{上} - v_{下} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A & O & B & O & -B & 0 & -A & 0 \\ O & A & O & B & 0 & -B & 0 & -A \end{bmatrix}\{\delta\}^e \tag{5.37}$$

或记作

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \tag{5.37a}$$

现在设想在 i，p 以及 j，m 之间分别有弹簧联结，并把产生单位相对压缩或相对滑动所需的力称为压缩劲度 k_n 或剪切劲度 k_s。它们可能是线性的，亦可能是非线性的，并且与应力水平有关。一般在模拟接触面粗糙程度的条件下，由土工试验测定。为讨论简单起见，目前使用线性假设，即剪应力 τ_s 和法向应力 σ_n 分别与 Δu 或 Δv 成正比。

$$\begin{Bmatrix} \tau_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}[k][B]\{\delta\}^e \tag{5.38}$$

由虚功原理导出单元劲度矩阵$[KE]$

$$\{F\}^e = \frac{1}{4}\int_{-l/2}^{l/2}[B]^T[k][B]\mathrm{d}x\{\delta\}^e = [KE]\{\delta\}^e \tag{5.39}$$

$$[KE] = \frac{l}{6}\begin{bmatrix} 2k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -2k_s & 0 \\ 0 & 2k_n & 0 & k_n & 0 & -k_n & 0 & -2k_n \\ k_s & 0 & 2k_s & 0 & -2k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & k_n & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & -k_n \\ -k_s & 0 & -2k_s & 0 & 2k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & 0 & k_n \\ -2k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & 2k_s & 0 \\ 0 & -2k_n & 0 & -k_n & 0 & k_n & 0 & 2k_n \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

对于一定的土和界面粗糙程度，可以在不同 σ_n 作用下测定 τ_s 与相对滑移Δu之间的关系(图 5.21)。同济大学为了设计地下连续墙而对混凝土-轻亚粘土(a, b)以及混凝土-淤泥质粘土(c, d)进行了 τ-Δu 试验。

可以看出，上述曲线具有明显的非线性，并可以用一组双曲线来拟合

$$\tau_s = \Delta u/(a + b\Delta u) \tag{5.41}$$

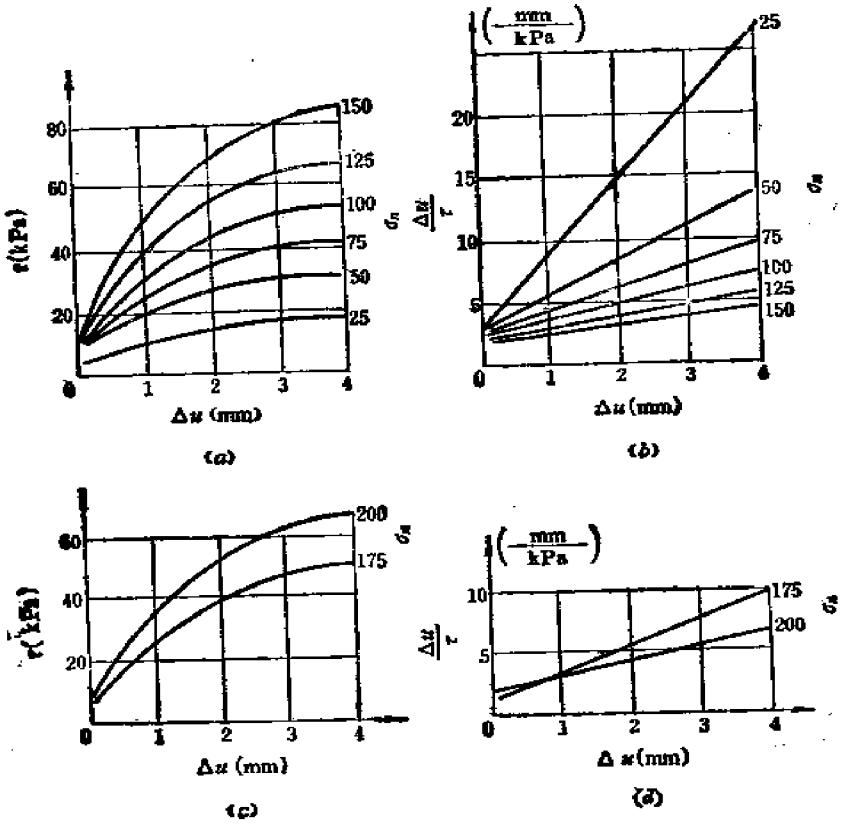


图 5.21 τ-Δu 曲线

(a)和(b) 混凝土与上海轻亚粘土; (c)和(d) 混凝土与上海淤泥质粘土

作坐标变换，得一族直线(图 5.21b 及 d)

$$\Delta u/\tau_1 = a + b\Delta u \tag{5.42}$$

式中 $\tau_1 = \tau_s - \tau_0$。τ_s 是总的剪应力，而 τ_0 是尚未产生相对滑移时的起始剪应力，a 的倒数表示起始剪切劲度 k_{s0} 而 b 的倒数表示剪应力的极限值，即当 Δu 很大，而接近剪损时的剪应力。

根据剪切劲度 k_s 的定义，于是有

$$k_s(\mathrm{kN/m^3}) = \frac{\partial\tau}{\partial(\Delta u)} = \frac{a}{(a+b\cdot\Delta u)^2} = \frac{(1-b\tau)^2}{a} \tag{5.43}$$

参数 a, b 与土的种类、法向应力 σ 和接触面性质有关。对于上海地区有代表性的土，从图 5.21b、d 可以得到。

表 5.2 上海土的参数 a 及 b

σ_n(kPa)		25	50	75	100	125	150	175	200
混凝土与	a	2.05	1.35	1.37	1.43	1.13	1.00		
轻亚粘土	b	6.31	3.00	2.14	1.47	1.25	0.95		
混凝土与	a							1.07	1.58
淤质粘土	b							1.87	1.19

参 考 文 献

1. 钱家欢等编著，土工原理与计算，上下册，水利出版社，1984.
2. 张问清等，层状弹性半空间的有限层变形，岩土工程学报，1981 年第 2 期。
3. 张诚厚等，上海粘土的准超压密特性，岩土工程学报，1982 年第 3 期。
4. 刘祖德，应力路径对填土应力应变的影响，岩土工程学报，1982 年第 4 期。
5. 刘祖典，黄土变形特性和变形参数，岩土工程学报，1984 年第 3 期。
6. 窦宜，超固结粘土的变形特性，岩土工程学报，1984 年第 5 期。
7. 龚晓南、曾国熙，油罐下软粘土地基的性状，岩土工程学报，1985 年第 4 期。
8. 徐少曼，饱和粘土不排水沉降的规律，岩土工程学报，1985 年第 5 期。
9. 孙钧松等，不同应力路径对砂土应力应变的影响，岩土工程学报，1987 年第 6 期。
10. 吴凯华，地下连续墙与土的接触效应，同济大学硕士研究生论文，1987.

第六章 固结分析

6.1 概述

Terzaghi 于 1924 年提出有效应力原理和一维固结理论，标志着近代土力学的诞生。地基固结分析一直是土力学的重要课题之一。而且，固结理论的一般方程也就是多相连续体力学的一般方程。固结分析具有一定的普遍意义。

在 Terzaghi 一维固结理论中除了假定土是均质的和小变形外，还做了下述假定：土是完全饱和的；土粒和水是不可压缩的；土的压缩和孔隙水挤出只沿一个方向发生；孔隙水的流动服从 Darcy 定律；固结过程中渗透系数和压缩系数都是常数；以及土的孔隙比与有效应力的关系不随时间变化。Terzaghi 一维固结方程可用下式表示：

$$c_v \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2} = \frac{\partial p_w}{\partial t} \tag{6.1}$$

式中 c_v——固结系数，$c_v = k(1+e_0)/\rho_w a_v$；$e_0$——初始孔隙比；$k$——渗透系数；$\rho_w$——水容重；$p_w$——孔隙水压力；$a_v$——压缩系数。

后来，Rendulic(1936)将 Terzaghi 一维固结理论推广至二维、三维问题，得出 Terzaghi-Rendulic 扩散方程。其三维形式为

$$\frac{\partial p_w}{\partial t} = c_v\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}\right) \tag{6.2}$$

对简单的几何形状和边界条件，扩散方程可以求得解析解。对较复杂的边界条件和几何形状需要采用数值解法，例如有限单元法和有限差分法。

Biot(1941)根据有效应力原理、土的连续条件和平衡方程，提出了 Biot 固结理论。Biot 固结方程由运动平衡方程和连续方程组成。其连续方程可用下式表示：

$$\frac{(1-2\nu)}{E}\frac{\partial(\Theta-3p_w)}{\partial t} + \frac{k_x}{\rho_w}\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\rho_w}\frac{\partial^2 p_w}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\rho_w}\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2} = 0 \tag{6.3}$$

式中 Θ——体积总应力，$\Theta = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_z$。

Biot 固结理论与 Terzaghi-Rendulic 准固结理论的区别在于：前者考虑了在固结过程中土体平均总应力随时间的变化，而后者则假定在固结过程中土体平均总应力保持不变。若令式 6.3 中 $\partial\Theta/\partial t = 0$，即在固结过程中土体总应力保持不变，则式 6.3 蜕化为式 6.2。结合式 6.2 和式 6.3，可得，

$$c_v = \frac{kE}{3\rho_w(1-2\nu)} \tag{6.4}$$

在一维固结条件下，$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$，则

$$c_v = \frac{kE}{\rho_w(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{6.5}$$

在单向固结中，总应力 $\bar{\sigma}_z$ 应当等于地表荷载。如果地表荷载不变，则 $\bar{\sigma}_z$ 不变的条件可以满足。在这种情况下，Biot 固结理论与 Terzaghi 固结理论是一致的。也只有在这种情

况下，Terzaghi 固结理论才是正确的。在一般情况下，尤其在三维问题中，固结过程中总应力保持不变的条件总是难以满足的，因而计算结果可能会有较大误差。尤其是 Terzaghi-Rendulic 准固结理论不能解释 Mandel-Cryer 效应。所谓 Mandel-Cryer 效应就是在一定的条件下，在固结初期发生土体中孔隙水压力不是消散，而是上升，在局部地区孔隙水压力值超过荷载值的现象。图 6.1 表示一圆柱形土样两端轴向受约束而且不排水，四周受径向压缩而且为自由排水面条件下，土样中孔隙水压力随时间分布的情况。从图中可以见到明显的 Mandel-Cryer 效应。然而，由于 Terzaghi-Rendulic 准固结理论关于孔隙水压力变化与土骨架变形无关的假设使计算大为简化，故在实际工程中仍然得到应用。

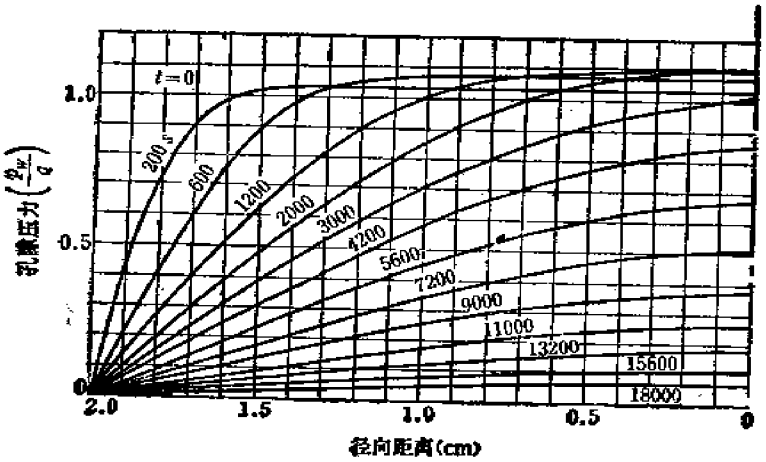


图 6.1 圆柱土样径向压缩孔隙压力分布

Biot 固结理论比 Terzaghi-Rendulic 准固结理论合理，它可以解释 Mandel-Cryer 效应。然而，由于数学上的困难，采用级数和积分变换方法只能对少数简单的边值问题求出解析解。近二十年来，数值方法和计算机的发展，使 Biot 固结理论在工程中得到了愈来愈广泛的应用。而且还促使了固结理论自身的发展。Terzaghi 一维固结理论中的假定一个个被取消，不少学者提出一些更加普遍的固结理论表达式。例如，Schiffman(1980) 提出的固结方程不仅考虑了应力应变的非线性关系，渗透性随有效应力而变化，而且考虑了大应变的情况。

用有限单元法求解 Biot 固结方程，首先是由 Sandhu 和 Wilson(1969)提出的。他们对位移取二次插值模式，对孔隙水压力取线性模式，应用变分原理得出 Biot 固结理论有限单元法方程。在国内，沈珠江(1977)首先把 Biot 固结理论有限单元法应用于固结分析，他对位移和孔隙水压力都取线性模式，应用变分原理得到 Biot 固结理论有限单元法方程。殷宗泽等(1978)根据流量平衡的概念，结合虚位移原理得到了类似的方程。龚晓南(1981)采用等价结点流量等于等价结点压缩量的粘土饱和条件推导了 Biot 固结理论的连续方程。近年来，国内外根据 Biot 固结理论，应用有限单元法求解地基固结问题得到愈来愈广泛的应用。

Biot 固结方程除采用有限单元法求解外，也可采用边界元法求解。但与有限单元法比较，在处理非均质材料，非线性应力应变关系以及复杂的边界条件方面边界元法适应性较差，且数学推导复杂，因此本章对采用边界元法求解 Biot 方程不作介绍，读者如需要可参考

其它文献。

在这一章主要介绍 Biot 固结方程有限单元法，并简要介绍在固结分析中土的流变特性，以及砂井地基的固结计算。在最后一节介绍 Terzaghi-Rendulic 固结方程的有限差分解法。

6.2 Biot 固结方程的数值解法

根据有效应力原理，运动平衡微分方程和水流连续方程得到的 Biot 固结方程是连续体力学的普遍方程，详细推导见第一章，其表示式为

$$\begin{aligned}
&d_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial x}+Z^0=\rho\ddot{u}_x\\
&d_3\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 u_x}{\partial z\partial x}-\rho_f g\frac{\partial h}{\partial z}+Z^0=\rho\ddot{u}_z+(\rho-\rho_f)g\\
&\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial h}{\partial z}-\beta\dot{h}-\left(\frac{\partial\dot{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot{u}_z}{\partial z}\right)+\rho_f\left(\frac{\partial}{\partial x}k_x\ddot{u}_x+\frac{\partial}{\partial z}k_z\ddot{u}_z\right)=0
\end{aligned}\tag{6.6}$$

本章限于讨论荷载缓慢变化条件下惯性项可以忽略的情况，这时由第一章式(1.7)离散化以后的 Biot 固结方程可以简化为

$$[K]\{u\}+[Q]\{h\}=\{F_1\}+\{F_0\}\tag{6.7}$$

$$[Q]^T\{\dot{u}\}+[S]\{\dot{h}\}+[H]\{h\}=\{F_2\}\tag{6.8}$$

上式为时间的一次微分方程，常用两点递进格式求解。设 t_n 和 t_{n+1} 为时域上两点，相应的变量为 $\{u\}_n$ 和 $\{u\}_{n+1}$ 及 $\{h\}_n$ 和 $\{h\}_{n+1}$，则在 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 时刻内可令 $\{\dot{u}\}=\{\Delta u\}/\Delta t$ 和 $\{\dot{h}\}=\{\Delta h\}/\Delta t$，并采用下列线性内插公式，

$$\left.\begin{aligned}
\{u\}&=\{u\}_n+\frac{\tau}{\Delta t}\{\Delta u\}\\
\{h\}&=\{h\}_n+\tau/\Delta t\{\Delta h\}
\end{aligned}\right\}\quad(\tau_t\,0\to\Delta t)\tag{6.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\{F_0\}&=\{F_0\}_n+\tau/\Delta t\{\Delta F_0\}\\
\{F_1\}&=\{F_1\}_n+\tau/\Delta t\{\Delta F_1\}\\
\{F_2\}&=\{F_2\}_n+\tau/\Delta t\{\Delta F_2\}
\end{aligned}\right\}\quad(\tau_t\,0\to\Delta t)\tag{6.10}$$

将上两式代入式(6.7)和式(6.8)，并对 τ 从 0 到 Δt 进行积分，可得

$$\begin{aligned}
\theta[K]\{\Delta u\}+\theta[Q]\{\Delta h\}&=\theta\{\Delta F_1\}+\theta\{\Delta F_0\}\\
&\quad-([K]\{u\}_n+[Q]\{h\}_n-\{F_1\}_n-\{F_0\}_n)
\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}[Q]^T\{\Delta u\}+\frac{1}{\Delta t}[S]\{\Delta h\}+\theta[H]\{\Delta h\}&=\theta\{\Delta F_2\}\\
&\quad-([H]\{h\}_n-\{F_2\}_n)
\end{aligned}\tag{6.12}$$

式中

$$\theta=\int_0^{\Delta\tau}w\tau d\tau/\Delta t\int_0^{\Delta\tau}w d\tau,$$

w 为积分时所用的权函数。

如果在 t_n 时刻体系满足式(6.7)，式(6.11)右端括号中的值为零，并把劲度矩阵$[K]$换成切线矩阵$[K_t]$，同时去掉初应变的等价力$\{\Delta F_0\}$，即令

$$[K_t]\{\Delta u\}=[K]\{\Delta u\}-\{\Delta F_0\},$$

可得

$$[K_t]\{\Delta u\}+[Q]\{\Delta h\}=\{\Delta F_1\}\tag{6.13}$$

$$[Q]^T\{\Delta u\}+([S]+\theta\Delta t[H])\{\Delta h\}=(\{F_2\}_n+\theta\{\Delta F_2\})\Delta t-[H]\Delta t\{h\}_n \tag{6.14}$$

对饱和土 $[S]=0$ 的情况，许多人习惯用 $\{h\}_{n+1}$ 作为未知量，即把式(6.13)和式(6.14)改写为

$$[K_\tau]\{\Delta u\}+[Q]\{h\}_{n+1}=\{\Delta F_1\}+[Q]\{h\}_n \tag{6.15}$$

$$[Q]^T\{\Delta u\}+\theta\Delta t[H]\{h\}_{n+1}=(\{F_2\}_n+\theta\{\Delta F_2\})\Delta t-(1-\theta)[H]\Delta t\{h\}_n \tag{6.16}$$

当把权函数 w 取为常数时，$\theta=\frac{1}{2}$，这样的时间差分格式即相当于中心差分格式，常称为 Crank-Nicholson 格式。当 $w=\tau$ 时，$\theta=2/3$，是目前常用的一种差分格式。经验表明，这时即使两个时段之间 Δt 发生突变，误差也不明显增大(Nishizaki, S.et al, 1982)。$\theta=1$ 相当于全隐式差分。采用这一差分格式的好处是可以一步求得稳定渗流结果。此时只要取 $\Delta t\to\infty$，则不含 Δt 各项均可略去，考虑到 $\{h\}_n+\{\Delta h\}=\{h\}_{n+1}$ 和 $\{F_2\}_n+\{\Delta F_2\}=\{F_2\}_{n+1}$，由式(6.14)可得

$$[H]\{h\}_{n+1}=\{F_2\}_{n+1} \tag{6.17}$$

这就是第四章介绍的渗流方程。$\theta<\frac{1}{2}$的差分格式是不稳定的，不宜采用(参阅 2.4.5 节)。

6.3 单元形态和时段的选择

Sandhu 和 Wilson (1969)采用有限元法求解 Biot 固结方程时，采用 $\theta=\frac{1}{2}$和三角形单元，但对位移 $\{\Delta u\}$ 采用 6 结点的二次形函数，而对孔隙水压力则采用 3 结点的一次形函数，如图 6.2 中 2-1 所示。他们认为这样得出的位移精度高于孔隙水压力精度，而应力的精度将与孔隙水压力精度相当。这样的单元曾被称为组合单元。沈珠江(1977)等对位移和孔隙水压力采用同一形函数的标准单元，如图 6.2 中 1-1 和 2-2 所示。图 6.2 中的 1-0 型单元最早由 Christian 和 Boehmer(1970) 所采用，孔隙压力定义在单元中心，假定在单元中压力为常量(0 次变化)，而位移则定义在结点上，在单元中为 1 次线性变化。

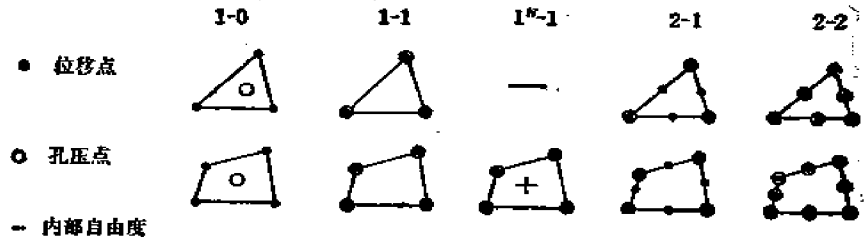


图 6.2 固结计算的各种不同的单元状态

Nishizaki 等(1982)对图 6.2 中所示的各种不同单元形态进行了详细的比较，包括所谓的不相容单元 1^N-1 型，即对位移除四个结点外，还在单元内部增加二个附加的自由度。在比较分析中，假定土骨架为线弹性体。根据几个算例的比较得出以下几点结论：

1. 1^N-1 型和 2-1 型单元的孔隙水压力比较接近，初期的孔隙水压力精度最高；
2. 2-2 型和 1-1 型单元，平均固结度的精度尚可以，但初期孔隙压力的精度差；
3. 2-2 型单元的变形的计算精度最高，而 1^N-1 型单元的变形计算精度较差。

图 6.3 和图 6.4 是 Reed (1982) 对单向固结问题采用 2-1 型和 2-2 型单元的计算结果

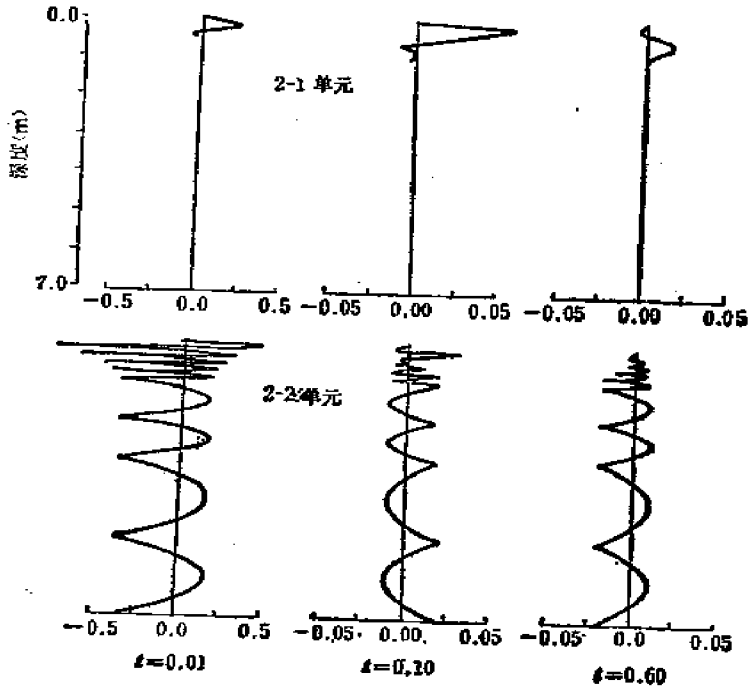


图 6.3 孔隙水压力误差

比较情况。由图 6.3 可见，按 2-2 型单元计算的初期孔隙水压力精度较差，其原因是当 Δt 太小时，式 6.14 中 $\Delta t[H]$ 太小，有关 $\{\Delta h\}$ 的主对角元素太小，系数矩阵变成病态。因此对 $\Delta t=0$ 的初始孔隙水压力分布问题，不能采用 1-1 型单元计算，宜改用 1-0 型单元计算。但

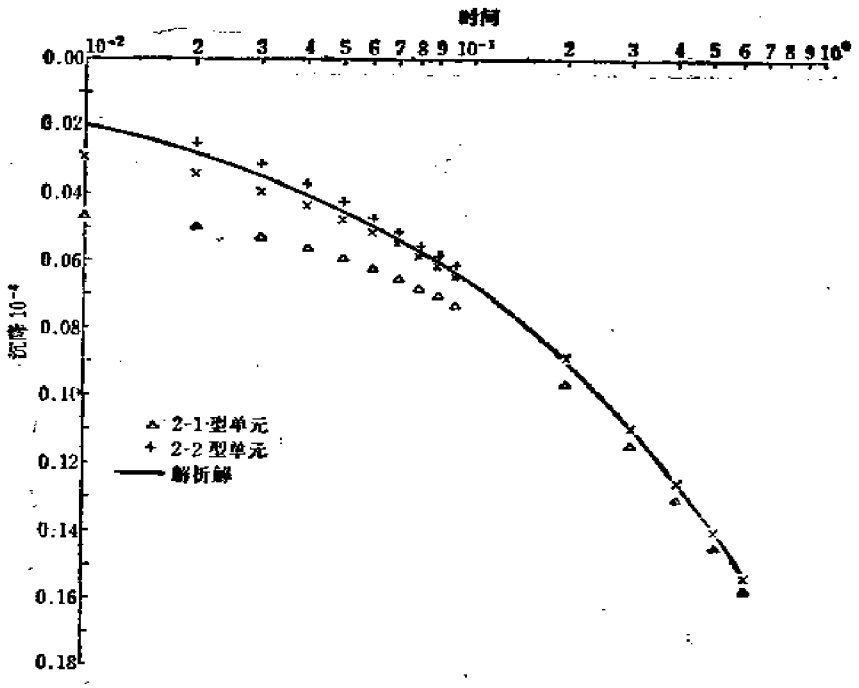


图 6.4 地面沉降分析

采用这类单元时，由于单元中的孔隙水压力为常量，其梯度只能通过相邻单元的孔隙水压力差推算。

为了提高孔隙水压力的计算精度，可以采用计算结果人工光滑化的方法 (Reed, 1982)。但如果在时段 Δt 的选择和单元网格的布置上采取一些措施，可以避免过大的误差。单元的布置应遵循孔隙水压力梯度大的地方和变形梯度大的地方均应予加密的原则。Δt 取值不能过小，但过大也会引起孔隙水压力的波动，如图 6.5 所示。比较合适的时段长度可按下式估计：

$$\Delta t = \left(1 \sim \frac{1}{4}\right) \frac{L^2}{c_v} \tag{6.18}$$

式中 L——排水面附近水流方向上的单元的尺寸；

c_v——土的固结系数。

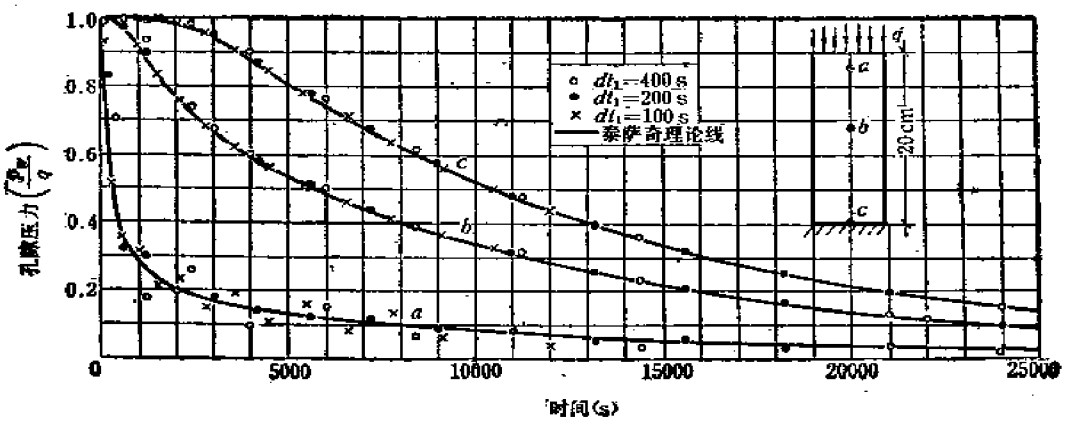


图 6.5 土层单向压缩的孔隙水压力消散曲线

6.4 边界条件

在 Biot 固结分析中，结点自由度有二类：一类为结点位移自由度；一类为结点孔隙水压力自由度。边界条件也包括二种类型：一类为结点位移边界条件；另一类为结点孔隙水压力边界条件。固结分析中的位移边界条件的类型及处理方法与一般弹性力学问题有限单元法中的边界条件完全一样，所不同的是增加了孔隙水压力边界条件。

首先讨论位移边界条件。以平面问题为例，结点的位移自由度有二个：水平向自由度和竖向自由度。对某一自由度，结点的位移条件(或称约束条件)可能有下述几种情况：一种是完全约束条件，即位移等于零；第二种是在一定的约束条件下，结点位移值等于某一已知值；第三种是没有约束，结点可以产生自由位移；第四种是界于完全约束和没有约束之间，处于半约束条件，例如弹簧支座。前二种情况均属于结点位移为已知值的情况。结点位移半约束条件与后面将要提到的半透水边界条件在计算中较少遇到，具体处理方法参见第十三章 13.5 节。

对照位移边界条件，孔隙水压力边界条件也有四种情况：一种是完全透水边界条件，结点孔隙水压力等于零。例如处在地表面上的结点，或粘土层与砂层界面上的结点。第二种为结点孔隙水压力值等于某一已知值。例如真空预压中部分边界结点孔隙水压力值保持真

空值不变；第三种为完全不透水边界条件。例如对称轴上的结点，或粘土层与岩石地层(无裂缝)界面上的结点；第四种为界于完全透水和完全不透水之间，称为半透水边界。严格地说，土层均匀向外延伸而被截取的边界属于半透水边界。然而，在边界截取范围较大时，把它简化为完全透水边界或完全不透水边界对主要分析的区域影响是不大的。考虑到处理半透水边界又比较麻烦，在实际工程分析中，大都把它处理成完全透水边界或完全不透水边界。土层均匀向外延伸而被截取的边界上的位移边界条件也与孔隙水压力边界条件类似，常被处理成完全约束(固定铰支座)，或一个方向完全约束，而另一个方向可以产生位移(活动铰支座)。上述四种情况中的前二种均属于结点孔隙水压力为已知值的情况。

对结点位移值或结点孔隙水压力值为已知的情况，可以有两种处理方法：① 仍给以自由度编号，但在求解代数方程式时在回代之前把解得的位移值用已知值置换；② 已知值对应的自由度均编为零，从而把代数方程区分成下列两部分，

$$\begin{bmatrix}[A_{11}] & [A_{12}]\\ [A_{21}] & [A_{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ \tilde{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_1\\ b_2\end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

式中 $\tilde{x}_2$ 为已知的边界值。计算时只对 x_1 建立方程式，即

$$[A_{11}]\{x_1\}=\{b_1\}-[A_{12}]\{\tilde{x}_2\} \tag{6.20}$$

右端项$[A_{12}]\{\tilde{x}_2\}$在对各单元进行运算时即可求出。在多数情况下，已知的边界值均为零，式(6.20)简化为

$$[A_{11}]\{x_1\}=\{b_1\} \tag{6.21}$$

地基固结分析边界条件的确定主要根据地基的地质构造，以及对称条件、地面条件等情况。图 6.6 为一贮罐地基固结分析所采用的单元划分和边界条件。若地基为均匀土层，贮罐半径为 R，计算土层半径为 L，深度为 H，计算分析表明：当 $L/R>4.5$ 时，计算土层范围的扩大对贮罐沉降影响很小。可以认为上述范围就是圆形荷载在半无限空间均质地基上作用的影响范围 (龚晓南，1986)。然而在图 6.6 所示的工程问题中，深度 20 米以下砂层的变形模量比位于砂层上的软粘土层大得多。深层沉降观测表明砂层的沉降量极小。因此，对这一工程分析，计算土层取为 20 米，相应宽度也只取 40 米。地面侧向位移和沉降观测资料表明，图中 A 点附近侧向位移和沉降基本上为零。该例中计算土层范围的确定基本上由地质构造确定。边界位移条件，分为四种情况：AB 范围，水平向和竖向均可自由位移；

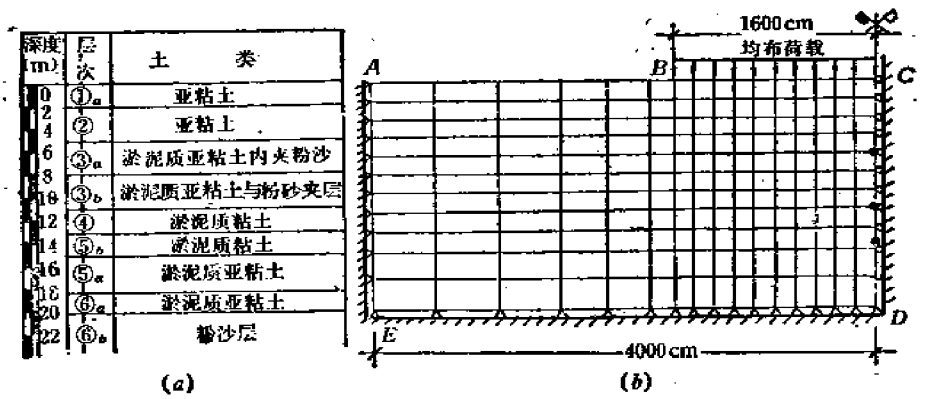


图 6.6 地质柱状图和单元划分图

BC 范围，考虑油罐环基的围箍作用以及土与油罐底板间的摩擦力，竖向可自由位移，而水平向为位移约束条件；CD 范围，考虑处在对称轴上，如图示活动铰支座，即竖向可自由位移，水平向位移为零，DE 和 AE 范围，考虑土层间的粘着力和摩擦力，简化为固定铰支座，即水平向和竖向位移均为零。上述边界条件的选用是对实际情况的简化。对孔隙水压力边界条件分为二种情况：AB、BC 和 DE 范围为完全透水边界。AB 段为地表面，孔隙水压力为零。BC 段处于油罐底，铺有碎石砂垫层。DE 面为粘土层与砂层的界面。CD 和 AE 为不透水边界。CD 为对称轴，自然为不透水边界。AE 面取为不透水边界则是对实际情况的简化。该例分析表明，计算的孔隙水压力消散速率及地基沉降速率同实测结果比较，基本上是接近的。

除柔性基础外，一般需要考虑基础以及上部结构刚度对地基固结的影响。也即在计算中要考虑地基、基础和上部结构的共同作用。在地基和基础相接触的界面上，有时需要设置界面单元。关于地基、基础和上部结构共同作用的计算请参阅第十章有关章节。如果是刚性基础，基础对地基固结的影响可采用下述方法处理。

通常在基础中也划分单元，按模量很大的弹性材料处理。基础与地基接触面上的结点满足位移协调条件，即基础与地基在变形中相互不发生脱开现象。另一可行的办法是把接触面上各结点的位移自由度编成同一号，计算结果各点的变位完全一致。对于可以转动的刚性接触边界，则可以用刚体变位的自由度替换接触面上的位移自由度。设 $\{x_2\}$ 为刚性接触面上的自由度，$\{x_1\}$ 为其它自由度，$\{x_3\}$ 为刚体变位的自由度（平面问题只有三个自由度），如 $\{x_2\}$ 与 $\{x_3\}$ 之间有下列关系，

$$\{x_2\} = [R]\{x_3\} \tag{6.22}$$

则式(6.19)可以改写为

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{13}] \\ [A_{31}] & [A_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

其中 $[A_{31}] = [R]^T[A_{21}]$，$[A_{33}] = [R]^T[A_{22}][R]$，$\{b_3\} = [R]^T\{b_2\}$。这样处理可以避免在刚性构件中划分单元时，由于两种材料模量相差过大而引起的计算误差增大。

6.5 二维有限元公式

对二维问题，设 u，v 和 h 分别为水平和竖向位移和孔隙水头，则有限元内插公式为

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^{n} N_i v_i \\ h &= \sum_{i=1}^{n} \bar{N}_i h_i \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

式中 u_i，v_i 和 h_i 为结点变量。

式(6.24)对个别单元和整个计算域都适用。对于前者，n 为单元结点数；对于后者，n 为结点总数。以图 6.2 的四边形 2-1 单元和 1^N-1 单元为例，此时在局部坐标 ξ、η 上形函数为如下形式(Zienkiewicz, 1977)：

2-1 单元

$$\left.\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1), && i=1,2,3,4\\
N_i &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta), && i=6,8\\
N_i &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi), && i=5,7\\
\bar{N}_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), && i=1,2,3,4
\end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

1^N-1 单元

$$\left.\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) && i=1,2,3,4\\
N_5 &= 1-\xi^2;\quad N_6=1-\eta^2\\
\bar{N}_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) && i=1,2,3,4
\end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

式中 ξ_i 和 η_i 等于 $+1$ 或 -1 (图 6.7)。将上式代入式(6.13)和式(6.14)后可得下列 i 结点的水平和竖向力的平衡方程及连续方程。其表达式为：

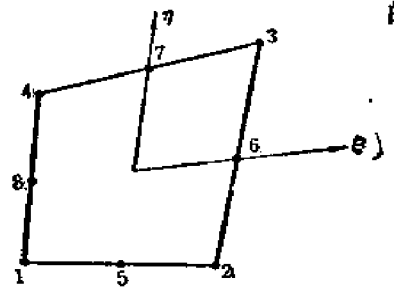


图 6.7 单元形函数

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}(g_{ij}^{11}\Delta u_j+g_{ij}^{12}\Delta v_j+g_{ij}^{13}\Delta h_j)=\Delta F_i^1\\
&\sum_{j=1}^{n}(g_{ij}^{21}\Delta u_j+g_{ij}^{22}\Delta v_j+g_{ij}^{23}\Delta h_j)=\Delta F_i^2\\
&\sum_{j=1}^{n}(g_{ij}^{31}\Delta u_j+g_{ij}^{32}\Delta v_j+g_{ij}^{33}\Delta h_j)=\Delta F_i^3\\
&(i=1,2,3,\cdots,n)
\end{aligned}\right\} \tag{6.27}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} g_{ij}^{11} & g_{ij}^{12}\\ g_{ij}^{21} & g_{ij}^{22}\end{bmatrix} &= \sum_{1}^{n_e}\iint [B_i][D][B_j]\,dx\,dz\\
g_{ij}^{13} &= -\sum_{1}^{n_e}\rho_w g\iint N_j(\bar{a}_i+\bar{b}_i)\,dx\,dz\\
g_{ij}^{23} &= -\sum_{1}^{n_e}\rho_w g\iint N_j\bar{c}_i\,dx\,dz\\
g_{ij}^{31} &= -\sum_{1}^{n_e}\rho_w g\iint N_i(\bar{a}_j+\bar{b}_j)\,dx\,dz\\
g_{ij}^{32} &= -\sum_{1}^{n_e}\rho_w g\iint N_i\bar{c}_j\,dx\,dz\\
g_{ij}^{33} &= -\sum_{1}^{n_e}\iint \bar{N}_i\beta\bar{N}_j\,dx\,dz-\theta\Delta t\sum_{1}^{n_e}\iint(k_x\bar{b}_i\bar{b}_j+k_z\bar{c}_i\bar{c}_j)\,dx\,dz
\end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

ΔF_i^1 和 ΔF_i^2 分别为水平向和竖直向结点力，而

$$\Delta F_i^3=\Delta t\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{1}^{n_e}\iint(k_x\bar{b}_i\bar{b}_j+k_z\bar{c}_i\bar{c}_j)\,dx\,dy\right)h_{jn} \tag{6.29}$$

式中 h_{jn} 为 $t=t_n$ 时 j 结点的水头。

上述式中[D]为应力应变矩阵，即

$$\{\Delta\sigma\}=[D]\{\Delta\varepsilon\} \tag{6.30}$$

或

$$\begin{Bmatrix}\Delta\sigma_x\\ \Delta\sigma_y\\ \Delta\sigma_z\\ \Delta\tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}&d_{14}\\ d_{21}&d_{22}&d_{23}&d_{24}\\ d_{31}&d_{32}&d_{33}&d_{34}\\ d_{41}&d_{42}&d_{43}&d_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_x\\ \Delta\varepsilon_y\\ \Delta\varepsilon_z\\ \Delta\gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{6.31}$$

而应变位移转换矩阵为：

$$[B_i]=\begin{bmatrix}b_i&0\\ a_i&0\\ 0&c_i\\ c_i&b_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}&0\\ \dfrac{N_i}{r}&0\\ 0&\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}&\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{6.32}$$

β 为孔隙水压缩系数，k_x 和 k_z 为水平向和竖向渗透系数，n_e 为单元总数。$\bar{a}_i$ 用于轴对称问题，此时 r 为计算点半径，x 代表径向，y 代表环向，且式 6.28 中各项积分值应乘上 $2\pi r$，对平面应变问题可令 $a_i=0$ 和 $\Delta\varepsilon_y=0$。

具体计算时，上述单元内的积分可用 Gauss 数值积分。但是，对于 1-0 型单元，h 在单元中为常量，即 $\bar{N}=1$，因而无法求得 $\partial\bar{N}/\partial x$ 和 $\partial\bar{N}/\partial z$。为此，Christian 和 Boehmer(1970)建议了下列变通办法。设 h_i 和 h_j，h_k、h_l、h_m 为所考察单元及其相邻的 4 个单元的孔隙水头，该单元邻近的孔隙水头变化可按下列内插公式计算：

$$h=\alpha_1+\alpha_2\bar{x}+\alpha_3\bar{z}+\alpha_4\bar{x}^2+\alpha_5\bar{z}^2 \tag{6.33}$$

或

$$h=\{C\}\{\alpha\} \tag{6.34}$$

式中 $\{C\}=\{1\ \bar{x}\ \bar{z}\ \bar{x}^2\ \bar{z}^2\}$；$\{\alpha\}=\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\}^T$；$\bar{x}$ 和 $\bar{z}$ 为以该单元中心为原点的局部坐标。待定向量$\{\alpha\}$与结点水头$\{h\}$之间有下列关系：

$$\begin{Bmatrix}h_i\\ h_j\\ h_k\\ h_l\\ h_m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\ 1&\bar{x}_j&\bar{z}_j&\bar{x}_j^2&\bar{z}_j^2\\ 1&\bar{x}_k&\bar{z}_k&\bar{x}_k^2&\bar{z}_k^2\\ 1&\bar{x}_l&\bar{z}_l&\bar{x}_l^2&\bar{z}_l^2\\ 1&\bar{x}_m&\bar{z}_m&\bar{x}_m^2&\bar{z}_m^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{Bmatrix}=[A]\{\alpha\} \tag{6.35}$$

于是可得

$$\{\alpha\}=[A]^{-1}\{h\} \tag{6.36}$$

代入式(6.34)，得

$$h=\{C\}[A]^{-1}\{h\} \tag{6.37}$$

令

$$[\bar{N}]=\{C\}[A]^{-1} \tag{6.38}$$

式中

$$[\bar{N}]=[\bar{N}_i\ \bar{N}_j\ \bar{N}_k\ \bar{N}_l\ \bar{N}_m]$$

结合以上各式可求出 $\bar{b}_i=\dfrac{\partial\bar{N}_i}{\partial x}$ 和 $c_i=\dfrac{\partial\bar{N}_i}{\partial z}$ 等项。当然，此时不能只取一个单元，而要同

时对相邻的单元进行计算。

下面附上一段摘自 CONDEP 程序内四边形 1-1 型单元的子程序(沈珠江,1985)。

P.6.1 二维 Biot 固结问题系数矩阵和右端项计算子程序 GEP

【功能】 按式(6.27)用 2×2 Gauss 积分法求出 i 和 j 两点之间的 3×3 系数矩阵及右端项,并叠加到总系数矩阵中去。

【标识符】

D_{11}~D_{44}——式(6.31)[D]矩阵诸元素

NE, N——单元和结点总数

NC——0为平面应变,1为轴对称问题

```
      SUBROUTINE GEP
      COMMON /C1/D11,D22,D33,D44,D12,
     * D13,D14,D23,D24,D34/C2/NE,NP,
     * NC,AT,DT/C3/MTE(500),IPE(500,4)
     * /C4/LP(500,3),X(500),Z(500),H(5
     * 00)/C5/M(1200),Y(1200),G(30000)
     * /C6/VI(2),VJ(2),CCK(10),CKV(10)
     * ,CRK(10),DH(60)
      DIMENSION QN(4),PN(2,4),GE(3,3),
     * LE(4,3),XE(4),ZE(4),HE(4)
      DO 120 K=1,NE
      ME=MTE(K)
      EG=CCK(ME)
      EK=CRK(ME)
      ET=DT*CKV(ME)
      DO 30 I=1,4
      IP=IPE(K,I)
      HE(I)=H(IP)
      XE(I)=X(IP)
      ZE(I)=Z(IP)
      DO 30 J=1,3
      LE(I,J)=LP(IP,J)
30    CONTINUE
      CALL DP
      IF(NC.EQ.0) ER=1.0
      DO 100 IG=1,2
      DO 100 JG=1,2
      V1=VI(IG)
      V2=VJ(JG)
      S1=(1.-V1)/2.
      S2=(1.+V1)/2.
      S3=(1.-V2)/2.
      S4=(1.+V2)/2.
      QN(1)=S1*S3
      QN(2)=S2*S3
      QN(3)=S2*S4
      QN(4)=S1*S4
      PN(1,1)=-S3/2.
      PN(1,2)=S3/2.
      PN(1,3)=S4/2.
      PN(1,4)=-S4/2.
      PN(2,1)=-S1/2.
      PN(2,2)=-S2/2
      PN(2,3)=S2/2.
      PN(2,4)=S1/2.
      A=0.
      B=0.
      C=0.
      D=0.
      IF(NC.EQ.1) ER=0.
      DO 50 I=1,4
      A=A+PN(2,I)*ZE(I)
      B=B-PN(1,I)*ZE(I)
      C=C-PN(2,I)*XE(I)
      D=D+PN(1,I)*XE(I)
      IF(NC.EQ.1) ER=ER+QN(I)*XE(I)
50    CONTINUE
      IF(NC.EQ.1) ER=ER*6.2832
      DE=A*D-B*C
      DO 90 I=1,4
      IP=ITE(K,I)
      AI=0.
      IF(NC.EQ.1) AI=DE*QN(I)/ER
      BI=A*PN(1,I)+B*PN(2,I)
      CI=C*PN(1,I)+D*PN(2,I)
      DO 80 J=1,4
      JP=ITE(K,J)
      AJ=0.
      IF(NC.EQ.1) AJ=DE*QN(J)/ER
      BJ=A*PN(1,I)+B*PN(2,J)
      CJ=C*PN(1,I)+D*PN(2,J)
      GE(1,1)=ER*(D11*BI*BJ+D33*AI*AJ
     * +D44*CI*CJ+D13*(AI*BJ+AJ*BI)+
     * D14*(BI*CJ+BJ*CI)+D34*(AI*CJ+
     * AJ*CI))/DE
      GE(1,2)=ER*(D12*BI*CJ+D23*AI*CJ
     * +D14*BI*BJ+D24*CI*CJ+D34*AI*BJ
     * +D44*CI*BJ)/DE
      GE(2,1)=ER*(D12*CI*BJ+D23*CI*AJ
     * +D14*BI*BJ+D24*CI*CJ+D34*BI*AJ
     * +D44*BI*CJ)/DE
      GE(2,2)=ER*(D22*CI*CJ+D44*BI*BJ
     * +D24*(CI*BJ+BI*CJ))/DE
      ES=-ER*ET*(EK*BI*BJ+CI*CJ)/DE
      GE(3,3)=ES/1.5-ER*EG*QN(I)*QN(J)
     * *DE
      GE(1,3)=-ER*(AI+BI)*QN(J)*9810.
      GE(3,1)=-ER*(AJ+BJ)*QN(I)*9810.
      GE(2,3)=-ER*CI*QN(J)*9810.
      GE(3,2)=-ER*CJ*QN(I)*9810.
      DO 70 IK=1,3
      LI=LE(IP,IK)
      IF(LI.LE.0) GOTO 70
      DO 60 JK=1,3
      LJ=LE(JP,JK)
      IF(LJ.LE.0.OR.LJ.GT.LI) GOTO 60
      MR=M(LI)-LI+LJ
      G(MR)=G(MR)+GE(IK,JK)
60    CONTINUE
      IF(IK.EQ.3) Y(LI)=Y(LI)-ES*HE(J)
      IF(LJ.LT.0) Y(LI)=Y(LI)-GE(IK,3)
     * *DH(-LJ)
70    CONTINUE
80    CONTINUE
90    CONTINUE
100   CONTINUE
120   CONTINUE
      RETURN
      END
```

6.6 砂井地基固结计算

软粘土地基经常采用砂井预压法加速排水固结，以提高地基强度，减少构筑物建成后的沉降量。

应用 Biot 固结理论进行砂井地基固结计算在理论上与一般地基固结计算并没有很大区别。然而，由于砂井地基的变形和渗流严格地讲都属三维问题，而且由于袋装砂井等新技术的应用，使砂井间距大为减小，因此，精确的砂井地基三维固结分析在实际工程分析中遇

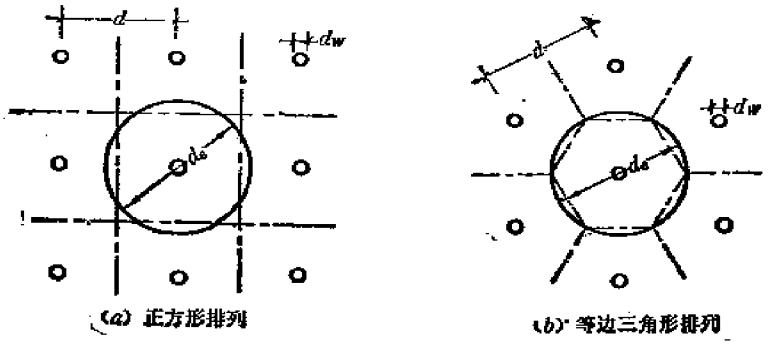


图 6.8 砂井在平面上的排列

到计算工作量过大的困难。在实际应用中，主要有下述三种计算方法：单井计算法；等价砂墙简化法和平面变形-空间渗流分析法。下面对三种计算方法作简要介绍：

1. 单井计算法

砂井在平面上一般按正方形和等边三角形(梅花形)布置(图 6.8)。作为一种近似，可以取一单井按轴对称问题进行分析，以代替对整个砂井地基的分析。上述近似等价于假定在两井之间的对称轴上，无水平变位和水量通过。对大面积的砂井地基，粘土层在平面上分布比较均匀，深度又不大的情况，这一假定引起的误差较小。根据控制面积相等的原则，在单井计算中，等效直径 d_e 与砂井间距 d 的关系如下：对于正方形排列，$d_e=1.13d$；对于等边三角形排列，$d_e=1.05d$。单井计算简图如图 6.9 所示。计算域范围为 $r_e=d_e/2$。边界条件可作如下考虑：外侧垂直面 bc 上位移边界条件为活动铰支座，孔隙水压力边界条件为不透水边界；对称轴 ad 上位移边界条件也为活动铰支座，孔隙水压力边界条件分为两部分：(一) ed 段为不透水边界。(二) ae 段又可分两种情况考虑：不考虑砂井阻力，ae 段内为完全透水边界；若考虑井阻作用，ae 段内边界上为不透水边界，但井内也划分单元，赋予井内砂料以固有的渗透系数和其它计算参数。计算域底面 cd 上位移边界条件一般可取固定铰支座，孔隙水压力边界条件视计算域土层下相邻土层情况确定。若为砂层可采用透水边界，若为粘土层可采用不透水边界。地表面一般铺有透水砂垫层，ab 面上位移边界条件可采用无约束自由边界条件，孔隙水压力边界条件为透水边界。对真空预压情况，若考虑井阻作

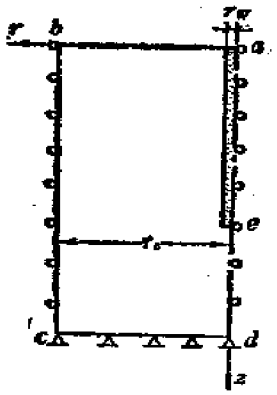


图 6.9 单井计算简图

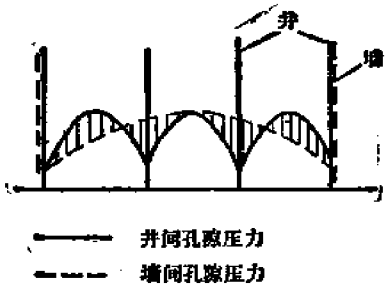


图 6.10 等价砂墙

用，ab 面上孔隙水压力值等于真空值，其它不变。若不考虑井阻作用，ab 面上和 ac 轴线上孔隙水压力值均等于真空值，其它条件不变。

2．等价砂墙简化法

当砂井地基及其上的荷载分布为长条形(如路堤)或圆形(如贮罐地面)时，可以通过等价砂墙简化法，按平面应变问题或轴对称问题计算。所谓等价砂墙简化法就是采用一道道连续的等价砂墙代替一个一个的砂井。在轴对称问题中，等价砂墙为一道道环形墙。用砂墙代替砂井，把三维问题变成了二维问题。采用等价砂墙简化法，为了得到合理的孔隙水压力分布，两道砂墙之间至少应当布置三排结点。因此，如果令砂墙的间距等于砂井的间距，结点仍然太多。实际计算中可进一步把砂井间距放大，同时把土的水平向渗透系数按井距放大倍数的平方放大，以保持水平向固结系数不变。如此简化后得到的计算结果可以保证同一平面上砂墙之间的最大孔隙水压力和平均孔隙水压力大体上等于砂井之间的相应值(沈珠江和易进栋，1987)。等价砂墙的间距与砂井间距的关系也可根据使两者固结度达到50%时所需要的时间相等这一条件来确定(Shinsha，1982)。

3．平面应变-空间渗流分析法

谢康和(1987)首先用等面积的方井代替圆形砂井，然后对图 6.11(a) 所示的砂井地基取图中阴影部分作为计算域，并离散成如图 6.11(b) 所示。图 6.11(b) 中，以 x 轴为法线的两面位移边界条件为 x 方向固定，z 方向和 y 方向可以位移，孔隙水压力边界条件为不透水边界；$y=0$ 面为中心面，y 方向固定，其它方向可发生位移，孔隙水压力边界条件为不透水边界；$y\neq0$ 和 $z\neq0$ 的边界面(即右面和下面)位移边界条件为固定约束，孔隙水边界条件为不透水(下界面若有透水层可处理为透水边界)边界；$z=0$ 面上为自由边界和透水边界。这种处理方法视地基的变形为平面的，而其中渗流是空间的，故称为平面变形、空间渗流分析法。这种方法较适用于受长条形荷载作用的砂井地基。如果砂井排列按三角形布置，还应当根据控制面积相等的原则化作等效的正方形布置。

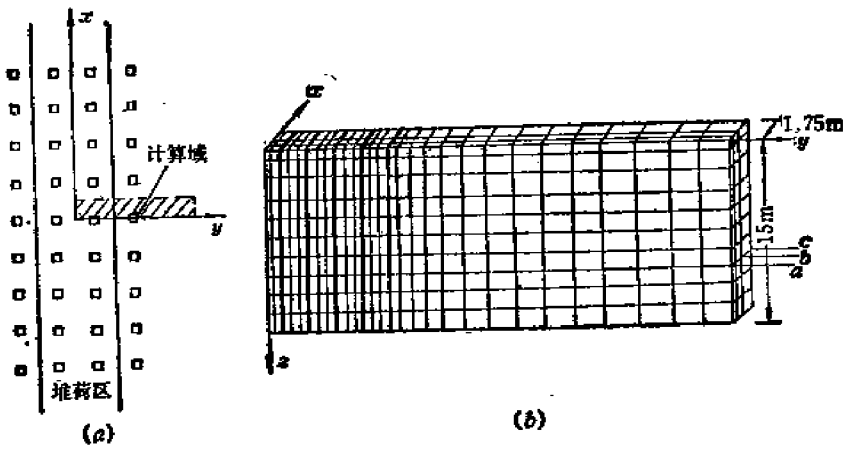


图 6.11 砂井地基的平面变形——空间渗流分析

6.7 流变特性的考虑

软粘土具有较显著的流变性，在某些情况下忽略不计可能会造成较大的误差。对粘弹性骨架的 Biot 固结问题，Booker 等(1977)通过 Laplace 变换后采用有限元法求解，后来又

对成层地基用有限层法求解 (Small and Booker, 1982)。材料性质不同，主要反映在本构关系上，对在固结分析中如何考虑材料的粘弹塑性下面作一简要介绍：

对粘弹塑性介质，总应变增量应包括弹性、塑性和蠕变三部分，即

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^c\} \tag{6.39}$$

这时，本构方程可以表达为

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_{ep}(\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^c\}) \tag{6.40}$$

式中 $[D]_{ep}$——材料弹塑性矩阵。

蠕变增量可表示为

$$\{\Delta\varepsilon^c\} = \{\dot{\varepsilon}^c\}\Delta t \tag{6.41}$$

$[\dot{\varepsilon}^c]$ 为蠕变速率，可以用 Voigt 体或 Marxwell 流变模型计算 (Gioda & Olvidini, 1979)，也可以通过某种经验公式得出，例如

$$\dot{\varepsilon}_s = C_t \frac{D_s^m}{t} \tag{6.42}$$

式中 $\dot{\varepsilon}_s$ 为剪切流变速率；D_s 为剪应力水平或剪应力与抗剪强度之比；C_t 和 m 为计算参数。蠕变速率可由下式计算，

$$\{\dot{\varepsilon}^c\} = \dot{\varepsilon}_s \frac{\{S\}}{q} \tag{6.43}$$

式中 $\{S\}$ 为偏应力张量，q 为广义剪应力。上式中未考虑体积应变。

更一般的关系式可以从粘塑性理论出发推导。先仿照式(3.46)，把式(6.39)改写为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} + A_p\{n_p\}\Delta f + \dot{A}_c\{n_c\}\Delta t \tag{6.44}$$

式中

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = A_p\Delta f\{n_p\} \tag{6.45}$$

代表硬化或屈服面 f 扩大引起的塑性应变增加，$A_p\Delta f$ 为应变向量的大小，$\{n_p\}$ 为方向。

$$\{\Delta\varepsilon^c\} = \dot{A}_c\{n_c\}\Delta t \tag{6.46}$$

表示随时间而发展的蠕变量，$\dot{A}_c$ 为蠕变率，$\{n_c\}$ 则为蠕变向量的方向。假定 $\{n_p\} = \{n_c\}$，并与屈服面正交，则式(6.44)可以改为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\Delta\varepsilon\} + (<A_p>\Delta f + <\dot{A}_c>\Delta t)\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}}{\left\|\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\|} \tag{6.47}$$

上式中符号 $<A_p>$ 表示当 $\Delta f > 0$ 时，$A_p > 0$，否则为 0；$<\dot{A}_c>$ 只有当 f 大于某一 f_s 时大于 0，否则为 0。

下面以 Adachi (1982) 等建议的考虑蠕变的剑桥弹头型屈服面为例作进一步说明。此时屈服函数为

$$f = p\exp\left(\frac{\eta}{M}\right) \tag{6.48}$$

而压缩曲线为

$$\varepsilon_v = C_c \ln\frac{p_{is}}{p_{io}} \tag{6.49}$$

弹性应变为

$$\varepsilon_v^e = C_s \ln\frac{p_{is}}{p_{io}} \tag{6.50}$$

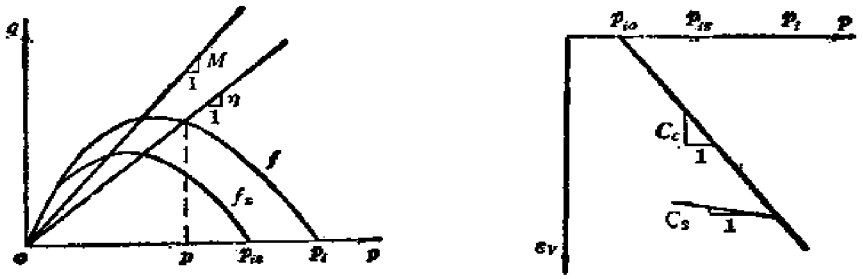


图 6.12 考虑蠕变的剑桥模型

塑性体应变为

$$\varepsilon_v^p = (C_c - C_s)\ln\frac{p_{is}}{p_0} \tag{6.51}$$

或

$$f_s = p_{is} = p_{i0}\exp\frac{\varepsilon_v}{C_c - C_s} \tag{6.52}$$

p_{i0} 为 $\varepsilon_v = 0$ 时的起始固结压力(图 6.12)。Adachi 的模型中不考虑 A_s，而建议的 $\dot{A}_s$ 表达式为

$$\dot{A}_s = C\exp\left[m\left(\ln\frac{p}{p_{i0}} + \frac{\eta}{M} - \frac{\varepsilon_v^p}{C_c - C_s}\right)\right] \tag{6.53}$$

代入式(6.48)和式(6.52)，上式可改写为

$$\dot{A}_s = C\left(\frac{f}{f_s}\right)^m \tag{6.54}$$

f 和 f_s 在数值上等于等向固结压力 p_i 和 p_{is}，f_s 为参考屈服面，C 和 m 为两个计算参数。蠕变率 $\dot{A}_s$ 随比值 f/f_s 的增大而增大，当 $f \leqslant f_s$ 时，$\dot{A}_s = 0$。

蠕变应变增量可表示为

$$\{\Delta\varepsilon^c\} = \dot{A}_s\frac{\left\{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}}{\left\|\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right\|}\Delta t \tag{6.55}$$

把蠕变部分当作初应变，即可用常见的初应变法求解。蠕变计算也可以不用初应变法，而用其它理论上更好的方法，但计算的复杂性大大增加。因而通常采用的仍是初应变法。但用此法时选用的时段 Δt 不能太大，否则计算的结果将不稳定。合适的时段长应使蠕动应变的增量小于总弹性应变的一半，即满足

$$\Delta t\{\dot{A}_s\} \leqslant \frac{1}{2}\|\{\varepsilon^e\}\| \tag{6.56}$$

6.8 Terzaghi-Rendulic 准固结理论差分解法

Terzaghi-Rendulic 准固结方程虽然在理论上没有 Biot 固结理论精确，然而由于它不考虑土骨架变形与渗流的耦合作用，计算比较简单，在工程上常用它求解任意时刻地基内的孔隙水压力，并由此求出任意时刻地基内的固结度。下面介绍根据Terzaghi-Rendulic 固结方程进行层状地基固结度计算的有限差分 ADI 方法(曹名葆、王德纯，1988)。对路堤等二维问题，Terzaghi-Rendulic 固结方程可表示为

$$c_x\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2}+c_z\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}=\frac{\partial p_w}{\partial t} \tag{6.57}$$

式中 c_x 和 c_z 分别表示水平向和竖向固结系数。采用有限差分法求解式 6.57，选择合适的差分格式和建立相应点的差分表达式是十分重要的。

1. 差分格式的选择

当采用显式差分格式时，由于需要满足稳定性条件，所以当土的渗透系数较大，或由于计算精度需要把网格加密时，时间步长只能取得很小，以致于计算时间很长。现采用交替方向隐式差分格式。其基本思想是，按已知 t 时刻孔隙水压力 p_w 值去求 $(t+1)$ 时刻 p_w 值时，增设了一个中间时刻$\left(t+\frac{1}{2}\right)$，然后把 $\partial^2 p_w/\partial z^2$ 取成隐式格式，把 $\partial^2 p_w/\partial x^2$ 取成显式格式。这样，对分界面上点$(i,\ j)$(图6.13)，式(6.57)可写成

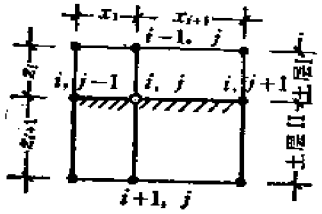


图 6.13 用有限差分解二维固结问题的网格

$$\bar{c}_x\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2}\right)_{i,j,t}+\bar{c}_z\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}\right)_{i,j,t+\frac{1}{2}}=\left(\frac{\partial p_w}{\partial t}\right)_{i,j,t+\frac{1}{2}} \tag{6.58}$$

从上式求得$\left(t+\frac{1}{2}\right)$时刻的 p_w 值后，再作一轮计算。为了保持对称性，此时 $\partial^2 p_w/\partial z^2$ 取成显式格式，而 $\partial^2 p_w/\partial x^2$ 取成隐式格式。于是，式 6.57 可写成

$$\bar{c}_x\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2}\right)_{i,j,t+1}+\bar{c}_z\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}\right)_{i,j,t+\frac{1}{2}}=\left(\frac{\partial p_w}{\partial t}\right)_{i,j,t+1} \tag{6.59}$$

式中 $\bar{c}_x$、$\bar{c}_z$ 分别是分层界面处水平向和竖直向的平均固结系数，计算方法将在后面介绍。解式 6.59 可获得 $t+1$ 时刻的 p_w 值。

由于在 x、z 方向交替地使用隐式差分，故它具有节省计算机存贮量和无条件稳定等优点。这样，就可采用变化的时间步长，在 p_w 值变化缓慢的时段内，取用较大的时间步长，以缩短运算时间。

2. 分层界面上点的差分方程的建立

现讨论图 6.13 中分界点$(i,\ j)$。根据水在水平向连续渗流的特点，即水平向总渗流量等于各分层渗流量之和，各分层内水力坡降相同等条件，它的水平向固结系数可取用加权平均值，即

$$\bar{c}_x=\frac{c_{x1}\cdot z_i+c_{x2}\cdot z_{i+1}}{z_i+z_{i+1}} \tag{6.60}$$

式中 c_{x1}、c_{x2} 分别是第 I 和第 II 土层的水平向固结系数。于是，x 向的二阶导数，通过 Taglor 级数展开而成

$$\bar{c}_x\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2}\right)_{i,j,t}=\frac{2\bar{c}_x}{x_i(x_i+x_{i+1})}(p_w)_{i,j-1,t}-\frac{2\bar{c}_x}{x_i x_{i+1}}(p_w)_{i,j,t}+\frac{2\bar{c}_x}{x_{i+1}(x_i+x_{i+1})}(p_w)_{i,j+1,t} \tag{6.61}$$

当渗流与层面正交时，竖向固结系数若仍取加权平均值，即把多层非均质土当作均质土来处理，所得到的孔隙水压力分布线较为光滑（图 6.14），在分层界面处无折变现象，不可能反映多层介质体系中的渗流特点。当水沿竖向渗流时，除在界面处要满足水流连续性条件外，还要满足变形协调条件。取图 6.13 中点$(i,\ j)$处一微分体，根据单位时间内，土层

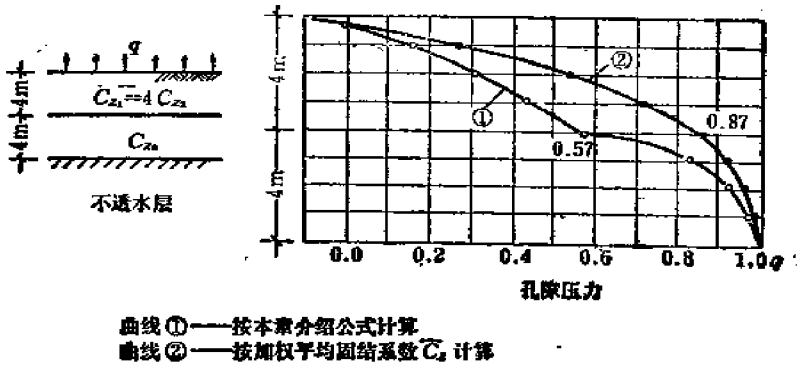


图 6.14 孔隙水压力分布线

I、II 内的竖向变形量的和等于相对应的均一土层变形量的协调条件，可写出如下关系式，

$$\left(\frac{k_{z1}}{c_{z1}}\cdot\frac{z_i}{2}\right)\frac{\partial p_w}{\partial t}+\left(\frac{k_{z2}}{c_{z2}}\cdot\frac{z_{i+1}}{2}\right)\frac{\partial p_w}{\partial t}=\left(\frac{\bar{k}_z}{\bar{c}_z}\cdot\frac{z_i+z_{i+1}}{2}\right)\frac{\partial p_w}{\partial t} \tag{6.62}$$

于是可得

$$\bar{c}_z=\frac{c_{z1}\cdot c_{z2}(z_i+z_{i+1})}{c_{z1}\cdot k_{z2}\cdot z_{i+1}+c_{z2}\cdot k_{z1}\cdot z_i}\bar{k}_z=m\bar{k}_z \tag{6.63}$$

式中 k_{z1}, c_{z1} 分别为第 I 层土的竖向渗透系数和固结系数。$\bar{k}_z$ 为均一土层的竖向渗透系数；若取 $\bar{k}_z=k_{z1}$，即土层 II 的 k_{z2} 用 k_{z1} 所替代，则为了保证水流流速的连续性条件，点 $(i+1, j)$处的孔隙水压力要满足下列条件

$$(p_w)'_{i+1,j,t+\frac{1}{2}}=\frac{k_{z2}}{k_{z1}}\left[(p_w)_{i+1,j,t+\frac{1}{2}}-(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}}\right]+(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}} \tag{6.64}$$

于是，式 6.58 左边的第二项可写成

$$\begin{aligned}\bar{c}_z\left(\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}\right)_{i,j,t+\frac{1}{2}}=&\frac{2mk_{z1}}{z_i(z_i+z_{i+1})}(p_w)_{i-1,j,t+\frac{1}{2}}-\frac{2mk_{z1}}{z_i\cdot z_{i+1}}(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}}\\&+\frac{2mk_{z1}}{z_{i+1}(z_i+z_{i+1})}(p_w)'_{i+1,j,t+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{6.65}$$

如果图 6.13 中上、下二层土的性质以及网格间隔均相同时，则式(6.65)即成为最普通的差表达分式。

式(6.58)的右端项取向后差分

$$\left(\frac{\partial p_w}{\partial t}\right)_{i,j,t+\frac{1}{2}}=\frac{2[(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}}-(p_w)_{i,j,t}]}{\Delta t} \tag{6.66}$$

将式(6.61)，(6.64)，(6.65)，和(6.66)代入式(6.58)，整理后便获得分层界面处点(i, j)的交替方向隐式差分方程的表达式：

$$\begin{aligned}&m\eta_1(p_w)_{i-1,j,t+\frac{1}{2}}-(m\eta_1+m\eta_2+2)(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}}+m\eta_2\cdot(p_w)_{i+1,j,t+\frac{1}{2}}\\&=-[\eta_3\cdot(p_w)_{i,j-1,t}-(\eta_3+\eta_4-2)(p_w)_{i,j,t}+\eta_4\cdot(p_w)_{i,j+1,t}]\end{aligned} \tag{6.67}$$

同理，式(6.59)也可写成

$$\begin{aligned}&\eta_3\cdot(p_w)_{i,j-1,t+1}-(\eta_3+\eta_4+2)(p_w)_{i,j,t+1}+\eta_4\cdot(p_w)_{i,j+1,t+1}\\&=-[m\eta_1(p_w)_{i-1,j,t+\frac{1}{2}}-(m\eta_1+m\eta_2-2)(p_w)_{i,j,t+\frac{1}{2}}+m\eta_2(p_w)_{i+1,j,t+\frac{1}{2}}]\end{aligned} \tag{6.68}$$

式中

$$\eta_1=\frac{2\Delta t\cdot k_{z1}}{(z_i+z_{i+1})z_i},\qquad \eta_2=\frac{2\Delta t\cdot k_{z2}}{(z_i+z_{i+1})z_{i+1}},\qquad \eta_3=\frac{2\bar{c}_x\cdot\Delta t}{(x_i+x_{i+1})x_i}$$

$$\eta_4=\frac{2\bar{c}_x\cdot\Delta t}{(x_i+x_{i+1})x_{i+1}},\qquad \bar{c}_x=\frac{c_{x1}\cdot z_i+c_{x2}\cdot z_{i+1}}{z_i+z_{i+1}}$$

列出计算网格内所有结点的相应差分方程，解联立方程组后便可求得 $(t+1)$ 时刻各点的孔隙水压力 $(p_w)_{i,j,t+1}$。

根据 $t_0(t=0)$ 和 t 时刻的孔隙水压力值，可以得到点$(i,\ j)$在 t 时刻的固结度，即

$$U_{i,j,t}=\frac{(p_w)_{i,j,t_0}-(p_w)_{i,j,t}}{(p_w)_{i,j,t_0}} \tag{6.69}$$

正确估计地基的固结度对于计算土的抗剪强度增长以及对地基稳定性有效应力分析，都具有重要的意义。

下面附上用 ADI 方法计算孔隙水压力程序中的子程序（曹名葆、王德纯，1988）。

P.6.2 交替方向隐式(ADI)二维固结差分方程求解的程序

【功能】 求时刻$\left(t+\frac{1}{2}\right)$和$(t+1)$的孔隙水压力，按式(6.67)、(6.68)计算；而相应的网格结点编号分别如图 6.15*a*、6.15*b* 所示。

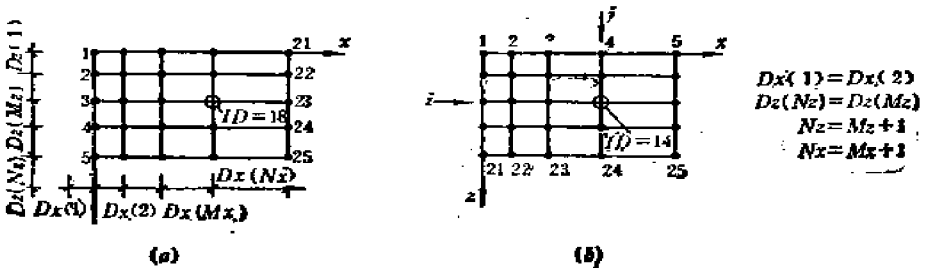


图 6.15 二维固结问题的网格结点号

子程序 COEFFI 是用于计算第 ID 结点、相应于式(6.67)、(6.68)中的有关系数。计算结果 A_1、A_2、…、A_6 分别表示公式中的系数：$m\eta_1$、$m\eta_2$、$(m\eta_1+m\eta_2)$、η_3、η_4 和$(\eta_3+\eta_4)$。

由于式(6.67)、(6.68)左端项包含三个未知数的代数方程组；也即是只有在三条对角线上有值，其余都为零元素；对此，可调用子程序 GAUSS 求解三对角线方程组。

【标识符】

子程序 COEFFI 中：

Nx、*Nz*——*x* 向和 *z* 向的结点个数；

Dx(*j*)、*Dz*(*i*)——*x* 向和 *z* 向的网格间距；

SKH(*i*)、SKV(*i*)——相应于地表 *x* 轴以下第 *i* 土层水平向和竖直向的渗透系数；

GH(*i*)、CV(*i*)——相应于地表 *x* 轴以下第 *i* 土层水平向和竖直向的固结系数；

DTI——时间步长；

NN——变量；当 NN=1 时，按图(6.15*a*)计算；当 NN=2 时，按图(6.15b)计算；其它符号说明见图 6.15*a* 及 *b*。

子程序 GAUSS 中：

N——方程组个数，即网格的结点数；

A(I)——存放下对角线元素，$I=2, N$；

B(I)——存放对角线元素，$I=1, N$；

C(I)——存放上对角线元素，$I=1, N-1$；

D(I)——方程组的右端已知项，求解后存放待求结果。

【说明】 在应用子程序时，要针对工程具体问题考虑边界条件。例如，土层顶面透水时，$u_{1,j,t}=0$ 等。

```
      SUBROUTINE COEFFI(I,J,ID,NX,
     * NZ,DX,DZ,SKH,SKV,CH,CV,NN)
      COMMON A1,A2,A3,A4,A5,A6,DTI
      DIMENSION DX(NX),DZ(NZ),
     * SKH(NZ),SKV(NZ),CH(NZ),CV(NZ)
C
      IF NN=1 THEN
      ID=(J-1)*NZ+I
      ELSE
      ID=(I-1)*NX+J
      END IF
      AX=DX(J)+DX(J+1)
      AZ=DZ(I-1)+DZ(I)
      DMV=CV(I-1)*CV(I)*AZ/
     * (CV(I-1)*SKV(I)*DZ(I)+
     * CV(I)*SKV(I-1)*DZ(I-1))
      DMH=(CH(I-1)*DZ(I-1)+CH(I)*
     * DZ(I))/AZ
      A1=DMV*(2.0*DTI*SKV(I-1)/
     * (AZ*DZ(I-1)))
      A2=DMV*(2.0*DTI*SKV(I)/
     * (AZ*DZ(I)))
      A3=A1+A2
      A4=2.0*DMH*DTI/(AX*DX(J))
      A5=2.0*DMH*DTI/(AX*DX(J+1))
      A6=A4+A5
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE GAUSS(N,A,B,C,D)
      DIMENSION A(N),B(N),C(N),D(N)
C
      NM1=N-1
      C(N)=0.0
      C(1)=C(1)/B(1)
      D(1)=D(1)/B(1)
      DO 4 I=1,NM1
      DEMON=B(I+1)-A(I+1)*C(I)
      IF(DEMON)8,10,8
8     C(I+1)=C(I+1)/DEMON.
4     D(I+1)=(D(I+1)-A(I+1)*D(I))
     * /DEMON
      DO 5 I=1,NM1
      K=N-I
5     D(K)=D(K)-C(K)*D(K+1)
      GOTO 80
10    WRITE(6,102)
102   FORMAT(/,1X,5X,'MATRIX IS
     * SINGULAR *** FAILURE ***')
80    CONTINUE
      RETURN
      END
```

参 考 文 献

1. Adachi, T., Oka, F. & Tange, Y., Finite element analysis of two-dimensional consolidation using an elastic-viscoplastic constitutive equation, 4th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, p.287, 1982.
2. Biot, M. A., General theory of three dimensional consolidation, J. Appl. Physics, Vol. 12, p.155, 1941.
3. Booker, J. R. & Small, J. C., An inverstigation of the stability of numerical solution of Biot's equation of consolidation, Int. J. Solids & Structures, Vol. 11, p.907, 1975.
4. Booker, J R. & Small, J. C., Finite element analysis of primary and secondary consolidation, Int. J. Solids and Structures, Vol. 13, No. 2, 1977.
5. 曹名葆，王德纯，用应力路径法分析路堤的稳定性，土木工程学报，Vol. 21, No. 1, 1988, 2
6. Christian, J. T. and Boehmer, J. W., Plane strain consolidation by finite element method, J. Soil Mech. and Found. Div., ASCE Proc., No. SM4, p.1435, 1970.
7. 龚晓南，软土地基固结有限元分析，浙江大学硕士论文，1981，
8. 龚晓南，油罐软粘土地基性状，浙江大学博士论文，1984.
9. 龚晓南，软土地基圆形贮罐上部结构与地基共同作用，浙江大学学报，第 20 卷第 1 期，p.103, 1986.
10. Gioda, G. and Cividini, A, A numerical study of non-linear consolidation problems taking into account creep effects, 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, p.149, 1979.

11. Levadoux, J. N. & Baligh, M. M., Consolidation after undrained pizocone penetration, J. Geot. Engg.,ASCE proc., Vol. 112, No. 7, 1986.
12. Reed, M. B., Technique for the analysis of seepage in porous elastic media using parabolic isoparametric elements, 上海国际有限元会议论文集, p.534, 1982.
13. Sandhu, R. S. and Wilson, E. L., Finite element analysis of seepage in elastic media, J. Engg. Mech. Div., ASCE Proc. No. EM3, p. 641, 1969.
14. Sandhu, R. S. et al., Numerical performance of some finite element schems for analysis of seepage in porous elastic media, Int. J. Num. Ana. Meth. Geomech., Vol. 1, p. 177, 1977
15. Schiffman, R. L., Finite and infinitesimal strain consolidation, J. Geot. Engg. Div., ASCE Proc.No. GT2, p.203, 1981.
16. 沈珠江，用有限单元法计算软土地基的固结变形，水利水运科技情报，第1期，p. 7, 1977.
17. 沈珠江，油罐地基固结变形的非线性分析，水利水运科技情报，第1期，p. 24, 1977.
18. 沈珠江，软土地基弹塑性固结变形计算程序—CONDEP，南京水利科学研究院研究报告汇编，土工研究第一分册(1966-1978).
19. 沈珠江，易进栋，海滩软土路基的固结变形分析，岩土工程学报，第9卷第6期，1987.
20. Shinsha, H. et al., Consolidation settlement & lateral displacement of soft ground improved by sand drain. Soils & Foundations, May, 7. (in Japanese), 1982.
21. Small, J. C. & Booker, J. R., Finite layer analysis of primary and secondary consolidation, 4th, Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol, 1, p. 365, 1982.
22. Vermeer, P. A. & Verruijt, A., An accuracy condition for consolidation by FE, Int. J. Num. Ana. Methods in Geomechanics, Vol. 5, No. 1, 1981.
23. 谢康和，砂井地基，固结理论，数值分析与优化设计，浙江大学博士论文，1987，
24. 谢康和，曾国熙，等应变条件下的砂井地基固结解析理论，岩土工程学报，1988，
25. 殷宗泽，徐鸿江，朱泽民，饱和粘土平面固结问题有限单元法，华东水利学院学报，第1期，p.71, 1978.
26. 曾国熙，龚晓南，软土地基上一种油罐基础及地基固结分析，第四届全国土力学和基础工程学会讨论会论文选集，中国建筑工业出版社，1983.
27. Zeng, G. X., Xie, K. H. & Shi, Z. Y., Consolidation analysis of sand-drained ground by F. E. M., Proc ARCSMFE, Vol. 1, 1987
28. 赵维炳，广义 Voigt 模型模拟的饱和水土体固结理论及其应用，河海大学博士论文，1987.
29. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Methods, Third edition, 1977,
30. Zienkiewicz, O. C., The coupled problems of soilpore fluid-external fluid interaction, 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 4,p 1731, 1985.

第七章　动力分析

7.1　概述

当作用的荷载变化比较快时，基本方程式(1.9)中的加速度项不能忽略。属于这类荷载的有周期性或不规则的振动荷载及冲击荷载，如：①机器基础、②运动的车辆、③地震、④风浪、⑤爆炸、⑥锤击等。本章介绍适用于后面几种荷载的动力分析方法，且主要针对地震荷载。机器基础的振动力较小，地基的变形大体上处于弹性范围之内，一般可以用解析或半解析的方法求解。

就均质土层来说，周期荷载的快慢程度可以用下列两个无因次数判断[27]。

$$\Pi_1=\frac{2}{\pi}\frac{\rho k}{\rho_f g}\frac{T}{T_0^2}\qquad \Pi_2=\pi^2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2$$

其中T为作用荷载的周期，T_0为土层的自振周期。前者用于判断土骨架与孔隙水相对运动的快慢，$\Pi_1<10^{-2}$为快速加荷，孔隙水来不及排出，可以按不排水情况计算；$\Pi_1>10^2$为缓慢加荷，可以按完全排水情况考虑。后者用于判断土的整体运动的快慢，$\Pi_2<10^{-3}$可以判为慢速荷载，即无须进行动力分析。例如风浪作用下的海底土层的运动情况就属于这种情况，因海浪的周期一般超过10 s，而10 m厚的土层的自振周期约为10^{-2} s，故$\Pi_2\approx10^{-5}$。

7.2　动力方程及其解法

一个由弹簧和阻尼器支持的质点运动方程式为下列二阶常微分方程式

$$m\ddot{u}+\eta\dot{u}+ku=f \tag{7.1}$$

其中u、$\dot{u}$和$\ddot{u}$分别是质点的位移、速度和加速度，k是弹簧常数，η为粘滞系数，m是质量，f是外力。如果不考虑孔隙水与土骨架之间的相对运动，即把土体整个当作连续介质，则在前面的基本方程式(1.10)中加进阻尼项以后可得类似的方程组

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\} \tag{7.2}$$

其中质量矩阵和劲度矩阵为

$$[M]=\int_\Omega[N]^T\rho[N]\mathrm{d}\Omega \tag{7.3}$$

$$[K]=\int_\Omega[B]^T[D][B]\mathrm{d}\Omega \tag{7.4}$$

按式(7.3)计算的质量矩阵称一致质量矩阵，矩阵元素呈带状对称分布。实际计算中经常采用比较简单的集中质量法，即将一个单元的质量平均分配在单元的角点上，此时$[M]$将是对角矩阵，因此计算工作量就大为减少。不同的质量矩阵对计算结果影响不是很大。Lysmer认为，用集中质量矩阵算出的高阶特征值低于实际值，用一致质量矩阵则高于实际值，因此他建议采用两者混合的质量矩阵[5]。

劲度矩阵的算法见前面第二章。

阻尼矩阵$[C]$与材料的粘滞系数有关，可以根据应力与应变速率的关系推导。现在较

常用的 Rayleigh 理论则假设阻尼由两部分组成，一部分与单元的应变速率成正比，另一部分则与结点的变位速率成正比。设$\{\sigma_v\}$为与应变速率成正比的阻尼应力，$\{F_1\}$为相应的结点力，$\{F_2\}$为第二部分的阻尼结点力，则

$$\{\sigma_v\}=\beta[D]\{\dot{\varepsilon}\}=\beta[D][B]\{\dot{u}\} \tag{7.5}$$

故

$$\{F_1\}=\int_{\Omega}[B]^T\{\sigma_v\}d\Omega=\beta[K]\{\dot{u}\} \tag{7.6a}$$

而

$$\{F_2\}=\alpha[M]\{\dot{u}\} \tag{7.6b}$$

α和β为比例系数。从而阻尼矩阵可以写为

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K] \tag{7.7}$$

对于象土这样的不均匀材料，只能按下式算出单元阻尼矩阵后再叠加

$$[C^e]=\alpha[M^e]+\beta[K^e] \tag{7.8}$$

此时，用式(7.1)的单质点系统比拟

$$\sigma_v=\eta\dot{\varepsilon}=\frac{\lambda E}{\omega}\dot{\varepsilon} \tag{7.9}$$

λ为阻尼比，ω为振动圆频率。把式(7.5)与式(7.9)相比，因为E相当于$[D]$，从而有

$$\beta=\frac{\lambda}{\omega} \tag{7.10}$$

对多自由度体系，ω可取许多值，故当λ不变时，随着ω的增大，β应当减少。实际上土不是理想的粘弹性体，而是更接近于塑性滞回体，阻尼并不随着ω的增高而显著降低。为了补偿这一点，Idriss 等人建议α按下式计算(见第三章)

$$\alpha=\lambda\omega \tag{7.11}$$

即让第二部分阻尼力随ω而增大。按上述算法α和β是变量，实际计算时(7.10)和(7.11)中的ω用主振频率ω_1代入，使α和β变为常量，分析表明，这样处理办法对波的高频成份将产生较高的阻尼。

动力方程(7.2)的求解可以用直接积分法在时间域内进行，也可以经过 Fourier 变换或 Laplace 变换后在频率域内进行，如复反应分析法。对于线性结构，则常用振型叠加法。下面先简单介绍此法的基本概念[1]，其它方法以后说明。

先考虑自由振动，并略去阻尼项，把式(7.2)化为下列特征值问题

$$([K]-\omega_s^2[M])\{A\}=\{0\} \tag{7.12}$$

由此可以求出一组自振频率ω_s和相应的振型向量$\{A\}_s$，$s=1,2,\cdots,n$，n自由度数。每个振型向量包含n个分量，n个振型向量可以组成$n\times n$阶矩阵$[A]$。设结点位移向量展开成由下列以振型向量为基函数的级数之和

$$\{u\}=[A]\{y\}$$

或

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}y_j \tag{7.13}$$

$\{y\}$是待定的振型系数或广义座标，i代表结点号，j代表振型号。把式(7.13)代入(7.2)，并乘以$[A]^T$，可得

$$[A]^T[M][A]\{\ddot{y}\}+[A]^T[C][A]\{\dot{y}\}+\omega^2[A]^T[M]\{y\}=[A]^T\{F\} \tag{7.14}$$

如果忽略阻尼矩阵$[C]$，或假定它可以写成式(7.7)形式，则由于振型函数$[A]$的正交性，$[A]^T[M][A]$中非对角元素都为0，故上式相当于n个不耦联的独立的常微分方程式

$$\ddot{y}_s + \omega_s^2 y_s = g_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.15}$$

其中

$$g_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{is} F_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{is} M_{ij} A_{js}}$$

由此解出$\{y\}$，代入(7.13)后即得$\{u\}$。

当阻尼矩阵由式(7.8)叠加而成时，正交性不再成立。因此在土体动力分析中一般不用振型叠加法。

7.3 动力问题的种类和边界条件

根据动力荷载性质，土动力学问题大致可分两类。

1．动力荷载作用于局部土面，地基的边界无限(图7.1)，如机器基础、地面或地下爆炸等。这类所谓的源问题中，近域的表面荷载$\{F\}$已知，动力反应$\{u\}$应向远域逐步衰减。

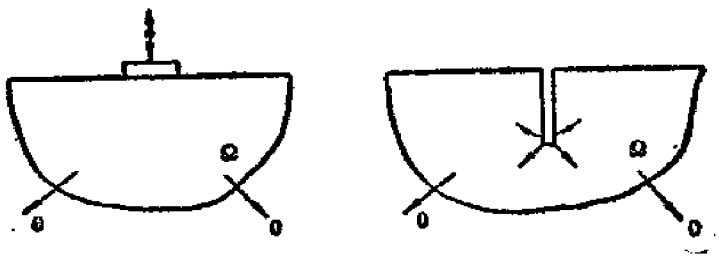


图 7.1 局部的振动和冲击荷载

2．远域传来的边界位移$\{u_0\}$或边界加速度$\{\ddot{u}_0\}$已知，而近域的表面都无荷载，地震荷载即属于这种情况(图7.2)。目前的抗震计算中大多采用地震波的均匀输入法，即假定地基中截断的边界面Γ上各点的地震加速度在同一时刻都是相同的，好象建筑物是放在刚性很大的振动台上振动一样。这时，令$\{\ddot{u}\}$为计算域各点对边界Γ的相对加速度，则$\{\ddot{u}\}+\{\ddot{u}_0\}$，$\{\dot{u}\}+\{\dot{u}_0\}$和$\{u\}+\{u_0\}$为绝对加速度、速度和位移，把它们代入式(7.2)，考虑到$\{F\}=0$和刚性位移条件下$[C]\{\dot{u}_0\}=0$，$[K]\{u_0\}=0$，该式将变为

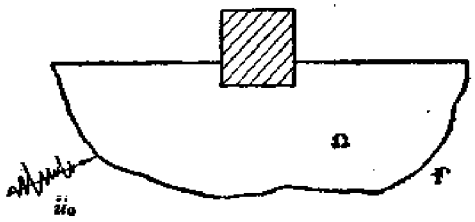


图 7.2 地震荷载

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{\ddot{u}_0\} \tag{7.16}$$

上式意味着，根据运动相对性原理，地震问题可以化作边界静止不动而在计算域各点上作用着惯性力的问题进行计算。

用有限元法进行动力分析时，必须把实际上近于无限的计算域用某一人为边界截断。与静力计算不一样，应力波传到界面时将发生反射，常常会给计算结果带来不能允许的误差。动力计算中边界的设置方法是尚未很好解决的一个重要的研究课题，下面简单介绍现有的几种方法[2,3]。

1．简单的截断边界

与静力计算一样，在建筑物一定距离处截断，设置刚性支承，辊轴或自由变形结点。对土质较差的地基，反射波能在土体中很快消散，如果边界设在建筑物直径的5～10倍以外

处，这样的简单方法仍可应用。另外，还可采用在邻接边界的几个单元中人为增大阻尼系数的办法。

2．粘滞边界

其要点是在边界结点的切向和法向设置阻尼器，其粘滞系数分别为 $a\rho c_s$ 和 $b\rho c_p$，c_s 和 c_p 分别为剪切和压缩波速。计算表明，当 a 和 b 取为常数(例如等于1)时，此法的误差仍较大，只有当 a 和 b 随波的频率而变时计算才较好，因此此法只适用于频率域中求解。

3．一致边界或透射边界

如果在动力波传播的无限域中切出一块计算域来，则在截面上应存在计算域和被切除区域之间的作用力。本法的基本思想是把这一作用力事先计算出来，加在计算域的边界上，从而使计算的结果将与原来未切开的无限域的解答一致。下面以半无限直杆中一维波的例子来说明(图7.3)。

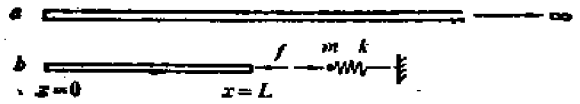


图 7.3 半无限杆的截断

设 $x=0$ 处有一振幅为 u_a，圆频为 ω 的简谐运动 $u_0=u_a e^{i\omega t}$，则任意的位移为 $u=u_a e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c_p}\right)}$ 相应地可得加速度、应变和应力如下：

$$\ddot{u}=-\omega^2 u,\qquad \varepsilon_x=-\frac{i\omega}{c_p}u,\qquad \sigma_x=-E\frac{i\omega}{c_p}u$$

因此，如果在 $x=L$ 处切断，只要在切断处加一反作用力 $f=\sigma_x A=EA\frac{i\omega}{c_p}u$，$A$ 为杆的截面积，则图中 b 和 a 两个问题的解答在线段 L 内将完全一致。另一方面，如果右端切除的无限长杆改用一单自由度的弹簧和质点代替，如欲产生这样的 f 力，则弹性系数 k 和质量 m 必须满足下列无阻尼时式(7.1)的解答

$$(-\omega^2 m+k)u=EA\frac{i\omega}{c_p}u$$

从而

$$k-m\omega^2=EA\frac{i\omega}{c_p}$$

显然，事先求出截面边界上的作用力并非易事，如上例所述，这要等整个解答已求出后才可能。因此，实际上只能针对某一类特定问题求作用力的近似解。例如，Lysmer 和 Waas 针对刚性基岩上成层土水平传播的 Rayleigh 波推导了侧面边界上的作用力与边界位移的关系，即相当的弹性系数矩阵[4,5]。这一矩阵与频率有关，因而此法也只能用于频率域中求解。

4．有限元和无限元或边界元相结合

一般问题都是近域中变形较大，计算中心须考虑地基土的非均质及非线性，适用于有限元计算，而远域当作均匀弹性介质，不致引起大的误差，所以可用无限元或边界元。一般说来，局部荷载的源问题用边界元较好[7]，而地震反应问题，则最好用无限元[6]。

应当指出，上述方法都只适用于在频率域中求解，对需要在时间域求解的真正非线性问题，除了把边界取得远一些以外，目前还没有比较成熟的好办法[8]。

7.4 复应应分析法

本节介绍美国加州大学 Berkeley 分校 Lysmer 等人所编的 FLUSH 程序的基本思

想[90]。

假定阻尼只与应变速率有关，应力由弹性应力和阻尼应力组成，则在一个荷载循环下应力应变关系将呈椭圆，如第三章图 3.8，并可写为[1]

$$\gamma(t)=\gamma_0 e^{i\varphi(t)}$$

$$\tau(t)=\tau_0 e^{i[\varphi(t)+\delta]}$$

δ 为两者相位角差。消去时间项后

$$\tau=G\gamma_0 e^{i\delta} \tag{7.17}$$

定义

$$G^*=Ge^{i\delta}=G(\cos\delta+i\sin\delta) \tag{7.18}$$

为复模量，式(7.18)即可写为 $\tau=G^*\gamma$，故可按无阻尼的弹性体一样进行运算。此时相应的椭圆面积为 $A_1=G\tau_0\gamma_0\pi\sin\delta$，故按图 3.8 中阻尼比的定义可得

$$\lambda=\frac{\sin\delta}{2}$$

由于 δ 很小，一般小于 0.1，$\delta=2\lambda$，式(7.18)可近似地写为

$$G^*\approx G_e^{i2\lambda}\approx G(1-2\lambda^2+i2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}) \tag{7.19}$$

由于复模量法直接用阻尼比 λ，而不象前面式 (7.10) 那样用 β 组成阻尼矩阵，故不会象 Rayleigh 阻尼那样对高频成分产生过大的阻尼。

假定泊松比不变，$[K^*]$为由复模量组成的劲度矩阵，则相应的动力方程式(7.16)应改写为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K^*]\{u\}=-[M]\{\ddot{u}_0\} \tag{7.20}$$

其次，假定输入的地震加速度 $\ddot{u}_0$ 在时域中以等步长 Δt 的 N 个偶数点给出

$$\{a\}=\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N\}$$

并用下列 Fourier 级数拟合$\{a\}$

$$\ddot{u}_0(t)=R_e\sum_{s=1}^{N/2}\ddot{u}_s e^{i\omega_s t} \tag{7.21}$$

其中

$$\omega_s=\frac{2\pi s}{N\Delta t}\quad\left(s=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}\right) \tag{7.22}$$

R_e 表示取实数部分，$\ddot{u}_s$ 为复数幅值，可以通过快速 Fourier 变换求得。另一方面，动力方程(7.20)的解答也可以通过下列 Fourier 级数表示

$$\{u\}=R_e\sum_{s=0}^{N/2}\{U_s\}e^{i\omega_s t} \tag{7.23}$$

$\{U_s\}$为待定的广义坐标。把此式代入(7.20)，可得

$$R_e\sum_{s=0}^{N/2}\{U_s\}([K^*]-\omega_s^2[M])e^{i\omega_s t}=-[M]\{I\}R_e\sum_{s=0}^{N/2}\ddot{u}_s e^{i\omega_s t} \tag{7.24}$$

由于假设阻尼与 ω_s 无关，$[K^*]$ 也将与 ω_s 无关。这样，上式两边分别乘以 $e^{i\omega_r t}$，($r=0,\ 1,\ \cdots,\ N/2$)，并对 t 积分，则考虑到 Fourier 级数的正交性，上式两边就只剩下 $s=r$ 的一项，故可写为

$$([K^*]-\omega_s^2[M])\{U_s\}=-[M]\ddot{u}_s \tag{7.24a}$$

或简写为

$$[\overline{K}]_s\{U_s\}=-[M]\ddot{u}_s\quad(s=0,\ 1,\ \cdots,\ N/2) \tag{7.24b}$$

在线性假设下，此式可分两步求解，即

$$[\overline{K}]_s\{A_s\} = -[M] \tag{7.24a}$$

$$\{u_s\} = \{A_s\}\bar{u}_s \tag{7.24b}$$

$\{A_s\}$为地基以 ω_s 频率作单位振幅振动时各自由度的反应幅值向量，而其相对加速度反应按式(7.23)为 $-\omega_s^2\{A_s\}$，故$\{|1-\omega_s^2 A_s|\}$即为放大倍数。

此法要求解 $N/2$ 次的代数方程组(7.24)，所以计算量相当大，因为地震数据N往往超过1000个。为了减少工作量，Lysmer 建议求解到 $\omega_s = 50$ (对土坝)或150(对核电站) 时截止，并且由于$[\overline{K}_s]$是频率 ω_s 的光滑函数，(7.24c)的解$\{A_s\}$也将是 ω_s 的光滑函数，故为了省时可以只对若干个 ω_s(例如 $s=0, 4, 8, \cdots$) 求解$\{A_s\}$，对中间的 ω_s 通过内插求 $\{A_s\}$。

本法在频率域求解，原则上只适用于线性问题。为了考虑式(7.19)中G和λ随应变幅值 γ_d 而变的因素，组合复劲度矩阵$[K^*]$时对各单元采用不同的G和λ，即先进行试算求出各单元在整个地震历时中的峰值$(\gamma_d)_{max}$，然后取有效剪应变幅值

$$(\gamma_d)_{eff} = 0.65(\gamma_d)_{max} \tag{7.25}$$

作为 γ_d 代入第三章式(3.115)和(3.116)中计算该单元应取的G和λ，式中的系数0.65完全是一个经验值。但是要根据频率域的解求时域中的$(\gamma_d)_{max}$是比较麻烦的。FLUSH程序先求各频率的$(\gamma_d)_s$的均方根值

$$\mathrm{RMS}^2(\gamma_d) = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N/2}(\gamma_d)_s^2$$

然后假定各单元时域上的最大值$(\gamma_d)_{max}$与$\mathrm{RMS}(\gamma_d)$之比等于输入加速度的时域上最大值$(\ddot{u}_0)_{max}$与$\mathrm{RMS}(\ddot{u}_0)$之比，由此可得

$$(\gamma_d)_{eff} = 0.65\frac{\mathrm{RMS}(\gamma_d)}{\mathrm{RMS}(\ddot{u}_0)}(\ddot{u}_0)_{max} \tag{7.26}$$

FLUSH 程序可以近似地用于三维分析，因此特别适用于核电站的地震反应分析（图7.4)。它允许在地基中切出一块厚度与建筑物相当的土片，切面的法向与振动方向垂直，面

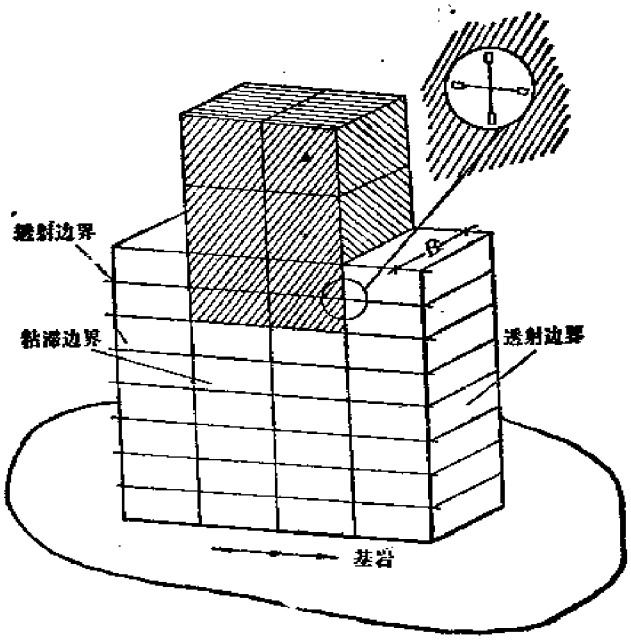


图 7.4 具有透射边界的拟三维模型

上设置粘滞边界。而在振动方向上离建筑物不远处截断，并设置透射边界，设置这两种边界以后，式(7.20)变为

$$[M][\ddot{u}]+[K^*]\{u\}=-[M]\{\ddot{u}_0\}-\{V\}+\{F\}-\{T\} \tag{7.27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\{V\}&=\frac{1}{B}[c_v](\{\dot{u}\}-\{\dot{u}\}_f)\\ \{F\}&=[S]\{u\}_f\\ \{T\}&=([R]+[L])(\{u\}-\{u\}_f)\end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

$\{V\}$代表粘滞边界效应，B是土片厚度，$[c_v]$是一个取决于自由场性质的对角线矩阵，$\{F\}$和$\{T\}$代表透射边界效应，$[S]$是与频率无关的由复模量形成的自由场劲度矩阵，$[R]$和$[L]$是Lysmer等引入的与频率有关的边界劲度矩阵[4]。

上式中$\{u\}_f$代表自由场反应，即地基在修造建筑物以前遭受地震时的反应。因此在正式计算前必须先进行自由场反应计算，而且一般地震数据都在地面测得，抗震计算中的输入加速度$\{\ddot{u}_0\}$应是地基深处的基岩运动。因此还需要进行从地表到基岩的反演计算。FLUSH程序中具备自由场的正演和反演功能。

把式(7.28)代入式(7.27)并象前面一样进行Fourier变换，可得下列与式(7.24)类似的方程组

$$[\overline{K}_n]\{U\}_n=[P]_n\{\ddot{u}\}_n \tag{7.29}$$

其中

$$[\overline{K}]_n=[K^*]+[R]_n+[L]_n+\frac{i\omega_n}{B}[C_v]-\omega_n^2[M] \tag{7.30}$$

$$[P]_n=([S]+[R]_n+[L]_n+\frac{i\omega_n}{B}[C_v])\{A_f\}_n-[M] \tag{7.31}$$

$\{A_f\}_n$系受频率为ω_n的单位($\ddot{u}_0=1$)谐波激振时的自由场运动，由下式解出

$$[K_f^*]\{A_f\}_n=-[M_f]\{I\} \tag{7.32}$$

$[K_f^*]$和$[M_f]$分别为自由场的复劲度矩阵和质量矩阵。

下面附上一段计算单元的复模量劲度矩阵，集中质量矩阵和一致质量矩阵的程序，系根据FLUSH程序改写。

P.7.1 复模量单元劲度及质量矩阵计算程序

【功能】 计算单元的复数劲度矩阵及质量矩阵

【标识符】

N——单元编号

VS——2×2积分点局部坐标

S、SM——单元的劲度矩阵及一致质量矩阵

NDI、NDJ、NDK、NDL——单元4结点编号

【说明】 CMPLX——复数化

```
      SUBROUTINE ELSM(N)
       COMMON VS(2),S(8,8),SM(8,8),
     * NPI(300),NPJ(300),NPL(300),
     * NPM(300),DENS(300),XL(300),
     * PO(300),G(300),CM(300),
     * XORD(350),YORD(350)
       DIMENSION C(3,3),AP(2,4),
     * AN(4),AB(3,8),XX(5),YY(5)
       I=NPI(N)
       J=NPJ(N)
       K=NPL(N)
       L=NPM(N)
       XX(1)=XORD(I)
       XX(2)=XORD(J)
       XX(3)=XORD(K)
       XX(4)=XORD(L)
       YY(1)=YORD(I)
       YY(2)=YORD(J)
       YY(3)=YORD(K)
       YY(4)=YORD(L)
       RO=DENS(N)
       R1=XL(N)
       R2=PO(N)
       AR=((YY(2)-YY(4))*(XX(1)+
     * XX(2)-XX(3)-XX(4))-
     * (XX(2)-XX(4))*(YY(1)+
     * YY(2)-YY(3)-YY(4)))/2.0
       CM(N)=AR*RO/4.0
       GIMAG=2.0*R1*SQRT(1.0-R1*R1)
       GREAL=1.0-2.0*R1*R1
       E1=CMPLX(GREAL,GIMAG)
       G1=E*G(N)
       E=G1*(1.0+R2)*2.0
       F=G1*2.0/(1.0-2.0*R2)
       A=SQRT(3.0)/3.0
       VS(1)=A
       VS(2)=-A
       DO 30 IG=1,8
       DO 30 JG=1,8
       S(IG,JG)=0.0
30     SM(IG,JG)=0.0
       C(1,1)=F*(1.0-R2)
       C(1,2)=F*R2
       C(1,3)=0.0
       C(2,1)=C(1,2)
       C(2,2)=C(1,1)
       C(2,3)=0.0
       C(3,1)=0.0
       C(3,2)=0.0
       C(3,3)=G1
       DO 100 IG=1,2
       AP(2,1)=-1.0+VS(IG)
       AP(2,2)=-1.0-VS(IG)
       AP(2,3)=1.0+VS(IG)
       AP(2,4)=1.0-VS(IG)
       DO 100 JG=1,2
       AP(1,1)=-1.0+VS(JG)
       AP(1,2)=1.0-VS(JG)
       AP(1,3)=1.0+VS(JG)
       AP(1,4)=-1.0-VS(JG)
       AJ1=AP(2,1)*YY(1)+AP(2,2)*
     * YY(2)+AP(2,3)*YY(3)+AP(2,4)
     * *YY(4)
       AJ2=-AP(1,1)*YY(1)-AP(1,2)*
     * YY(2)-AP(1,3)*YY(3)-AP(1,4)
     * *YY(4)
       AJ3=-AP(2,1)*XX(1)-AP(2,2)*
     * XX(2)-AP(2,3)*XX(3)-AP(2,4)
     * *XX(4)
       AJ4=AP(1,1)*XX(1)+AP(1,2)*
     * XX(2)+AP(1,3)*XX(3)+AP(1,4)
     * *XX(4)
       AN(1)=(1.0-VS(IG))*(1.0-VS
     * (JG))/4.0
       AN(2)=(1.0+VS(IG))*(1.0-VS
     * (JG))/4.0
       AN(3)=(1.0+VS(IG))*(1.0+VS
     * (JG))/4.0
       AN(4)=(1.0-VS(IG))*(1.0+VS
     * (JG))/4.0
       COMM=16.0*(AJ1*AJ4-AJ2*AJ3)
       DO 50 IP=1,4
       K2=2*IP
       K1=K2-1
       DO 40 JP=1,4
       L2=2*JP
       L1=L2-1
       AA=RO*AN(IP)*AN(JP)
       SM(K1,L1)=SM(K1,L1)+AA
       SM(K1,L2)=SM(K1,L2)+AA
       SM(K2,L1)=SM(K2,L1)+AA
40     SM(K2,L2)=SM(K2,L2)+AA
       AB(1,K1)=AJ1*AP(1,IP)+AJ2*
     * AP(2,IP)
       AB(3,K2)=AB(1,K1)
       AB(1,K2)=0.0
       AB(2,K2)=AJ3*AP(1,IP)+AJ4*
     * AP(2,IP)
       AB(3,K1)=AB(2,K2)
       AB(2,K1)=0.0
50     CONTINUE
       DO 60 IP=1,8
       DO 60 IQ=1,3
       ST1(IQ,IP)=0.0
       DO 60 IS=1,3
60     ST1(IQ,IP)=ST1(IQ,IP)+
     * C(IQ,IS)*AB(IS,IP)
       DO 80 IP=1,8
       DO 80 IQ=1,IP
       AS=0.0
       DO 70 IS=1,3
70     AS=AS+AB(IS,IP)*ST1(IS,IQ)
80     S(IP,IQ)=S(IP,IQ)+AS/COMM
100    CONTINUE
       DO 120 IP=1,7
       KP1=IP+1
       DO 120 IQ=KP1,8
120    S(IP,IQ)=S(IQ,IP)
       RETURN
       END
```

7.5 直接积分法

本节介绍美国加州大学 Berkeley 分校 Idriss 等所编的 QUAD-4 程序的基本思想[10]，谢君斐等在此基础上编成平面动力分析程序[11]。

设 Δt 为时段长，$\{u\}_n$、$\{\dot{u}\}_n$、$\{\ddot{u}\}_n$ 和 $\{u\}_{n+1}$、$\{\dot{u}\}_{n+1}$、$\{\ddot{u}\}_{n+1}$ 分别为该时段开始和结束时的位移、速度、加速度向量

$$\{\dot{u}\}_{n+1}=\{\dot{u}\}_n+\int_0^{\Delta t}\{\ddot{u}\}\mathrm{d}t,\qquad \{u\}_{n+1}=\{u\}_n+\int_0^{\Delta t}\{\dot{u}\}\mathrm{d}t \tag{7.33}$$

积分号内的$\{\ddot{u}\}$和$\{\dot{u}\}$是未知函数，如果 Δt 很小，则可取某一近似值代入[12]。

1. Gauss 法

Gauss 法假定 $\{\ddot{u}\}=\frac{1}{2}(\{\ddot{u}_n\}+\{\ddot{u}\}_{n+1})$，代入上式后可得

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{u}\}_{n+1}&=\{\dot{u}\}_n+\frac{1}{2}\Delta t(\{\ddot{u}_n\}+\{\ddot{u}\}_{n+1})\\ \{u\}_{n+1}&=\{u\}_n+\Delta t\{\dot{u}\}_n+\frac{1}{4}\Delta t^2(\{\ddot{u}\}_n+\{\ddot{u}\}_{n+1})\end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

由此可解出

$$\left.\begin{aligned}\{\ddot{u}\}_{n+1}&=\frac{4}{\Delta t^2}\{u\}_n-\{A\}_n\\ \{\dot{u}\}_n&=\frac{2}{\Delta t}\{u\}_n-\{B\}_n\end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

其中

$$\{A\}_n=\frac{4}{\Delta t^2}\{u\}_n+\frac{4}{\Delta t}\{\dot{u}\}_n+\{\ddot{u}\}_n$$

$$\{B\}_n=\frac{2}{\Delta t}\{u\}_n+\{\dot{u}\}_n$$

把式(7.35)代入动力方程式(7.2)后可得

$$[\bar{K}]\{u_{n+1}\}=\{\bar{F}\} \tag{7.36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}[\bar{K}]&=[K]+\frac{2}{\Delta t}[C]+\frac{4}{\Delta t^2}[M]\\ \{\bar{F}\}&=\{F\}+[M]\{A\}_n+[C]\{B\}_n\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

解式(7.36)求得位移$\{u\}_{n+1}$后再代入(7.35)，即得$\{\dot{u}\}_{n+1}$和$\{\ddot{u}\}_{n+1}$。

2. Newmark 法

Newmark 用 α 和 β 代替式(7.34)中的 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$，把它改写为

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{u}\}_{n+1}&=\{\dot{u}\}_n+(1-\alpha)\Delta t\{\ddot{u}\}_n+\alpha\Delta t\{\ddot{u}\}_{n+1}\\ \{u\}_{n+1}&=\{u\}_n+\Delta t\{\dot{u}\}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\{\ddot{u}\}_n+\beta\Delta t^2\{\ddot{u}\}_{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

当 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{6}$ 时，式(7.33)中的$\{\ddot{u}\}$在 Δt 时段内为线性变化，故此法亦称线性加速度法。此时，上式变为

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{u}\}_{n+1}&=\{\dot{u}\}_n+\frac{1}{2}\Delta t\{\ddot{u}\}_n+\frac{1}{2}\Delta t\{\ddot{u}\}_{n+1}\\ \{u\}_{n+1}&=\{u\}_n+\Delta t\{\dot{u}\}_n+\frac{1}{3}\Delta t^2\{\ddot{u}\}_n+\frac{1}{6}\Delta t^2\{\ddot{u}\}_{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

由此可解出

$$\left.\begin{aligned}\{\ddot{u}\}_{n+1}&=\frac{6}{\Delta t^2}\{u\}_{n+1}-\{A\}_n\\ \{\dot{u}\}_{n+1}&=\frac{3}{\Delta t}\{u\}_{n+1}-\{B\}_n\end{aligned}\right\}\tag{7.40}$$

其中

$$\{A\}_n=\frac{6}{\Delta t^2}\{u\}_n+\frac{6}{\Delta t}\{\dot{u}\}_n+2\{\ddot{u}\}_n$$

$$\{B\}_n=\frac{1}{\Delta t}\{u\}_n+2\{\dot{u}\}_n+\frac{1}{2}\Delta t\{\ddot{u}\}_n$$

象前面一样把式(7.40)代入动力方程式后可得

$$[\bar{K}]\{u_{n+1}\}=\{\bar{F}\}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}[\bar{K}]&=[K]+\frac{3}{\Delta t}[C]+\frac{6}{\Delta t^2}[M]\\ [\bar{F}]&=[F]+[M]\{A\}_n+[C]\{B\}_n\end{aligned}\right\}\tag{7.41}$$

3. Wilson θ 法

Newmark 法中取 $\beta=\frac{1}{4}$ 时即为 Gauss 法，这种积分格式是无条件稳定的，但当 $\beta=\frac{1}{6}$ 时就变成有条件稳定了。为了达到无条件稳定，Wilson 建议用放大的时段 $h=\theta\Delta t$ 代替实际时段进行计算。算出的结果将为 $\{u\}_h$、$\{\dot{u}\}_h$ 和 $\{\ddot{u}\}_h$，然后从 $\{\ddot{u}\}_h$ 和 $\{\ddot{u}\}_n$ 内插得到 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$，即

$$\{\ddot{u}\}_{n+1}=\{\ddot{u}\}_n+\frac{1}{\theta}(\{\ddot{u}\}_h-\{\ddot{u}\}_n)\tag{7.42}$$

把它代入式(7.39)中，即可得出 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$ 和 $\{u\}_{n+1}$。当 $\theta>1.37$ 时上述积分格式是无条件稳定的。实际计算时常取 $\theta=1.4$。

QUAD－4 程序采用上述 Wilson θ 法和非线性问题的等效线性法求解动力方程，其要点如下：

1. 先根据静力有限元或其他近似方法算出土体中各单元的振前平均有效应力 $\sigma_m'=\frac{1}{2}(\sigma_1'+\sigma_3')$，并按式(3.117)算出动剪切模量的初值 $G_0=G_{max}$，阻尼比的初值 $\lambda_0=0$ 或取某一小值，如 0.05。另外再估计一个主频 ω_1。

2. 根据各单元的质量和 G、λ 计算各单元的质量矩阵和劲度矩阵，并按式(7.7) 计算阻尼矩阵，最后叠加成总体矩阵。

3. 根据总质量矩阵和劲度矩阵，解特征方程(7.12)求主频 ω_1。

4. 由[K]、[C]和[M]按式(7.41)组成[$\bar{K}$]，并进行分解，即求[$\bar{K}$]的逆矩阵[$\bar{K}$]$^{-1}$。

5. 根据输入的基岩加速度$\{\ddot{u}_0\}$计算动力方程(7.16)的右端项 $\{F\}=-[M]\{\ddot{u}_0\}$，由此算出$\{\bar{F}\}$。

6. 用 Wilson θ 法进行逐步积分，得出各时刻的结点位移 $\{u\}_{n+1}=[\bar{K}]^{-1}\{\bar{F}\}$，并代回到式(7.40)，求出 $\{\dot{u}\}_{n+1}$ 和$\{\ddot{u}\}_{n+1}$。

7. 根据结点位移计算各单元的动剪应力 τ_d 及动剪应变 γ_d。

8. 从 γ_d 过程线中检出$(\gamma_d)_{max}$，按式 (7.25) 计算等效的 $(\gamma_d)_{eff}$，然后根据输入的 $G/G_{max}\sim\gamma_d$ 和 $\lambda\sim\gamma_d$ 的关系曲线(图 7.5)得出新的G 和 λ。

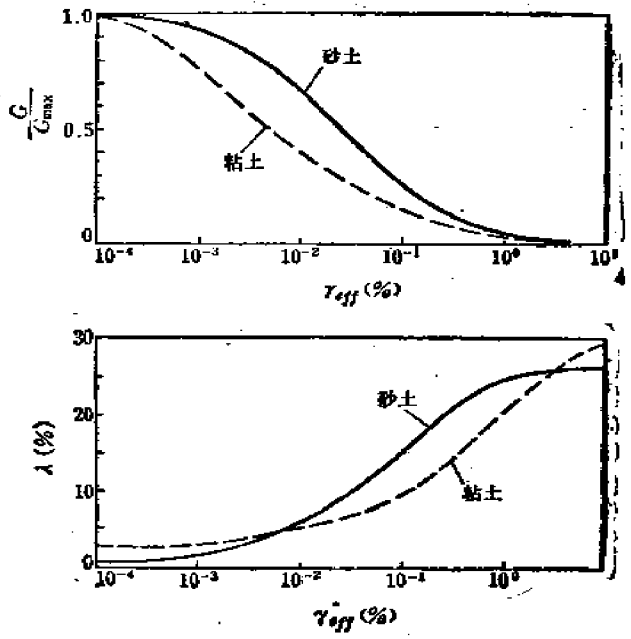


图 7.5 剪切模量与阻尼比

9. 回到第 2 步重复计算，直到两次所得的$(\gamma_d)_{eff}$相差很小为止。

计算过程到此结束，下一步是根据算出的动剪应力过程线找出峰值$(\tau_d)_{max}$，并按等效值$(\tau_d)_{eff}=0.65(\tau_d)_{max}$和等效振动次数判断某一单元是否液化。根据经验，等效振动次数与地震震级有关，如表 7.1。对于每一振次可以作出一组试验曲线，从试验曲线可以查出液化时的$(\tau_d)_l$(图 7.6)。如果计算的$(\tau_d)_{eff}>(\tau_d)_l$，该单元发生液化。上述判断液化的方法为总应力分析法。图 7.7 是用 $QUAD_4$ 程序和总应力分析法判断土坝液化的一个著名例子[13]。

下面附上一段 Wilson θ 法的程序，系根据南京水科院的 EFESD 程序改写[14]。

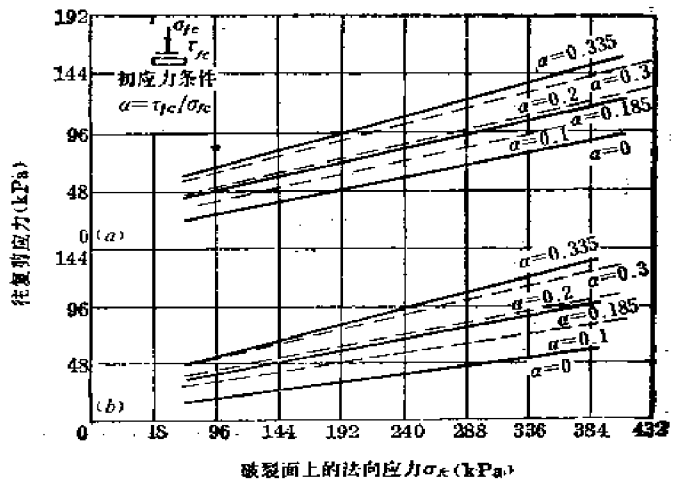


图 7.6 San Fernando 下坝冲填土引起 5% 应变所需的往复应力

表 7.1 等效振次与震级的关系

震　　级	5.5~6	6.5	7	7.5	8
等效振次	5	8	12	20	30
强震历时（s）	8	14	20	40	60

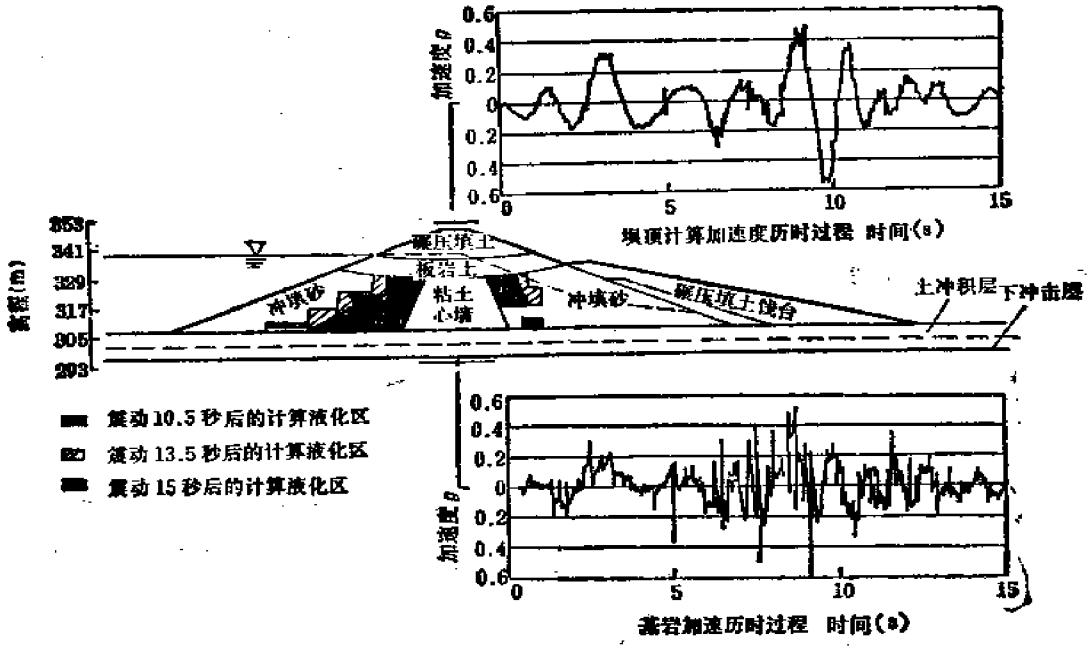


图 7.7 San Fernando 下坝对基岩的反应计算
（用坝趾地震仪记录）

P.7.2 Wilson θ 法数值积分程序

【功能】 由 t_n 时刻的 $\{\ddot{u}\}_n$、$\{\dot{u}\}_n$ 和 $\{u\}_n$，调用回代子程序 LR_2，计算 t_{n+1} 时刻的 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$、$\{\dot{u}\}_{n+1}$ 和 $\{u\}_{n+1}$，并调用子程序 STRESS 算出动应力，即包括前面的(5)、(6)和(7)三个步骤的计算

【标识符】

NUT——积分时步总数

NUP、NUE——结点和单元总数

ND、NBD——自由度总数和$[K]$矩阵最大半带宽

DT、DT0——时段长 ΔT 和 $\theta\Delta T$

DT_1、DT_2——1/DT0 和 $6/DT0^2$

E_1、E_2、E_3——动应变 ε_x、ε_z 和 γ_{xz}

AX、AZ——基岩水平及垂直加速度

IRD——结点自由度编号(1－x 向,2－z 向)，基岩上结点自由度为 0

SM、SC、SK——矩阵$[M]$、$[C]$和$[K]$，见式(7.41)

F——荷载向量$\{F\}$。回代后为方程式的解

MD———一维存贮的$[\bar{K}]$矩阵主对角元素序号

U、U1、U2——向量$\{u\}$、$\{\dot{u}\}$和$\{\ddot{u}\}$

AT、BT——向量$\{A\}$和$\{B\}$，见式(7.40)

IEM、EG——单元材料号及动剪切模量

PO——材料的动 Poisson 比

EMAX——式(7.25)中的$(\gamma_e)_{max}$

LR_2——一回代子程序

STRESS——计算动应力、应变子程序

【说明】 (1) 程序用4结点等参单元

(2) θ取1.4，$0.2875=1-\frac{1}{1.4}$

(3) 190－210计算[SC]中第I行与$\{B\}_e$的乘积

(4) EG和PO在子程序STRESS中用到

```
      SUBROUTINE INTEG
      COMMON NUT,NUP,NUE,ND,NBD,DT
     * DT0,DT1,DT2,E1,E2,E3
     * /C1/AX(1000),AZ(1000),IRD(
     * 300,2),SM(300),SC(10000),
     * SK(10000),F(500),MD(500),
     * U(500),U1(500),U2(500),IEM
     * (250),IPE(250,4),EG(250),
     * PO(10),EMAX(250)
      DIMENSION AT(500),BT(500),
     * UE(4),VE(4)
      A1=0.0
      A2=0.0
      DO 330 NJ=1,NUT
      A01=A1
      A02=A2
      A1=AX(NJ)
      A2=AZ(NJ)
      C=1.4*(A1-A01)+A01
      D=1.4*(A2-A02)+A02
      DO 180 IP=1,NUP
      IR=IRD(IP,1)
      JR=IRD(IP,2)
      IF(IR.GT.0.0) F(IR)=-SM(IR)*C
      IF(JR.GT.0.0) F(JR)=-SM(JR)*D
  180 CONTINUE
      DO 190 I=1,ND
      AT(I)=U(I)*DT2+2.0*U1(I)*DT1+
     * 2.0*U2(I)
  190 BT(I)=U(I)*DT1+2.0*U1(I)+
     * U2(I)*DT0/2.0
      IQ=0
      DO 220 I=1,ND
      E=0.0
      IP=MD(I)
      JP=I+NBD
      IF(JP.GT.ND) JP=ND
      JQ=I-IP+IQ+1
      DO 200 J=JQ,I
      IR=IP-I+J
  200 E=E+BT(J)*SC(IR)
      IQ=IP
      JO=I+1
      DO 210 J=JQ,JP
      JR=MD(J)
      IS=JR-J+I
      IF(IS.GT.IP) E=E+BT(J)*SC(IS)
  210 IP=JR
  220 F(I)=F(I)+AT(I)*SM(I)+E
      CALL LR2(ND,NBD,MD,SK,F)
      DO 230 I=1,ND
      UO=U(I)
      U10=U1(I)
      U20=U2(I)
      U2C=Z(I)*DT2-AT(I)
      U2D=U20*0.2875+U2C/1.4
      U2(I)=U2D
      U1(I)=UO+(U20+U2D)*DT/2.0
  230 U(I)=UO+U10*DT+(U2D+2.*U20)*
     * DT*DT/6.
      DO 320 K=1,NUE
      L=IEM(K)
      D3=EG(K)
      D2=PO(L)
      DO 280 I=1,4
      IP=IPE(K,I)
      IR=IRD(IP,1)
      JR=IRD(IP,2)
      UE(I)=0.0
      IF(IR.GT.0) UE(I)=U(IR)
      VE(I)=0.0
      IF(JR.GT.0) VE(I)=U(JR)
  280 CONTINUE
      CALL STRESS(K)
      E4=SQRT(E3*E3+(E1-E2)*(E1-E2))
      IF(E4.GT.EMAX(K)) EMAX(K)=E4
  320 CONTINUE
  330 CONTINUE
      RETURN
      END
```

7.6 有效应力法

在总应力分析中，式(3.115)中的模量G只取决于震前的静力有效应力，不考虑地震过程中积累起来的孔隙水压力。有效应力法与前面不同的地方就是考虑振动孔隙水压力的增长和变化过程。

有效应力法的发展有两条途径。第一条是在总应力法基础上加以改进，所用的计算模型仍为等价粘弹性体，但是增加了残余变形的计算公式(见第三章)。此法已在国内推广于若干工程的计算。第二条是弹塑性分析的路径，理论上更合理，但由于计算工作量大，尚未广泛应用。本节介绍第一种方法，弹塑性模型的有效应力分析将在后面7.7介绍。

Finn 等人首先提出在粘弹性模型基础上进行有效应力动力分析[15]，但只限于一维的地基水平振动，沈珠江把它推广用于二维问题的分析[16,17]。这一方法的基本思想是，把整个动力作用过程分成若干时段(例如对于地震过程分10～20时段，每段1秒左右)，每个时段的动力分析仍如前面总应力分析法那样按 Wilson θ 法进行，但算完后尚须按某一经验公式计算该时段内各单元的残余变形或孔隙压力的增加，并把它们转化成初应变或初应力后按 Biot 固结理论进行静力计算，得出结点位移、单元应变和有效应力的变化。如此一个时段一个时段地进行计算，得出整个过程中动力应力应变及有效应力(孔隙压力)和残余变形的发展过程。动力过程结束以后可以继续进行静力计算以得出振动孔隙压力的消散过程。

有效应力分析中的关键问题是每一时段末残余变形或残余孔隙压力的计算。目前的做法也有两种。一种是直接利用下列 Seed 等人提出的孔隙压力随振动次数增加的经验公式[18]

$$\frac{p_d}{\sigma_0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin[2(N/N_l)^{1/\alpha}-1] \tag{7.43}$$

其中 p_d 为振动产生的孔隙压力，N_l 为液化时的振动次数，σ_0 为初始固结压力，α 为经验常数，一般取0.7。如考虑不等向固结后的修正方案[19]，

$$\frac{p_d}{\sigma_0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin[(N/N_{50})^{1/\alpha}-1] \tag{7.43a}$$

$$\alpha=\alpha_1+K_c\times\alpha_2$$

$K_c=\sigma_{1c}/\sigma_{3c}$ 为固结应力比，N_{50} 为孔隙压力等于50%固结压力 σ_{3c} 的振动次数，α_1 和 α_2 为经验系数。徐志英把式(7.43)简化为[20]

$$\frac{p_d}{\sigma_0}=\frac{\alpha}{\pi}\arcsin\left(\frac{N}{N_l}\right)^{1/2\alpha} \tag{7.44}$$

而考虑不等向固结时

$$\frac{p_d}{\sigma_0}=\left(1-m\frac{\tau_0}{\sigma_0}\right)\arcsin\left(\frac{N}{N_l}\right)^{1/2\alpha} \tag{7.45}$$

其中 τ_0 为初始剪应力，m 为另一个经验系数，大体上等于1～1.3

对式(7.45)求微分得出孔隙压力的增量如下

$$\Delta p_d=\frac{\sigma_0^{(1-m\tau_0/\sigma_0)}}{\pi\alpha N_l\sqrt{1-\left(\frac{N}{N_l}\right)^{1/\alpha}}}\left(\frac{N}{N_l}\right)^{(1/2\alpha-1)}\Delta N \tag{7.46}$$

ΔN 为该时段内的振动次数，液化次数 N_l 则根据下列半对数公式计算

$$N_l=10^{(b-\tau_0/\sigma_0)/a} \tag{7.47}$$

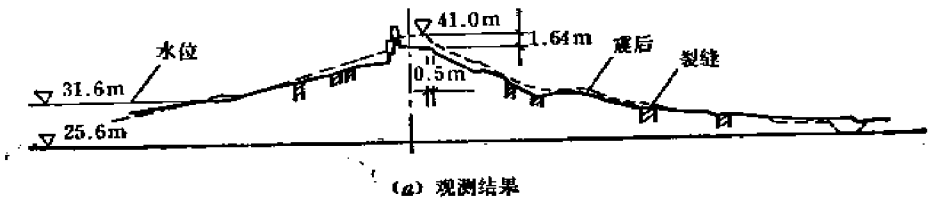
a 和 b 为另外两个试验常数。N 和 ΔN 按经验取值，例如 7 级地震 N 为 12 次（见表 7.1），总历时 20 秒，分 20 个时段计算，则 $\Delta N=0.6$ 次。τ_d 则象前面式(7.25)一样取用该时段内最大剪应力的 0.65 倍。然后把各单元的 Δp_e 作为初应力，得出等价结点荷载进行静力计算。

上述方法带有较多的经验成份，特别是基本出发点的式(7.43)是在统计室内等幅应力的动三轴试验资料的基础上得到的，而在现场，动应力幅值总是随着孔隙压力的升高而降低的，不可能维持等幅应力的条件。此外，如考虑排水，按此法可以算出孔隙压力消失后的体积残余变形，但是得不出形状残余变形。

另一种是直接从残余的体积变形和形状变形的经验公式出发进行计算，如式(3.124)和(3.125)。而不排水条件下的残余孔隙压力等于残余体积变形与回弹体积模量 B_u 的乘积

$$\Delta p_e = B_u \Delta \varepsilon_v \tag{7.48}$$

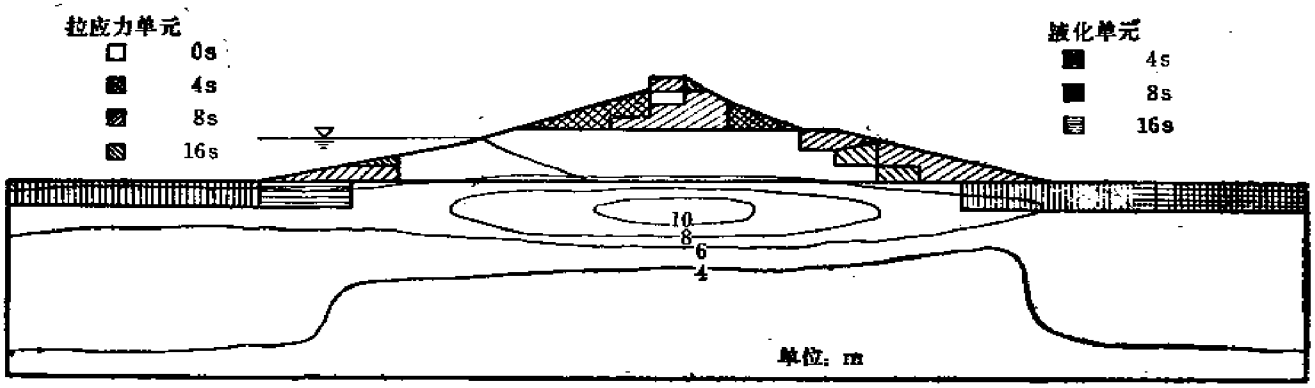
在这里，等效振动次数 N 也不再凭经验计算，而是根据求动剪应变历史的式(3.127)计算，该式中 $\sum\gamma_d$ 即历次积累的动剪应变，$\bar{\gamma}_d$ 则是本时段内的平均动剪应变幅值，可取最大幅值 $(\gamma_d)_{max}$ 的 0.65 倍。这一方法已编成 EFESD 程序[14]。图 7.8 是利用这一程序分析唐山地震时遭到局部破坏的陡河水库的计算实例[21]。图 7.9 是顾卫华等应用类似的方法分析地



(a) 观测结果



(b) 计算变形



(c) 拉应力，液化区及孔隙压力

图 7.8 陡河土坝地震变形与液化

基中布置砾石桩的抗液化效果[22]，图中等值线为经历最大加速度0.05g持续震动10秒后的孔隙压力比，外围无桩处孔压比等于1，说明已液化，而基础下面的孔压比则很小。

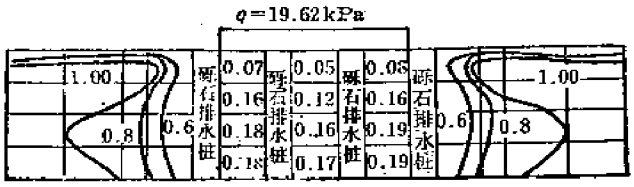


图 7.9 砾石排水桩的抗液化效果
（最大孔隙水压力比分布）

下面为摘自EFESD程序的两个子程序，第一子程序CONTL说明动力计算与静力计算交替进行的基本算法，第二段RESID子程序说明按公式(3.124)和(3.125)的残余变形的算法。

P.7.3 动力有效应力分析控制程序

【功能】 调用子程序STATIC和子程序DYNAMC交替进行静力和动力分析，并控制整个运算进程。

【标识符】

SDT——时间累计

NULS、NULD——震前静力计算及动力计算分级数

LE——考虑堤坝分级施工时每级填筑断面最后一个单元号

RTL——每级时间增量

SIZE——统计自由度及劲度矩阵非零元素的子程序

LOAD——计算荷载项子程序

STATIC——按Biot理论进行静力计算的子程序(−1，震前静力计算第一次迭代；0，第2次迭代；1，地震期的静力计算；2，震后静力计算)

DT——动力计算时步长

RDT、NUT——动力计算每段时间间隔及时步个数(输入)

U0, U10, U20, EE0——上一时段的结点位移，速度和加速度及单元主剪应变

SNK——式3.127中的ΣY_d

AC、ACG——每时段及整个时程的基岩加速度

ND——动力自由度数

NIL——动力计算迭代次数

U, U1, U2, EE——随时间变化的结点位移，速度和加速度及单元主剪应变

DYNAMC——动力计算子程序(与总应力法相同)

RESID——残余应变计算子程序(见后)

RT0——震后静力计算第一时段长(输入)，以后时段的RT均比前一时段增长一倍

DHM——结点水头变量中的最大者，计算到此值小于5 cm停止

【说明】 (1) 100以前为震前静力计算，每级迭代两次

(2) 100～300 地震期计算

(3) 300 以后震后静力计算

(4) DT、DT0、DT1、DT2 用于数值积分，见前面 Wilson θ 法的说明

```
      SUBROUTINE CONTL
      COMMON NULS,NULD,NUT,ND,NIL,
     * NUE,RDT,RTO/C1/LE(20),
     * RTL(20),AC(100),ACG(1500)/
     * C2/EE(300),EEO(300),
     * U(400),U1(400),U2(400),
     * UO(400),U10(400),U20(400),
     * SNK(300)/C1/BT,DTO,DT1,
     * DT2,CT,DHM
      SDT=0.0
      DO 100 NL=1,NUSL
      NUE=LE(NL)
      RT=RTL(NL)
      SDT=SDT+RT
      CALL SIZE
      CALL LOAD
      CALL STATIC(-1)
      CALL STATIC(0)
100   CONTINUE
      SDT=0.0
      DT=RDT/NUT
      DTO=1.4*DT
      DT1=3.0/DTO
      DT2=6.0/DTO/DTO
      CT=DT*DT/6.0
      DO 150 I=1,ND
      UO(I)=0.0
      U10(I)=0.0
150   U20(I)=0.0
      DO 180 K=1,NUE
      EEO(K)=0.0
180   SNK(K)=0.0
      DO 300 NL=1,NULD
      SDT=SDT+RT
      K=(NL-1)*NUT
      DO 220 I=0,NUT
220   AC(I)=ACG(I+K)
      DO 250 IL=1,NIL
      DO 230 I=1,ND
      U(I)=UO(I)
      U1(I)=U10(I)
230   U2(I)=U20(I)
      DO 240 K=1,NUE
240   EE(K)=EEO(K)
      CALL DYNAMC
      CALL RESID
250   CONTINUE
      DO 260 I=1,ND
      UO(I)=U(I)
      U10(I)=U1(I)
260   U20(I)=U2(I)
      DO 270 K=1,NUE
270   EEO(K)=EE(K)
      CALL STATIC(1)
300   CONTINUE
      SDT=0.0
      RT=RTO
      NL=0
400   NL=NL+1
      RT=RT*2.0
      DHM=0.0
      CALL STATIC(2)
      IF(DHM.GT.0.05) GOTO 400
      RETURN
      END
```

P.7.4 残余应变计算程序

【功能】 在每一时段末，根据动力计算结果按式(3.124) 和 (3.125)计算残余体应变和残余剪应变的增量

【标识符】

MR——迭代中前后模量相对误差超过 10% 的单元数

SX、SY、SXY——有效应力 σ_x, σ_y, τ_{xy}

EX、EY、EXY——初应变 ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0

ED——$\bar{\gamma}_d$

EMAX——$(\gamma_d)_{max}$

SDE——每个时段 RDT 内 $\sum|EE_2-EE_1|$，即 DT 内主剪应变增量的绝对值累加，除 4 以后化作 $\sum\gamma_d$(正弦波中此累加值等于 4 倍的幅值)

DN——$\dfrac{(\sum\gamma_d)\Delta T/\bar{\gamma}_d}{1+(\sum\gamma_d)T/\bar{\gamma}_d}$相当于式(3.124)中$\dfrac{\Delta N}{1+N}$

IMAT——单元材料种类

CS——$c\cdot\mathrm{ctg}\,\phi$

CF——$\sin\phi$

SL——应力水平，限制最大值 0.95

C1、C2、C3、C4、C5——见式(3.124)和(3.125)

SM——上时段末平均有效压应力，限制不小于 1 kPa

SM_1——预估的本时段平均有效压应力的一个均值

CBU、CM——回弹体积模量公式 $B_U=K_{bu}(\sigma_m/p_a)^m$

CD、CG、CK——式(3.122)中之 λ_{max}，k_2 和 k_1

EG、ED——单元的 G 和 λ

CV、CD——残余体积和剪切应变增量

```
      SUBROUTINE RESID
      COMMON MR,NUE,NIL
     * /C3/CS(10),CF(10),CBU(10),
     * CM(10),CG(10),CK(10),CD(10),
     * C1(10),C2(10),C3(10),C4(10),
     * C5(10)/C4/IMAT(300),SX(300),
     * SY(300),SXY(300),EX(300),EY
     * (300),EXY(300),EMAX(300),SNK     30
     * (300),SDE(300),EG(300),          40
     * ED(300)
      MR=0
      DO 100 K=1,NUE
      ED=0.65*EMAX(K)
      DS=SDE(K)/4.0
      SN=SNK(K)
      SNN=SN+DS
      DN=DS/(SN+ED)
      ED=ED*100.0
      S1=SX(K)
      S2=SY(K)
      S3=SXY(K)
      L=IMAT(K)
      SM=(S1+S2)/2.0
      SD=(S1-S2)/2.0
      ST=SQRT(SD*SD+S3*S3)
      SA=SM+CS(L)                      100
      IF(SA.LT.1000) SA=1000
      SL=ST/SA/CF(L)
      IF(SL.GT.0.95) SL=0.95
      CV=C1(L)*EXP(C2(L)*ALOG(ED))
     * *EXP(-C3(L)*SL*SL)*DN
      IF(SM.LT.1000)GOTO 30
      SM1=SM-CV*CBU(L)*EXP(CM(L)
     * *LOG(SM/98100))/2.0
      IF(SM1.LT.SM/2.0) SM1=SM/2.0
      GOTO 40
      SM1=1000
      SS=SM1/98100
      EC=CK(L)*EXP(0.75*LOG(ED))/
     * SQRT(SS)
      ED1=CD(L)*EC/(1+EC)
      EG0=EG(K)
      EG1=CG(L)*SQRT(SS)/(1+EC)
      ED(K)=ED1
      EG(K)=EG1
      IF(ABS(EG1-EG0)/EG1.GT.0.1)
     *  MR=MR+1
      IF(IL.LT.NIL) GOTO 100
      CDD=C4(L)*EXP(C5(L)*ALOG(ED))
     * *SL*SL*DN
      EX(K)=CV+CDD*SD/ST
      EY(K)=CV-CDD*SD/ST
      EXY(K)=CDD*S3/ST
      SNK(K)=SNN
      CONTINUE
      RETURN
      END
```

7.7 弹塑性分析

前面提到，周期荷载下土(尤其是砂土)的变形特性更接近塑性滞回体，前面几节介绍的等价粘弹性分析法把本来属于塑性性质的变形当作粘性项处理，是一种半经验的办法。弹塑分析就是根据土体实际的弹塑性性质构造动力方程(7.2)中的切线劲度矩阵 $[K]_t$，同时去掉经验性的阻尼项 $[C]\{\dot{u}\}$，即把该式简化为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]_t\{u\}=\{F\} \tag{7.49}$$

然后用数值积分方法求解。前面介绍的积分方法当然仍可以用，但前面分析中 $[K]$ 在整个振动过程中都是不变的，所以 $[K]$ 只需求逆一次即可。此处如对每一时段 Δt 都这样运算，工作量将十分巨大，因此，弹塑性分析中常用下列显式差分法，即把 $\{\ddot{u}\}$ 用下列差分式代入[12.23]

$$\{\ddot{u}\}_{n+1}=\frac{\{u\}_{n+1}-2\{u\}_n+\{u\}_{n-1}}{\Delta t^2} \tag{7.50}$$

可得

$$\{u\}_{n+1}=2\{u\}_n-\{u\}_{n-1}+[M]^{-1}(\{F\}_n-[K]_t\{u\}_n)\Delta t^2 \tag{7.51}$$

此式表明，下一时段的位移$\{u\}_{n+1}$可以通过本时段位移$\{u\}_n$及上一时期位移$\{u\}_{n-1}$表示。由于$[M]$是不变的，只须求逆一次即可，当采用集中质量法时，$[M]$是对角矩阵，求逆更方便。但显式差分格式是不稳定的，Δt要取得足够小，至少小于二结点间应力波传递的时间。

弹塑性分析中关键是$[K]_t$矩阵的组成，也就是动力应力应变模式。目前抗震分析中常用的办法是只在剪切变形上考虑反复荷载下的塑性变形，而体积塑性变形则或不予考虑(如 Masing 模式)，或用半经验办法考虑(如自发应变模式)。全面考虑体积和剪切变形的弹塑性分析模型(如边界面模型)尚未达到实用阶段。

下面介绍利用 Masing 模型和特征线法求解地基一维剪切振动的问题[24]。为了能适用于具有明显粘性的土层，考虑下列剪应力τ与剪应变γ及应变速率$\partial\gamma/\partial t$的关系

$$\tau=g(\gamma)+\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{7.52}$$

而土层的平衡方程为

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.53}$$

u为水平变位。考虑到$\gamma=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$，把式(7.52)代入式(7.53)后可得

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=G_t\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{7.54}$$

其中切线模量$G_t=\dfrac{\partial g(\gamma)}{\partial\gamma}$可由式(3.132)得出。此式不是双曲型方程，但当粘滞项$\mu\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}$可忽略时，此式变为双曲型方程，具有特征线$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\pm c_s$，$c_s=\sqrt{\dfrac{G_t}{\rho}}$为剪切波速。王志良等考虑到粘滞项影响较小，把$f=\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$看作已知的强迫振动力，即把式(7.54)改为下列双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{f}{\rho} \tag{7.55}$$

现在改用τ和$v=\dfrac{\partial u}{\partial t}$为变量，把式(7.52)对时间求导，再把式(7.53)等式两边分别乘上$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\pm c_s$，然后两式相加，可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-\rho c_s\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=f'\\&\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\rho c_s\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=f'\end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

其中$f'=\mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial z}$，或在特征线上

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=c_s\qquad \mathrm{d}\tau-\rho c_s\mathrm{d}v=f'\mathrm{d}t\\&\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-c_s\quad \mathrm{d}\tau+\rho c_s\mathrm{d}v=f'\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

上式可以在 $z\sim t$ 平面上用特征线法求解。设 i 为空间上结点，j 为时间上结点。则当 j 线上的 τ 和 v 已知时，$j+1$ 线上任一点 $p(i,\ j+1)$ 上的 τ 和 v 可由下式解出

$$\left.\begin{aligned}\tau_p-\tau_r-\rho c_s(v_p-v_r)&=f'\Delta t\\ \tau_p-\tau_s+\rho c_s(v_p-v_s)&=f'\Delta t\end{aligned}\right\}\tag{7.58}$$

f' 可以近似地取上一时段的值，$(\tau_r、v_r)$ 和 $(\tau_s、v_s)$ 可由上一时段（即 j 线上）各结点已知值内插解出（图 7.10）。

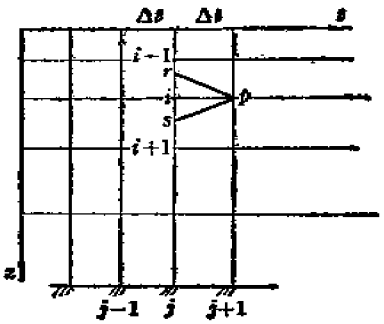


图 7.10 特征线法

7.8 耦合分析

前面的动力分析方法把土骨架和孔隙水看作整体，不计它们的相对运动。本节讨论两者分别运动的耦合分析方法。这个问题的严格解法是把骨架的变位和孔隙水的变位（或它们之间的相对变位）作为独立的变量[25.26]。但是对大多数作用力的变化不是十分快速的情况（例如地震荷载）把骨架的变位和孔隙水压力作为变量求解更简单些[27]。下面简单介绍后一种算法。

忽略孔隙水流的惯性力，基本方程式(1.17)可以写为[29]

$$\left.\begin{aligned}[M]\{\ddot{u}\}+P(\{u\})+[Q]\{p\}&=\{F_1\}\\ [Q]\{\dot{u}\}+[H]\{p\}+[S]\{p\}&=\{F_2\}\end{aligned}\right\}\tag{7.59}$$

其中 $P(u)=\int_\Omega[B]^T\{\sigma\}\mathrm{d}\Omega$ 代表位移引起的结点力。采用某种积分格式，例如式(7.38)的 Newmark 法，把 Δt 时段末的变位表示为

$$\left.\begin{aligned}\{\dot{u}\}_{n+1}&=\alpha\Delta t\{\ddot{u}\}_{n+1}+\{A\}_n\\ \{u\}_{n+1}&=\beta\Delta t^2\{\ddot{u}\}_{n+1}+\{B\}_n+\{u\}_n\end{aligned}\right\}\tag{7.60}$$

其中 $\{A\}_n=\{\dot{u}\}_n+(1-\alpha)\Delta t\{\ddot{u}\}_n$，$\{B\}_n=\Delta t\{\dot{u}\}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\{\ddot{u}\}_n$。类似地把孔隙水压力写为

$$\{p\}_{n+1}=\gamma\Delta t\{\dot{p}\}_{n+1}+\{C\}_n$$

其中 $\{C\}_n=\{p\}_n+(1-\gamma)\Delta t\{\dot{p}\}_n$。把它们代入(7.59)，并把 $P(\{u\})$ 展开成

$$P(\{u\}_{n+1})=P(\{u\}_n)+[K_t](\{u\}_{n+1}-\{u\}_n)$$

其中 $[K_t]=\dfrac{\partial P}{\partial\{u\}}$。可得

$$\begin{aligned}&[M]\{\ddot{u}\}_{n+1}+\beta\Delta t^2[K_t]\{\ddot{u}\}_{n+1}+\gamma\Delta t[Q]\{\dot{p}\}_{n+1}\\ &=\{F_1\}_{n+1}-P(\{u\}_n)-[K_t]\{B\}_n-[Q]\{C\}_n\\ &\quad\alpha\Delta t[Q]\{\ddot{u}\}_{n+1}+\gamma\Delta t[H]\{\dot{p}\}_{n+1}+[S]\{\dot{p}\}_{n+1}\end{aligned}$$

$$= \{F_2\}_{n+1} - [Q]\{A\}_n - [H]\{C\}_n \tag{7.62}$$

先把上式简写为

$$\phi(\{q\}_{n+1}) = 0 \tag{7.63}$$

其中 $\{q\}_{n+1} = \{u\ p\}^T_{n+1}$。此式可以用下列迭代过程求解。设 $\{q\}$，$\{q\}^2, \cdots, \{q\}^t$ 为历次迭代中求得的近似解(为简单起见去掉足标 $n+1$)。代回到式(7.63)后将不等于0，即

$$\{r\} = \phi(\{q\}) \neq 0, \cdots, \{r\}^t = \phi(\{q\}^t) \neq 0。$$

把下一次迭代的结果展开为前几次迭代结果的 Taylor 级数，并只取一项，得

$$\{r\}^{t+1} = \{r\}^t + [G](\{q\}^{t+1} - \{q\}^t)$$

其中 $[G] = \dfrac{\partial \phi}{\partial \{q\}}$。如果希望 $\{q\}^{t+1}$ 满足式(7.63)，即余项 $\{r\}^{t+1} = 0$，由此

$$\{q\}^{t+1} = \{q\}^t - [G]^{-1}\{r\}^t \tag{7.64}$$

系数矩阵[G]应为

$$[G] = \begin{bmatrix} [M] + \beta\Delta t^2[K_t] & \gamma\Delta t[Q] \\ \alpha\Delta t[Q] & \gamma\Delta t[H] + [S] \end{bmatrix} \tag{7.65}$$

当 $\alpha = \gamma$ 且 $[K_t]$ 为对称矩阵时，上式也将为对称矩阵。

采用上述隐式方法求解时，每个 Δt 时段都要对[G]矩阵求逆，而且还要迭代，可见计算工作量是十分巨大的。因此，尚未有人用于实际工程问题的求解。曾经用过的方法是对式(7.59)中的第一式采用类似式(7.51)的显式方法求解，即把它改写为[28]

$$[M](\{u\}_{n+1} - 2\{u\}_n + \{u\}_{n-1})/\Delta t^2 + P(\{u\}_n) + [Q]\{p\}_n = \{F_1\}_n \tag{7.66}$$

并把 Δt 限制为

$$\Delta t \leqslant l_{\min}/\sqrt{B_v/\rho} \tag{7.67}$$

其中 $l_{\min}$ 为单元的最小尺寸，B_v 为体积回弹模量。由式(7.66)解出 $\{u\}_{n+1}$，按下式算 $\{\ddot{u}\}_{n+1}$

$$\{\ddot{u}\}_{n+1} = (\{u\}_{n+1} - 2\{u\}_n + \{u\}_{n-1})/\Delta t^2$$

把它代入式(7.62)之第二式，即

$$(\gamma\Delta t[H] + [S])\{\dot{p}\}_{n+1} = \{F_2\}_{n+1} - Q\{A\}_n - [H]\{c\}_n - \alpha\Delta t[Q]\{\ddot{u}\}_{n+1} \tag{7.68}$$

由此可解出 $\{\dot{p}\}_{n+1}$。

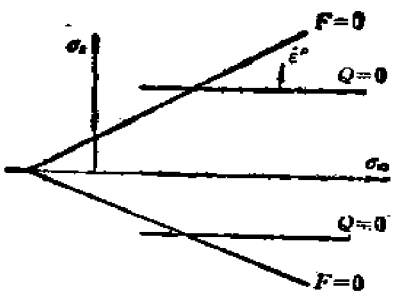


图 7.11 不相适应流动法则

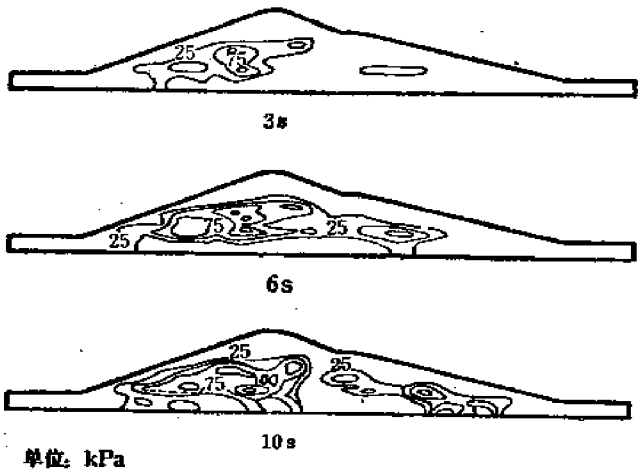


图 7.12 San Fernando 下坝分析——振动孔隙压力等值线

Zienkiewicz 等人应用上述方法及第三章介绍的自发应变模式进行了砂土液化的计算。式(3.141)的自发应变当作初应变，因此增量型弹塑性本构关系写为[28]

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep}([B]\{du\} - \{d\varepsilon\}) \tag{6.69}$$

具体计算中采用不相适应流动法则，即屈服面 F 用 Coulomb 理论，塑性势 Q 用没有体变的 Coulomb 理论(图 7.11)，塑性体变按自发应变公式算出。这时，式(7.59) 中的 $P(\{u\}_a)$ 为

$$P(\{u\}_a) = \int_\Omega [B]^T\{\sigma\}_a d\Omega \tag{7.70}$$

而

$$\{\sigma_a\} = \sum_{i=1}^{n} \{d\sigma\}_i \tag{7.71}$$

图 7.12 是 San Fernando 坝的计算实例。

7.9 源问题的边界元法

前面几节主要涉及地震的动力学问题。对于局部表面承受动力荷载的源问题，特别是机器的基础，由于振动力比较小，可以假定土体处于弹性变形状态，而且也不存在远域传来的地震波的输入问题，所以应用边界元法是特别合适的。下面简要介绍动力方程的边界元解法[7.31]。

对理想弹性介质，式(1.10)可以改写为

$$(c_p^2 - c_s^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + c_s^2\nabla^2 u_j + \frac{1}{\rho}f_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (j=1,2,3) \tag{7.72}$$

其中 $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$。

对此式进行 Laplace 变换，即令

$$\bar{u}_j = \int_0^\infty u_j e^{-\omega t}dt, \quad \bar{f}_j = \int_0^\infty f_j e^{-\omega t}dt,$$

各项乘上 $e^{-\omega t}$ 再积分后可把上述双曲型方程变换成下列椭圆型方程

$$(c_p^2 - c_s^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right) + c_s^2\nabla^2\bar{u}_j + b_j = \omega^2\bar{u}_j \tag{7.73}$$

其中 $b_j = \frac{1}{\rho}\bar{f}_j + \dot{u}_{j0} + \omega u_{j0}$，$\dot{u}_{j0}$ 和 u_{j0} 分别为 $t=0$ 时的速度和位移。边界条件可以写为

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_1 \quad & u_j = \tilde{u}_j \\ \Gamma_2 \quad & t_j = \tilde{t}_j\end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

或经 Laplace 变换后

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_1 \quad & \bar{u}_j = \tilde{\bar{u}}_j \\ \Gamma_2 \quad & \bar{t}_j = \tilde{\bar{t}}_j\end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

现在考虑式(7.73)的基本解，即在 P 点 l 方向作用单位荷载时，在 Q 点 j 方向引起的变位 $u_{lj}^*(P, Q)$ 和表面力 $t_{lj}^*(P, Q)$。此时 $b_j = \Delta(P, Q)\delta_{lj}$ 为 Dirac 函数，即 Q 与 P 重合且 $l=j$ 时为 1，否则为 0，它具有下列性质

$$\int_\Omega \Delta(P, Q)d\Omega = 1 \tag{7.76}$$

$$\int_\Omega f(Q)\Delta(P, Q)d\Omega = f(P) \tag{7.77}$$

由 Cruse 求得的基本解如下[321]

$$u_{ij}^{*}(P,\ Q)=\frac{1}{\alpha\pi\rho c_s^2}\left[\psi\delta_{ij}-\chi\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}t_{ij}^{*}(P,\ Q)=\frac{1}{\alpha\pi}\Big[&\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}-\frac{\chi}{r}\right)\left(\delta_{ij}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)\\&-\frac{2\chi}{r}\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}-2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}\\&+\left(\frac{c_p^2}{c_s^2}-2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r}-\frac{\alpha\chi}{2r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j\Big]\end{aligned} \tag{7.79}$$

式中 r 是 P 和 Q 两点距离，n 为表面的法向，n_i 和 n_j 是此法向与 i 和 j 轴交角的方向余弦。对二维问题 $\alpha=2$

$$\psi=K_0\left(\frac{\omega r}{c_s}\right)+\frac{c_s}{\omega r}\left[K_1\left(\frac{\omega r}{c_s}\right)-\frac{c_s}{c_p}K_1\left(\frac{\omega r}{c_p}\right)\right]$$

$$\chi=K_2\left(\frac{\omega r}{c_s}\right)-\frac{c_s^2}{c_p^2}K_2\left(\frac{\omega r}{c_p}\right)$$

K_0、K_1 和 K_2 分别为 0 阶，1 阶和 2 阶 Bessel 函数。对三维问题 $\alpha=4$

$$\psi=\frac{e^{-\omega r/c_s}}{r}+\left(\frac{c_s}{\omega^2r^2}+\frac{c_s}{\omega r}\right)\frac{e^{-\omega r/c_s}}{r}-\frac{c_s^2}{c_p^2}\left(\frac{c_p^2}{\omega^2r^2}+\frac{c_p}{\omega r}\right)\frac{e^{-\omega r/c_p}}{r}$$

$$\chi=\left(\frac{3c_s^2}{\omega^2r^2}+\frac{3c_s}{\omega r}+1\right)\frac{e^{-\omega r/c_s}}{r}-\frac{c_s^2}{c_p^2}\left(\frac{3c_p^2}{\omega^2r^2}+\frac{3c_p}{\omega r}+1\right)\frac{e^{-\omega r/c_p}}{r}$$

下面用加权残数法推导函数的域内值和边界值之间的关系。要求函数 $\bar{u}_j$ 在加权平均意义上满足方程(7.73)及其边界条件(7.75)，并取基本解 u_j^* 为权函数，得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left\{(c_p^2-c_s^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_1^3\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i}\right)+c_s^2\nabla^2\bar{u}_j+b_j-\omega^2\bar{u}_j\right\}u_j^*\mathrm{d}\Omega\\&=\int_{\Gamma_\sigma}(\bar{t}_j-\tilde{\bar{t}}_j)u_j^*\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_u}(\bar{u}_j-\tilde{\bar{u}}_j)t_j^*\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{7.80}$$

$$(j=1,\ 2,\ 3)$$

此式经两次分部积分后变为

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left\{(c_p^2-c_s^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_1^3\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i}\right)+c_s^2\nabla^2u_i^*-\omega^2u_j^*\right\}\bar{u}_j\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega b_ju_j^*\mathrm{d}\Omega\\&=-\int_\Gamma\tilde{\bar{t}}_ju_j^*\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_u}\bar{t}_ju_j^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_u}\tilde{\bar{u}}_jt_j^*\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{u}_jt_j^*\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{7.81}$$

上式第一项括号内即为 $-\Delta(P,\ Q)\delta_{ij}$，考虑到式 (7.77) 和 u_j^* 又包含 $u_{ij}^*(l=1,\ 2,\ 3)$ 三个成分，可得

$$\begin{aligned}\bar{u}_j(P)=\sum_{i=1}^3\Big[&\int_{\Gamma_\sigma}\tilde{\bar{t}}_i(Q)u_{ij}^*(P,\ Q)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_u}\bar{t}_i(Q)u_{ij}^*(P,\ Q)\mathrm{d}\Gamma\\&-\int_{\Gamma_u}\tilde{\bar{u}}_i(Q)t_{ij}^*(P,\ Q)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_\sigma}\bar{u}_i(Q)t_{ij}^*(P,\ Q)\mathrm{d}\Gamma\\&+\int_\Omega b_i(Q)u_{ij}^*(P,\ Q)\mathrm{d}\Omega\Big]\end{aligned} \tag{7.82}$$

$$(j=1,\ 2,\ 3)$$

当 P 点落在边界上时，左边应乘以 $\frac{1}{2}$，同时把有关符号写成矩阵形式，可得

$$\frac{1}{2}\{\bar{u}(P)\}=\int_{\Gamma_1}[U^*_{PQ}]\{\tilde{t}(Q)\}d\Gamma+\int_{\Gamma_2}[U^*_{PQ}]\{\bar{t}(Q)\}d\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_2}[T^*_{PQ}]\{\tilde{u}(Q)\}d\Gamma-\int_{\Gamma_1}[T^*_{PQ}]\{\bar{u}(Q)\}d\Gamma$$
$$+\int_{\Omega}[U^*_{PQ}]\{b(Q)\}d\Omega \tag{7.83}$$

其中 $\{u\}=\{u_1,u_2,u_3\}^T$, $\{t\}=\{t_1,t_2,t_3\}^T$, $\{b\}=\{b_1,b_2,b_3\}^T$

$$[T^*]=\begin{bmatrix} t^*_{11} & t^*_{12} & t^*_{13}\\ t^*_{21} & t^*_{22} & t^*_{23}\\ t^*_{31} & t^*_{32} & t^*_{33}\end{bmatrix}\qquad [U^*]=\begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} & u^*_{13}\\ u^*_{21} & u^*_{22} & u^*_{23}\\ u^*_{31} & u^*_{32} & u^*_{33}\end{bmatrix}$$

现在用边界元法求解式 (7.83)。设在 Γ_1 和 Γ_2 边界上分别布置 N_1 和 N_2 个结点，N_t 为总结点数，则当这些点上的 $\{u_j\}$ 和 $\{t_j\}$ 已知时，边界上任一点 P 的 $\{u_p\}$ 和 $\{t_p\}$ 值可以通过下列内插公式得出

$$\left.\begin{aligned}\{u_p\}&=\sum_{j=1}^{N_t}\phi_{pj}\{u_j\}\\ \{t_p\}&=\sum_{j=1}^{N_t}\phi_{pj}\{t_j\}\end{aligned}\right\} \tag{7.84}$$

把上式代入式(7.83)，并把未知值 $\{\bar{u}\}$ 和 $\{\bar{t}\}$ 移到左边，可得

$$\frac{1}{2}\{\bar{u}_i\}+\sum_{j=1}^{N_1}[H_{ij}]\{\bar{u}_j\}-\sum_{j=1}^{N_2}[G_{ij}]\{\bar{t}_j\}$$
$$=\{B_i\}-\sum_{j=1}^{N_1}[H_{ij}]\{\tilde{u}_j\}+\sum_{j=1}^{N_2}[G_{ij}]\{\tilde{t}_j\} \tag{7.85}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}[H_{ij}]&=\int_{\Gamma_e}[T^*_{iQ}]\phi_{Qj}d\Gamma\\ [G_{ij}]&\int_{\Gamma_e}[u^*_{iQ}]\phi_{Qj}d\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{7.86}$$

可以先分单元积分，然后求和：

$$\{B_i\}=\int_{\Omega}[U^*_{iQ}]\{b(Q)\}d\Omega$$

可以通过计算域内划分单元的办法或其他方法，然后经数值积分得到，上式中连续分布的 P 点已由间断分布的 i 点代替。进一步令

$$\{x_i\}=\{\bar{u}_1\},\{\bar{u}_2\},\cdots,\{\bar{u}_{N_1}\},\{\bar{t}_{N_1+1}\},\cdots,\{\bar{t}_{N_t}\}$$
$$\{R_i\}=\{\tilde{t}_1\},\{\tilde{t}_2\},\cdots,\{\tilde{t}_{N_1}\},\{\tilde{u}_{N_1+1}\},\cdots,\{\tilde{u}_{N_t}\}$$

分别为边界上未知向量和已知向量，上式可进一步简写为

$$\sum_{j}^{N_t}[A_{ij}]\{x_j\}=\{B_i\}-\sum_{j}^{N_t}[A_{ij}]\{R_j\} \tag{7.87}$$
$$(i=1,\cdots,Nt)$$

其中

$$[A_{ij}]=\frac{1}{2}\delta_{ij}+[H_{ij}]\qquad (i=1,N_1;\ j=1,N_1)$$
$$[A_{ij}]=\frac{1}{2}\delta_{ij}-[G_{ij}]\qquad (i=1,N_1;\ j=N_1+1,N_t)$$
$$[A_{ij}]=[H_{ij}]\qquad (i=N_1+1,N_t;\ j=1,N_t)$$

$$[A_{ij}]=[G_{ij}] \qquad (i=N_1+1,\ N_t;\ j=N_1+1,\ N_t)$$

边界上的$\{\bar{u}\}$和$\{\bar{t}\}$求出后，代回到式(7.82)，可得内部点的$\{\bar{u}\}$，而应变和应力则可通过对此式求导和乘以弹性矩阵得出。当然，为得到这些变量的实际时间过程，还须要进行Laplace的逆变换。不通过变换而在时间域上直接积分的边界元法也有人在研究[33]。

下面以地基加固中的强夯法为例说明上述解法的实际应用[34]。设夯锤为圆形，按轴对称问题把地面划分成环形单元，取j单元形心为结点j，并取该单元内$\phi_{Qj}=1$，单元外$\phi_{Qj}=0$，则

$$[H]_{ij}=[T_{ij}^*]A_j$$
$$[G]_{ij}=[U_{ij}^*]A_j$$

A_j为该单元面积。设F为夯锤上的总力，M为其质量，u_{z_1}为接触面上变位，则根据牛顿第二定律

$$F=M\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{7.88}$$

由此可得下列夯锤底面上的边界条件

$$-\sum_{j=1}^{N_1}t_{zj}A_j=M\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{7.89}$$

对此式进行Laplace变换，得

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\bar{t}_{zj}A_j=M(\omega^2\bar{u}_z-\omega u_{z0}-\dot{u}_{z0}) \tag{7.90}$$

当夯锤与地面接触时，$t=0$、$u_z=0$、$\dot{u}_{z0}=\sqrt{2gH}$，g为重力加速度，H为落高。设锤底面绝对光滑，切向力$\bar{t}_{rj}=0$，故接触面上共有$\bar{t}_{zj}$，$\bar{u}_{rj}$ $(j=1,\ N_1)$和$\bar{u}_z$共$2N_1+1$个未知数，在接触面以外，$t_{rj}=t_{zj}=0$，故共有$\bar{u}_{rj}$、$\bar{u}_{zj}$$(j=1、N_2)$个未知数，总未知数为$2N_t+1$个$(N_t=N_1+N_2)$。前面式(7.87)含$2N_t$个方程式，另加式(7.90)，也是$2N_t+1$个，故可求解。图7.13是最终算得的锤底接触应力分布及其随时间变化过程。

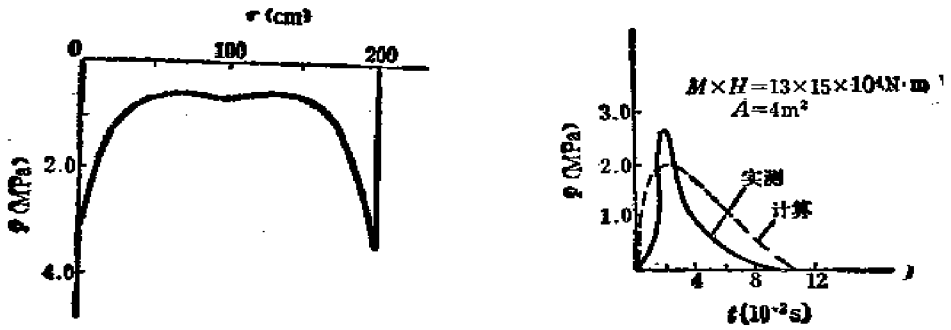


图7.13 夯锤底面上动应力

参 考 文 献

1. 王光远，建筑结构的振动，科学出版社，1978年。
2. Zienkiewicz O. C et al., Numerical methods for unbounded field problems and a new infinife element formulation, Computational Methods for Infinite Domain Media-Structure Interaction, AMD-Vol. 46. 1981.
3. Tassoulas J. L. et al., Consistent boundaries for semi-infinite problems, Ibid. 1981.
4. Lysmer J. & Waas G., Shear waves in plane infinite structures, J. EMD, ASCE, NO, EMI.1972.

5. Lysmer J., 土动力学的分析方法，地震工程和土动力学问题译文集，地震出版社，1985.
6. 赵崇斌，拱坝地基无限域模拟与地震波输入研究，清华大学水利系博士论文，1987.
7. Brebbia & Chuang P., Application of the boundary element method for solving elastodynamic problems. Soil Dynamics & Earthquake Engineering Conference. Vol. 1. p. 381, 1982.
8. Castellani A. et al., Boundary condition for finite element analysis in time domain, Ibid. p. 193, 1982.
9. Lysmer J. et al., FLUSH-A computer program for approximate 3D analysis of soil-structure interaction problems, EERC 75-30, 1975.
10. Idriss I. M. et al., QUAD-4,A computer program for evaluating the seismic response of soil structures by variable damping finite element procedure, Report No. EERC 73-16, 1973.
11. 刘颖、谢君斐等，砂土震动液化，地震出版社，1984.
12. Clough R. W.,Numerical intergration of the equations of motion, Lectures on FEM in Continuum Mechanics, p. 532, 1973.
13. Seed H. et al., Dynamic analysis of the slide in the lower San Fernando Dam during the earthquake of Feb. 9, 1971, J. GED, ASCE, GT9, 1975.
14. 沈珠江，土工建筑物地震反应的有限单元法计算程序 EFESD，南京水利科学研究院土工研究报告汇编(一)，1985.
15. Finn W. L. D, et al., Seismic response and liquefaction of sand, J. GED, ASCE, Vol. 12, GT8, 1976.
16. 沈珠江，砂土动力液化变形的有效应力分析方法，水利水运科学研究，1982 年 4 期.
17. 沈珠江，饱和砂土的动力渗流变形计算，水利学报，1980 年 2 期.
18. Seed H. B, et al., Pore-water pressure changes during soil liquefaction, J. GED, ASCE, GT4, 1976.
19. Finn W. D. L. 等，非均等固结压力条件下的孔隙水压力，地震工程和土动力问题译文集，p.502，地震出版社，1985.
20. 徐志英、沈珠江，地震液化的有效应力二维动力分析方法，华东水利学院学报，1981 年 3 期.
21. 沈珠江等，陡河水库土坝的地震液化及变形计算，水利水运科学研究，1984 年 1 期.
22. 顾卫华、王余庆，砾石排水桩与地面压重的抗液化效果，岩土工程学报，7 卷 4 期，1985.
23. Shanfaran D. et al., Dynamic transient behaviour of two-and three-dimensional structures including plasticity, large deformation effects and fluid interaction, Earthquake Engineering and Structure Dynamics, Vol. 4. No. 6, 1976.
24. 王志良等，考虑土的粘弹塑性特征的覆盖层地震反应波动分析法，科技成果报告 8014，冶金工业部建筑研究总院，1980.
25. Ghaboussi J. & Wilson E. C.,Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids. J. Engineering Mechanics Division, ASCE, EM4,1972.
26. Ghaboussi J. & Wilson E. C., Liquefaction analysis of saturated granular soils, Proc. 5th World Conf. Earthquake Engineering, Vol. 1, p. 380, 1973.
27. Zienkiewicz O. C. & Bettess P., Soil-and other saturated porous media under transient, dynamic condition, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, pp. 1-16.1982.
28. Zienkiewicz O. C. et al., Liquefaction and permanent deformation under dynamic condition, Ibid, pp. 71-104, 1982.
29. Zieukiewicz O. C., The coupled problems of soil-pore fluid-external fluid interaction. 5th Int Conf. Num Anal. Methods in Geomechanics. Vol. 4, p. 1731, 1985.
30. Geridia M. et al., Implicit finite element method, Ch.9, Computational Methods for Transient Analysis. North-Holland. 1983.
31. 顾卫华，波动方程的边界单元法，应用数学和力学，12 期，1985.
32. Cruse T. A. & Rizzo F. J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto dynamic problem, part I, J. Mathematics Anal. Appl., Vol. 22, pp. 244-259, 1968.
33. Karabalis D. L. et al.,Dynamic respons eof surface foundations by time domain boundary element method Int. Symp. on Dynamic Soil-Structure Interaction, p. 19, 1984.
34. 钱家欢、帅方生，边界元法在地基强夯加固中的应用，中国科学，1987 年 3 期.

第八章　极限分析

8.1　概述

极限分析以刚塑性体模型为基础，刚塑性体构件的一部分或全部在荷载作用下从静力平衡转向运动的过渡状态称极限平衡状态，相应的荷载称极限荷载。

土体的极限分析理论是在 50 年代初 Drucker 等人把静力场和运动场结合起来并提出极值原理以后才建立的[1,2]。但在此以前，极限分析理论的个别原理和方法已在土力学中广泛应用，例如 Coulomb 土压力理论和土坡圆弧稳定分析法是运动场理论的应用；朗肯土压力理论和某些地基承载力公式则是静力场理论的应用。四十年代苏联学者 Соколовский 推导了静力场的微分方程式，并应用特征线法求解了许多边值问题，建立了严密的静力分析理论——散粒体静力学[3]，沈珠江把 Drucker 理论和 Соколовский 理论结合起来，求得了土力学中一些常见问题的静力场和运动场相结合的解答[4,5]。

但是，要求得全面满足静力方程、运动方程和相应边界条件的应力场和速度场十分费事，有时甚至不可能，因此，许多人致力于开辟极限分析的另一条途径——利用变分原理建立极值定理，并由此求出极限荷载的近似解[6]。钟万勰推广了极值定理，提出了结构力学中极限分析的一般变分原理[7]。沈珠江曾试图把这一原理应用于莫尔-库伦材料*。但以上变分原理是在正交流动法则基础上得到的，算出的剪胀量太大。后来 Palmer 等人又建成了非正交流动法则的极值定理[8,9]。最近，潘家铮和孙君实进一步发展了极值理论，并成功地用于解释古典的土坡滑弧分析方法[10,11]。

随着以有限元法为代表的现代计算技术的兴起，人们的注意力更多地转向于变形分析。这些计算技术主要是针对椭圆形偏微分方程提出的，不能用于求解极限分析中遇到的双曲线方程。因此，在极限分析的数值方法研究方面，近 20 年来进展不大。虽然有人仿照有限单元法提出过几种算法，但未得到广泛的应用[12,13]。

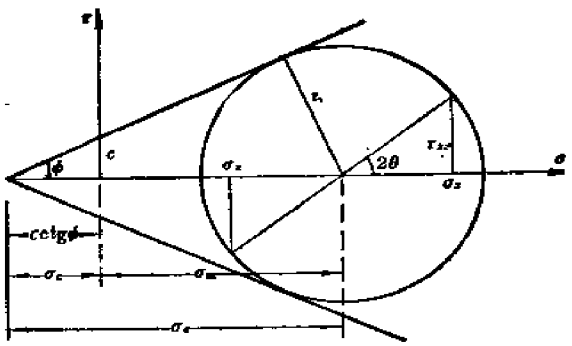


图 8.1　极限 Mohr 圆

* 沈珠江，土体极限分析中的一般变分原理(手稿)，1964。

本章的讨论限于强度包线为直线且遵从正交流动法则的所谓标准 Coulomb 材料，关于非标准材料的极限分析理论的研究参看文献[141]。

8.2 基本方程式

在平面应变条件下，极限分析的基本方程式由以下几部分组成

1. 平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}&=X\\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}&=Z\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

2. 屈服条件

$$f=\tau_m-\sigma_e\sin\varphi=0 \tag{8.2}$$

3. 几何方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x&=-\frac{\partial v_x}{\partial x}\\ \dot{\varepsilon}_z&=-\frac{\partial v_z}{\partial z}\\ \dot{\gamma}_{xz}&=-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

4. 流动法则

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_m&=\frac{\partial f}{\partial \sigma_m}\dot{\gamma}_m\\ \dot{\varepsilon}_e&=\frac{\partial f}{\partial \sigma_e}\dot{\gamma}_m\\ \dot{\gamma}_{xz}&=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\dot{\gamma}_m\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

由式(8.2)和(8.4)可得下列极限平衡时的能量耗散条件

$$\sigma_x\dot{\varepsilon}_x+\sigma_z\dot{\varepsilon}_z+\tau_{xz}\dot{\gamma}_{xz}=c\cos\varphi\dot{\gamma}_m \tag{8.5}$$

式中 X 和 Z 为体积力

$$\left.\begin{aligned}\sigma_e&=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)+\sigma_e\\ \tau_m&=\sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_z)^2+\tau_{xz}^2}\\ \dot{\gamma}_m&=\sqrt{(\dot{\varepsilon}_x-\dot{\varepsilon}_z)^2+\dot{\gamma}_{xz}^2}\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

$\sigma_e=c\operatorname{ctg}\varphi$，$c$ 和 φ 分别为土的凝聚力和内摩擦角(图 8.1)。

式(8.1)和(8.2)中包括三个方程式和三个未知数，故在给定的边界条件下可以独立求解。采用新的变量 σ_e 和 θ 代替 σ_x，σ_z，τ_{xz}，后者为大主应力方向角。这时

$$\left.\begin{aligned}\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_z\end{matrix}\right\}&=\sigma_e(1\pm\sin\varphi\cos 2\theta)-\sigma_e\\ \tau_{xz}&=\sigma_e\sin\varphi\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

式(8.2)即自动满足。把式(8.7)代入式(8.1)，简化后可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta+\mu)\frac{\partial \xi}{\partial z}&=a\\ \frac{\partial \eta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta-\mu)\frac{\partial \eta}{\partial z}&=b\end{aligned}\right\}\tag{8.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi\ln\frac{\sigma_\theta}{c}+\theta\\ \eta&=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi\ln\frac{\sigma_\theta}{c}-\theta\\ \mu&=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\\ \left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}&=\mp\frac{X\sin(\theta\mp\mu)-Z\cos(\theta\mp\mu)}{2\sigma_\theta\sin\varphi\cdot\cos(\theta\pm\mu)}\end{aligned}\right\}\tag{8.9}$$

式(8.8)为双曲线型偏微分方程组，具有两组相交的特征线，可用特征线法求数值解，两组特征线的斜率为 $\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}(\theta\pm\mu)$，因此，式(8.8)可改为：

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿第一组特征线}\quad \frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}(\theta+\mu)\qquad \frac{d\xi}{dx}=a\\ &\text{沿第二组特征线}\quad \frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}(\theta-\mu)\qquad \frac{d\eta}{dx}=b\end{aligned}\right\}\tag{8.10}$$

特征线方向与大主应力的交角为 $\pm\mu$，即与滑动面方向重合，故物理意义上特征线就是滑动线(图 8.2)

上述平面问题的静力平衡方程系由 Соколовский 导出[3]。Березанцев 在环向中主应力 $\sigma_\theta=\sigma_1$ 或 $\sigma_\theta=\sigma_3$ 的假设下把上述理论推广到轴对称问题，推导了相应的极限平衡方程[15]。其形式与式 (8.8) 完全一致，只是式(8.9)中 a 和 b 应改为

$$\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}=\mp\frac{\sin(\theta\pm\mu)-\sin(\theta\mp\mu)}{2r\cos(\theta\pm\mu)}\pm Z\frac{\cos(\theta\mp\mu)}{2\sigma_\theta\sin\phi\cos(\theta\pm\mu)}\tag{8.11}$$

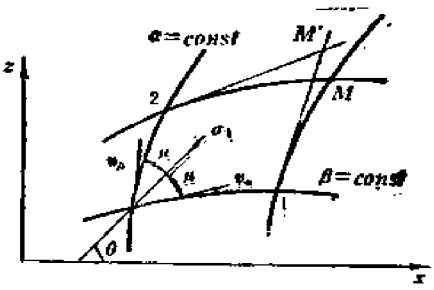


图 8.2 特征线

此时水平向体积力 $X=0$。相应的特征线方程也与式(8.10)完全一致

现在推导运动方程式。由式(8.2)求出 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}$ $\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial\tau_{xz}}$ 后代入式(8.4)和式(8.3)，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x}&=\frac{\dot\gamma_m}{2\sigma_\theta\sin\varphi}\left(-\sigma_\theta\sin^2\phi+\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)\\ \frac{\partial v_z}{\partial z}&=\frac{\dot\gamma_m}{2\sigma_\theta\sin\varphi}\left(-\sigma_\theta\sin^2\varphi+\frac{\sigma_z-\sigma_x}{2}\right)\\ \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}&=\frac{\dot\gamma_m}{2\sigma_\theta\sin\varphi}2\tau_{xz}\end{aligned}\right\}\tag{8.12}$$

式(8.12)中消去 $\dot\gamma_m$，并以沿滑动线方向的分速度 v_α 和 v_β 作为新的变量代替 v_x 和 v_z

$$\left.\begin{aligned}v_\alpha&=v_x\cos(\theta-\mu)+v_z\sin(\theta-\mu)\\ v_\beta&=v_x\cos(\theta+\mu)+v_z\sin(\theta+\mu)\end{aligned}\right\}\tag{8.13}$$

式(8.12)可以简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_\beta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta+\mu)\frac{\partial v_\beta}{\partial z}-v_\beta\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\operatorname{tg}\varphi\\&\quad+v_\alpha\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\sec\varphi=0\\&\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta-\mu)\frac{\partial v_\alpha}{\partial z}+v_\alpha\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta-\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\operatorname{tg}\varphi\\&\quad+v_\beta\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\theta-\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\sec\varphi=0\end{aligned}\right\}\tag{8.14}$$

方程式(8.14)也属于双曲线型，且其特征线与静力平衡方程式(8.8)的特征线重合，特征线方程式为

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿第一组}\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\operatorname{tg}(\theta+\mu),\quad\frac{\mathrm{d}v_\beta}{\mathrm{d}\theta}=v_\beta\operatorname{tg}\varphi-v_\alpha\sec\varphi\\&\text{沿第二组}\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\operatorname{tg}(\theta-\mu),\quad\frac{\mathrm{d}v_\alpha}{\mathrm{d}\theta}=-v_\alpha\operatorname{tg}\varphi+v_\beta\sec\varphi\end{aligned}\right\}\tag{8.15}$$

当采用非正交流动法则时，例如用剪胀角ρ代替φ，则式(8.13)和(8.14)中 $\mu=\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}$，此时速度场的特征线将不与应力场的特征线重合。

8.3 极限平衡问题及其解法

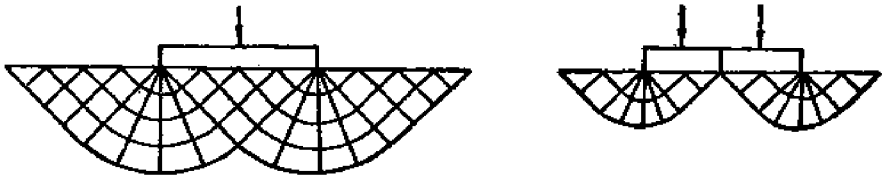
方程组(8.8)和(8.14)构成了极限平衡问题的基本方程式，其中静力方程组(8.8)是可以独立求解的，但运动方程组(8.14)则需由静力方程组中解出大主应力方向角θ后才能求解。但是，只满足静力方程的解答并不就是极限平衡问题的真正解答，因为它不一定能满足土体发生滑动时的特定的边界条件。极限平衡问题的完整解答必须同时满足给定的静力边界条件和运动边界条件。

根据给定的边界条件的不同，极限平衡问题可以分为三类[4]：

第一类问题：土体的部分表面给定荷载分布，另一部分表面给定速度分布或部分是荷载分布而部分是速度分布，求迫使后面这部分表面以预定速度移动所必须的极限荷载。属于这一类问题的有地基承载力和挡土墙土压力等问题。第二类问题：整个土体表面只给定荷载分布，要求确定土体中一部分发生滑动时所必须的极限体积力。属于这一类问题的是土坡稳定问题。第三类问题：整个土面只给定位移速度，要求确定引起表面发生这种位移所需要的极限荷载。属于这类问题的有隧道土压力和贯入试验等。

求解第一类极限平衡问题的一般顺序是：先根据荷载边界条件，把可能滑动的土体分成几个塑性应力区，用特征线法求出其应力场，然后考查是否存在与这一应力场相适应的、符合速度边界条件的速度场。如果存在这样的速度场，则求得的解便是正确的，否则就必须重新划分塑性应力区，再次求解。

图8.3举最简单的纯凝聚性材料的极限承载力为例，说明解题过程。从静力学角度出发。a和b都是满足边界条件的解答，但两者的塑性区范围不同。究竟哪一个是正确的，只有根据运动边界条件才能判别。如果压板是刚性的，则解答a是正确的，如果压板由两个半块拼成，中间断开或有铰相连，则解答b是正确的。因此可见，极限平衡问题并不是静定的，而是可能存在许多静力场，何者正确，必须通过运动分析决定。至于第二类和第三类极限平



(a)整体压板 (b)分离压板

图 8.3 两种边界运动条件

衡问题，还没有研究出有效的解法。

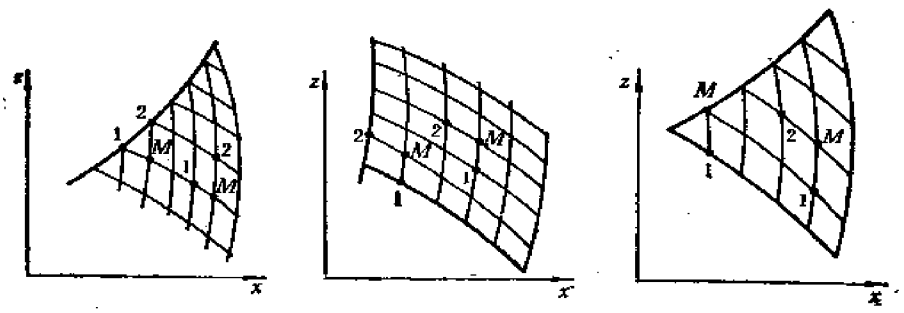
下面介绍应用特征线法求解双曲线方程(8.8)的步骤，式(8.14)的解法完全相同。

设点①和②为塑性区内不在同一特征线上的两点(图 8.2)，其坐标 (x_1, z_1) 和 (x_2, z_2) 及变量(ξ_1, η_1)和(ξ_2, η_2)已知，试求未知点M的(x_M, z_M)和(ξ_M, η_M)。先将式 (8.9) 写成差分形式：

$$z_M = z_1 + \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu)(x_M - x_1),\ \xi_M = \xi_1 + a_1(x_M - x_1)$$
$$z_M = z_2 + \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)(x_M - x_2),\ \eta_M = \eta_2 + b_2(x_M - x_2)$$

因(ξ_1, η_1)和(ξ_2, η_2)已知，故上式中 ξ_1, ξ_2 和 a_1, b_2 也是已知的，解此四方程式，即可得出未知量的第一次近似值 x'_M, z'_M, ξ'_M, η'_M。但是用这种差分法计算时，误差是积累的，因此，除非滑动线网格间距很小，否则计算只限于第一次近似值是不够的。根据第一次近似值 ξ'_M, η'_M 求出 θ'_M, a'_M 和 b'_M，并分别用$(\theta_1 + \theta'_M)/2$，$(\theta_2 + \theta'_M)/2$，$(a_1 + a'_M)/2$ 和$(b_2 + b'_M)/2$ 代替上式中的 θ_1, θ_2, a_1, b_2，再进行一次计算，就可以求得第二次近似值 x''_M, z''_M, ξ''_M 和 η''_M。一般计算限于第二次近似就可以了。

解题从边界开始，根据边界条件的不同，双曲型微分方程的边值问题可分三类（图 8.4)：



(a) Cauchy问题 (b) Goursat问题 (c)混合问题

图 8.4 三种边值问题

1. Cauchy 问题，边界线不是特征线，边界上函数 ξ, η 已知；

2. Goursat 问题，边界为两条相交的特征线，每一条线上函数 ξ, η 已知；

3. 混合问题，边界由一条特征线和另一条曲线组成，特征线上 ξ, η 已知，另一条线上只知道 ξ 和 η 之一，或只知道两者之间的关系。滑动土体中可以分成几个塑性应力区，每一区相当于上述的一个边值问题。

在划分塑性区时，经常遇到下列三种分界线：

1．应力不连续线。在莫尔应力图上通过任一点可以画两个与强度包线相切的应力圆——大极限应力圆和小极限应力圆（图 8.5）。如果线的一侧属大圆状态，另一侧属于小圆状态，则此线上的切向应力将有突变，故称为应力不连续线，它是刚性区（图中过渡圆）缩减到极限的结果。

2．界限线，即一簇滑动线的包线，一般是强度较低的材料沿强度较高的材料滑动时的边界。

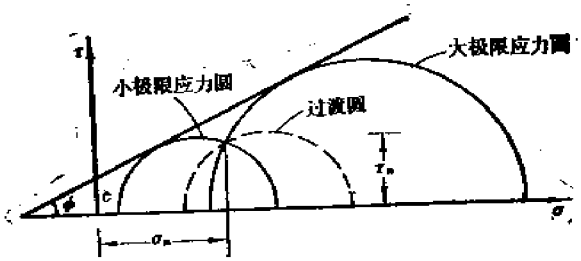


图 8.5 应力不连续线

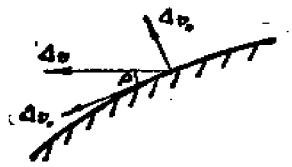


图 8.6 速度不连续线

3．速度不连续线，一般是刚性区与滑动区的边界，可以是滑动线或界限线。在速度不连续线上，法向速度的间断与切向速度的间断之间有下列关系（图 8.6）

$$\Delta v_n = -\Delta v_t \operatorname{tg}\rho \tag{8.16}$$

采用正交流动法则时 $\rho=\varphi$。

8.4 变分原理

本节介绍利用变分原理和极值原理求极限平衡问题近似解的方法。

8.4.1 可静解和可动解

满足平衡方程式(8.1)，刚塑性应力条件 $\tau_m \leqslant \sigma_s \sin\varphi$ 和一部分边界上的荷载边界条件的应力场称可静应力场，与此应力场相应的另一部分边界上的荷载称可静荷载或可静解。

满足方程式(8.14)和速度边界条件的速度场称可动速度场，与此速度场相适应而满足能量耗散率 (8.5) 和应力边界条件及滑动面上应力等于抗剪强度条件的应力场称可动应力场，与此应力场相应的另一部分边界上的荷载称可动荷载或可动解。

极限平衡状态是土体由静力平衡转向运动的临界状态，因此极限平衡状态下的应力场必须是可静应力场，其速度场必须是可动速度场。

在可静荷载作用下，土体一定处于平衡状态；在可动荷载作用下，土体一定处于变形流动状态。由此可以得出结论，可静荷载不会大于真正的极限荷载，可动荷载不会小于真正的极限荷载，或者说真正的极限荷载是可静荷载中的最大者和可动荷载中的最小者，这就是下面介绍的极大极小原理的物理意义。

8.4.2 极大极小原理

设 P_i 和 F_i 为给定的表面荷载和体积力，σ_{ij}、$\dot{\varepsilon}_{ij}$、v_i 为真正的应力场、应变速率场和速度场，在速度不连续线上的切向和法向速度间断值分别为 Δv_t 和 $\Delta v_n = -\Delta v_t \operatorname{tg}\varphi$，$q_i$ 为要求的极限荷载。可静应力场用 σ'_{ij} 表示，q'_i 为可静荷载，可动速度场，应变速率场及相应的应力场分别用 v^*_i，$\dot{\varepsilon}^*_{ij}$，σ^*_{ij} 表示，q^*_i 为可动荷载，则根据虚功原理可以得出：

$$\int_{\Gamma 1} p_i v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 2} q_i v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 3} (\tau_s \Delta v_t + \sigma_n \Delta v_n) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.17}$$

$$\int_{\Gamma 1} p_i v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 2} q_i' v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}' \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 3} (\tau_s' \Delta v_t + \sigma_n' \Delta v_n) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.18}$$

$$\int_{\Gamma 1} p_i v_i^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 2} q_i^* v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i^* \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 3} (\tau_s^* \Delta v_t^* + \sigma_n^* \Delta v_n^*) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.19}$$

$$\int_{\Gamma 1} p_i v_i^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 2} q_i v_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} F_i v_i^* \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 3} (\tau_s \Delta v_t^* + \sigma_n \Delta v_n^*) \mathrm{d}\Gamma \tag{8.20}$$

Γ_1 和 Γ_2 分别为第一及第二类边界，即荷载和速度边界，Γ_3 代表速度不连续线（滑动线），(σ_n, τ_s) 为线上法向及切向应力，(τ_s', σ_n') 和 (τ_s^*, σ_n^*) 分别为与可静解和可动解相应的应力。式(8.17)减去(8.18)和式(8.19)减去(8.20)，考虑到式(8.16)和滑动线上(τ_s, σ_n) 与(τ_s^*, σ_n^*)满足 Mohr-Coulowb 条件，可得：

$$\int_{\Gamma 2} (q_i - q_i') v_i \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}') \varepsilon_{ij} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma 3} (\tau_s' - \sigma_n' \operatorname{tg}\varphi) \Delta v_t \mathrm{d}\Gamma$$

$$\int_{\Gamma 2} (q_i^* - q) v_i \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) e_{ij}^* \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma 3} (\tau_s - \sigma_n \operatorname{tg}\varphi) \Delta v_t^* \mathrm{d}\Gamma$$

由于 σ_{ij} 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 相适应，σ_{ij}^* 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 相适应，根据正交法则 $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}')\dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant 0$ 和 $(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}^* \geqslant 0$(图 8.7)且考虑到 $\tau_s' - \sigma_n' \operatorname{tg}\varphi \leqslant 0$ 和 $\tau_s - \sigma_n \operatorname{tg}\varphi \leqslant 0$，可得

$$\int_{\Gamma 2} (q_i - q_i') v_i \mathrm{d}\Gamma \geqslant 0 \tag{8.21}$$

$$\int_{\Gamma 2} (q_i^* - q) v_i \mathrm{d}\Gamma \geqslant 0 \tag{8.22}$$

如果第二类边界为刚性边界，Q，Q' 和 Q^* 为与 q_i，q_i' 和 q_i^* 相应的合力，其作用点重合，则由上式可得

$$Q' \leqslant Q \tag{8.23}$$

$$Q^* \geqslant Q \tag{8.24}$$

即真正的极限荷载 Q 是可静荷载 Q' 中的极大者，可动荷载 Q^* 中的极小者。许多文献中把式(8.23)称为下限定理，式(8.24)为上限定理，即如果找到一个可静解和一个可动解，则前者是极限荷载的可能的下限，后者则是它的上限。

以上推导是建立在正交流动法则的基础上的，但是实际土体破坏时的剪胀角 ρ 明显小于内摩擦角 φ。对于符合非正交流动法则的材料，Palmer 推导了下列关系式[8]

$$Q^*(\varphi, \varphi) \geqslant Q^*(\varphi, \rho) \geqslant Q(\varphi, \rho) \geqslant Q'(\varphi, \rho) \geqslant Q'(\rho, \rho) \tag{8.25}$$

因此，如果我们能根据剪胀角 ρ 增大到 $\rho = \varphi$ 的假想材料找出一个可动解 $Q^*(\varphi, \varphi)$，并根据另一种内摩擦角 φ 降低到 $\varphi = \rho$ 的假想材料找出一个可静解 $Q'(\rho, \rho)$，则真实的极限荷载 $Q(\varphi, \rho)$ 将介于两者之间。

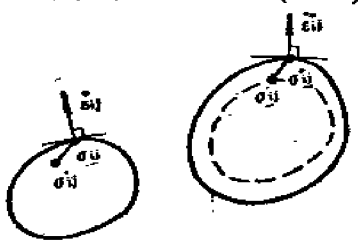


图 8.7 正交法则

8.4.3 土坡稳定问题的极大极小原理

前面的讨论针对第一类极限平衡问题，对于第二类极限平衡问题，边界 Γ_2 不存在，而式(8.18)和(8.20)中的 F_i 应相应地改为 F_i' 和 F_i^*，由此可得与式(8.21)和(8.22)类似的公式如下：

$$\int_{\Omega} (F_i - F_i') v_i \mathrm{d}\Omega \geqslant 0 \tag{8.26}$$

$$\int_{\Omega}(F_i^{*}-F_i)v_i^{*}\mathrm{d}\Omega\geqslant 0 \tag{8.27}$$

如果 F_i^0 为实际体积力，定义 $F_s=\frac{F_i}{F_i^0}$ 为安全系数，$\frac{F_i'}{F_i^0}=F_s'$ 和 $\frac{F_i^{*}}{F^0}=F_s^{*}$ 分别为可静解和可动解的安全系数，则由上式可得

$$F_s^{*}\geqslant F_s\geqslant F_s' \tag{8.28}$$

实际分析中往往以抗剪强度之比定义安全系数。设 c^0 和 φ^0 为实际抗剪强度指标，当它们降低到 c 和 φ 时土坡处于极限平衡状态，并设选用的可静应力场和可动应力场在滑动面上满足

$$\tau_s'=c+\sigma_n'\operatorname{tg}\varphi$$
$$\tau_s^{*}=c+\sigma_n^{*}\operatorname{tg}\varphi$$

这时，当式(8.17)和(8.18)以及(8.19)和(8.20)相减时，左边为零，考虑到 $(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(k)})e_{ij}\geqslant 0$，$(\sigma_{ij}^{*}-\sigma_{ij})e_{ij}^{*}\geqslant 0$ 和刚性滑动时 $\Delta v_i=\mathrm{const}$，可得

$$\int_{\Gamma 3}[(\tau_s-\sigma_n\operatorname{tg}\varphi)-(\tau_s'-\sigma_n'\operatorname{tg}\varphi)]\mathrm{d}\Gamma\leqslant 0$$
$$\int_{\Gamma 3}[(\tau_s^{*}-\sigma_n^{*}\operatorname{tg}\varphi)-(\tau_s-\sigma_n\operatorname{tg}\varphi)]\mathrm{d}\Gamma\leqslant 0$$

考虑到 $\tau_s=c+\sigma_n\operatorname{tg}\varphi$，并定义

$$F_s=\frac{c^0}{c}=\frac{\operatorname{tg}\varphi^0}{\operatorname{tg}\varphi} \tag{8.29}$$

$$F_s'=\int_{\Gamma 3}(c^0+\sigma_n'\operatorname{tg}\varphi^0)\mathrm{d}\Gamma\Big/\int_{\Gamma 3}\tau_s'\mathrm{d}\Gamma \tag{8.30}$$

$$F_s^{*}=\int_{\Gamma 3}(c^0+\sigma_n^{*}\operatorname{tg}\varphi^0)\mathrm{d}\Gamma\Big/\int_{\Gamma 3}\tau_s^{*}\mathrm{d}\Gamma \tag{8.31}$$

由上式可得

$$\int_{\Gamma 3}(c_0+\sigma_n'\operatorname{tg}\varphi^0)\left(\frac{1}{F_s}-\frac{1}{F_s'}\right)\mathrm{d}\Gamma\leqslant 0$$
$$\int_{\Gamma 3}(c_0+\sigma_n^{*}\operatorname{tg}\varphi^0)\left(\frac{1}{F_s^{*}}-\frac{1}{F_s}\right)\mathrm{d}\Gamma\leqslant 0$$

由此可得

$$F_s^{*}\geqslant F_s\geqslant F_s' \tag{8.28a}$$

潘家铮根据以上公式推论，对于给定的滑动面，必须寻找能得出最大安全系数的可静应力场；而在各种不同滑动面之中，必须寻找安全系数最小的一个[18]。

8.4.4 一般变分原理

当假定的可静应力场和可动速度场与实际相差较远时，则可静解与可动解之间相差也较大，虽然知道极限荷载介于两者之间，但究竟多大就难以确定。如果在求极限荷载的近似值时能同时考虑可静场与可动场的贡献，求得的极限荷载将大于可静荷载而小于可动荷载，从而更接近于真正的极限荷载。一般变分原理就是根据这一思想而发展起来的(参见第147页注)。为了不使篇幅过大，下面的介绍只针对第一类极限平衡问题。

基本定理 设 σ_{ij} 和 v_i 为任意可变的应力场和速度场，p_i^0 和 v_i^0 为给定的边界荷载和边界速度，并令*

$$I=\int_{\Omega}(\sigma_{ij}\dot{e}_{ij}-F_iv_i-f\dot{\gamma}_m)\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma 1}p_iv_i\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma 2}q_i(v_i-v_i^0)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma 3}c\Delta v_s\mathrm{d}\Gamma \tag{8.32}$$

* 这样的泛函不止一个。

则当 σ_{ij} 和 v_i 变为极限状态下的真正应力场和速度场时泛函

$$I=\int_{\Gamma 2} q_i v_i \mathrm{d}\Gamma \tag{8.33}$$

且其一次变分

$$\delta I=0$$

以上定理可以利用下列高斯定理证明

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\sigma_{ij}n_j v_i\mathrm{d}\Gamma \tag{8.34}$$

$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$。把此式代入式 (8.32) 并考虑沿 Γ_3 $\sigma_{ij}n_j$ 由 (τ_s,σ_n) 组成，v_i 由 $(\Delta v_t,-\Delta v_t\operatorname{tg}\varphi)$ 组成，可得

$$\begin{aligned}I=&\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}-F_i\right)v_i-f\dot{\gamma}_m\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma 1}(\sigma_{ij}n_j-p_i^0)v_i\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma 2}\sigma_{ij}n_i v_i\mathrm{d}\Gamma\\&-\int_{\Gamma 2}q_i(v_i-v_i^0)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma 3}(\tau_s-\sigma_n\operatorname{tg}\varphi-c)\Delta v_i\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{8.35}$$

当 σ_{ij} 和 v_i 变为真正应力场和速度场时，上式中右边除第三个积分外都为零，考虑到沿 Γ_2 面 $\sigma_{ij}n_j=q_i$，即得式(8.33)，同理对式(8.32)变分得

$$\begin{aligned}\delta I=&\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}F_i\delta v_i\mathrm{d}\Omega\\&-\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}f\delta\dot{\gamma}_m\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma 1}p_i\delta v_i\mathrm{d}\Gamma\\&-\int_{\Gamma 2}\delta q_i(v_i-v_i^0)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma 2}q_i\delta v_i\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma 3}c\delta\Delta v_i\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{8.36}$$

把前面 Gauss 定理中 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 换成 $\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$ 代入后可得

$$\begin{aligned}\delta I=&\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}-F_i\right)\delta v_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}-\dot{\gamma}_m\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega\\&-\int_{\Omega}f\delta\dot{\gamma}_m\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma 1}(\sigma_{ij}n_i-p_i^0)\delta v_i\mathrm{d}\Gamma\\&-\int_{\Gamma 2}\delta q_i(v_i-v_i^0)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma 2}(\sigma_{ij}-q_i)\delta v_i\mathrm{d}\Gamma\\&-\int_{\Gamma 3}(\tau_s-\sigma_n\operatorname{tg}\varphi-c)\delta\Delta v_i\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{8.37}$$

当 σ_{ij} 和 v_i 变为真正应力场和速度场时，上式中的每一项均为零，故 $\delta_I=0$。

折中定理 当 σ_{ij} 选用可静应力场 σ'_{ij}，v_i 选用可动速度场 v_i^* 时，代入式(8.32)所得的泛函以 $\tilde{I}$ 表示，则由下式求出的极限荷载的近似值 $\tilde{Q}$ 将取介于可静荷载 Q' 和可动荷载 Q^* 之间的折中值

$$\tilde{Q}=\frac{\tilde{I}}{\bar{v}} \tag{8.38}$$

即

$$Q'\leqslant\tilde{Q}\leqslant Q^* \tag{8.39}$$

$\bar{v}$ 为合力作用点的给定位移。

证明如下：考虑到 σ_{ij} 满足平衡方程和 Γ_1 上荷载边界条件，v_i^* 满足 Γ_2 上速度边界条件，且 $f'\leqslant 0$，$\tau'_s\leqslant c+\sigma'_n\operatorname{tg}\varphi$，由式(8.35)可得

$$\tilde{I}=\int_{\Omega}(-f'\dot{\gamma}_m^*)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma 2}q'_i v_i^0\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma 3}(\tau'_s-\sigma'_n\operatorname{tg}\varphi-c)\Delta v_i^*\mathrm{d}\Gamma\geqslant\int_{\Gamma 2}q'_i v_i^0\mathrm{d}\Gamma$$

而 $\int_{\Gamma 2} q_i' v_i^0 \mathrm{d}\Gamma = Q'\vec{v}$，上式两边除以 $\vec{v}$ 后得

$$\tilde{Q} \geqslant Q'$$

其次，考虑到 $\sigma_{ij}' \dot{\varepsilon}_{ij}^* \leqslant \sigma_m' \dot{\varepsilon}_v^* + \tau_m' \dot{\gamma}_m^*$，

$\sigma_m' = \frac{1}{2}(\sigma_x' + \sigma_z')$ 和 $\dot{\varepsilon}_v^* = \dot{\varepsilon}_x^* + \dot{\varepsilon}_z^*$ 分别为平均应力和体应变，因为只有当 σ_{ij}' 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 的主轴重合时两边才相等，则两边减去 $f'\dot{\gamma}_m^*$ 并注意到 $\dot{\varepsilon}_v^* = -\dot{\gamma}_m^* \sin\varphi$ 和 $f' = \tau_m' - (\sigma_m' + c\,\mathrm{ctg}\,\varphi)\sin\varphi$ 后可得

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^* - f'\dot{\gamma}_m^* \leqslant c\cos\phi\dot{\gamma}_m^*$$

而右边则根据可动应力场的定义等于 $\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*$，见式(8.5)。上式代入(8.32)，考虑到 Γ_2 上面 $v_i^* = v_i^0$ 得，

$$\tilde{I} \leqslant \int_\Omega (\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^* - F_i v_i^*)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma 1} p_i^0 v_i^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 3} c\Delta v_i^* \mathrm{d}\Gamma$$

利用 Gauss 定理

$$\tilde{I} = \int_\Omega \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} - F_i\right) v_i^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 1} (\sigma_{ij}^* n_j - p_i^0) v_i^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma 2} \sigma_{ij}^* n_j v_i \mathrm{d}\Gamma$$
$$- \int_{\Gamma 3} (\tau_s^* - \sigma_n^* \,\mathrm{tg}\,\varphi - c)\Delta v_i^* \mathrm{d}\Gamma$$

根据可动应力场的定义 $Q^*\vec{v} = \int_{\Gamma 2} \sigma_{ij}^* n_j v_i^0 \mathrm{d}\Gamma$，其它三项积分为 0，两边除以 v 后可得

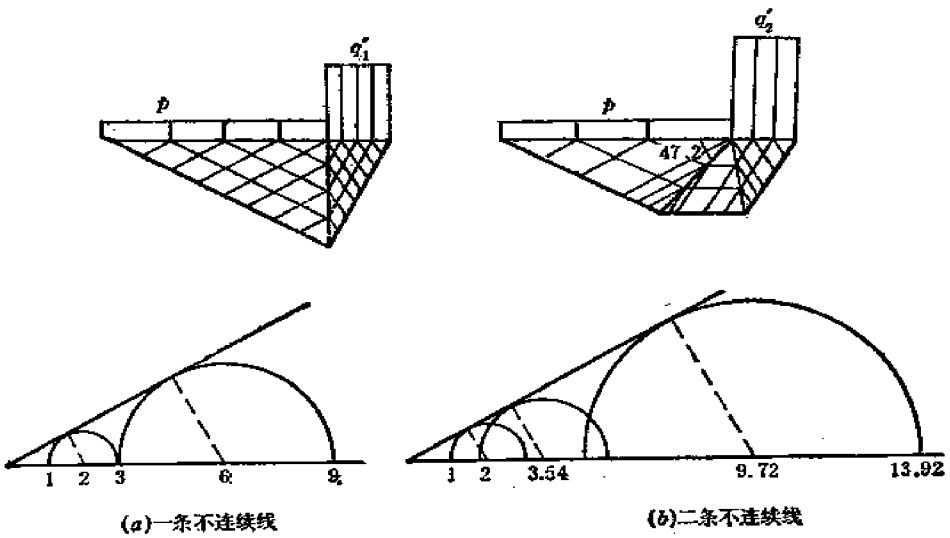
$$\tilde{Q} \leqslant Q^*$$

从而证明了式(8.39)。

为了进一步提高计算精度，可以选取下列形式的可变的可静应力场

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + \beta\Delta\sigma_{ij} \tag{8.40}$$

β 是一个可变的待定系数，把它代入式(8.32)后，$\tilde{I}$ 将是 β 的泛数。根据变分原理 $\delta I = 0$，



(a)一条不连续线　　(b)二条不连续线

图 8.8　可静应力场的不连续解法

可利用下列关系

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}=0 \tag{8.41}$$

求取 β，再代回到式(8.32)中求 $\tilde{I}$，则所得的 $\tilde{Q}=\tilde{I}/\vec{v}$ 将是式 (8.40) 所代表的一系列静力场中可能得到的最佳结果。

8.5 可静和可动解法

本节介绍构成可静解和可动解的几种方法。

8.5.1 不连续解法

利用应力不连续线构成可静解是一种常用的方法。设 ω 为应力不连续线的方向角，(σ_c^-, θ^-) 和 (σ_c^+, θ^+) 分别为该线两边低应力区和高应力区内包括凝聚压力 $c\operatorname{ctg}\varphi$ 在内的平均应力和大主应力方向角，则他们之间存在下列关系*

$$\omega=\theta^-+\delta^-=\theta^++\delta^+ \tag{8.42}$$

$$\sigma_c^+=\eta\sigma_c^- \tag{8.43}$$

其中

$$\left.\begin{matrix}\delta^-\\ \delta^+\end{matrix}\right\}=\operatorname{arc\,tg}\left[\left(1\pm\sqrt{1+\frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{tg}^2(\theta^+-\theta^-)}}\right)\frac{\operatorname{tg}(\theta^+-\theta^-)}{1+\sin\varphi}\right]$$

$$\eta=\left(\sqrt{1+\frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{tg}^2(\theta^+-\theta^-)}}+\sin\varphi\right)^2\frac{\sin^2(\theta^+-\theta^-)}{\cos^2\varphi}$$

对凝聚性土，$\varphi=0$，上式可简化为

$$\omega=\frac{1}{2}(\theta^-+\theta^+)\pm\frac{\pi}{4} \tag{8.42a}$$

$$\sigma_c^+=\sigma_c^-\pm 2c\sin(\theta^+-\theta^-) \tag{8.43a}$$

以地基极限平衡为例，如果不考虑自重，则图 8.8 之 a 和 b 就是两个可能的解答。设 $\varphi=30°$，则根据上述公式及 Mohr 应力圆可以推得

$$q_1'=9.0(p+\sigma_c)-\sigma_c;\quad q_2'=13.92(p+\sigma_c)-\sigma_c$$

当采用的不连续线数量继续增加时，所得的可静荷载逐步趋近于下列 Prandtl 的理论解

$$q=\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\exp(\pi\operatorname{tg}\varphi)(p+\sigma_c)-\sigma_c \tag{8.44}$$

而当 $\varphi=30°$ 时为 $q=18.40(p+\sigma_c)-\sigma_c$。

8.5.2 静力场叠加法

设 $(\sigma_x', \sigma_z', \tau_{xz}')$ 和 $(\sigma_x'', \sigma_z'', \tau_{xz}'')$ 是两个可静应力场，并令 $\sigma_x=\sigma_x'+\sigma_x''$，$\sigma_z=\sigma_z'+\sigma_z''$，$\tau_{xz}=\tau_{xz}'+\tau_{xz}''$，则很容易证明。

$$\sigma_m=\sigma_m'+\sigma_m'';\quad \tau_m\leqslant\tau_m'+\tau_m'' \tag{8.45}$$

且等号只有当两者的主应力方向相同时才成立(图 8.9)。其次，如果把 σ_c 当作虚拟的边界荷载，则由式(8.2)$\tau_m'\leqslant\sigma_m'\sin\varphi$；$\tau_m''\leqslant\sigma_m''\sin\varphi$，从而

$$\tau_m'\leqslant\sigma_m'\sin\varphi \tag{8.46}$$

故合成的应力场也为可静应力场。

应用叠加原理的最著名例子是 Terzaghi 的地基承载力公式[16]。设 σ' 为满足无重土体

* 沈珠江，不连续解在极限土压力计算中的应用(油印本)，南京水利科学研究所，1963

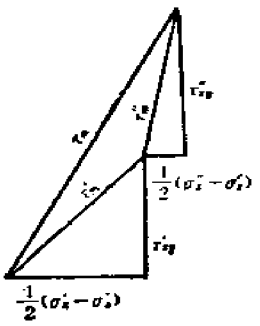


图 8.9 静力场的叠加

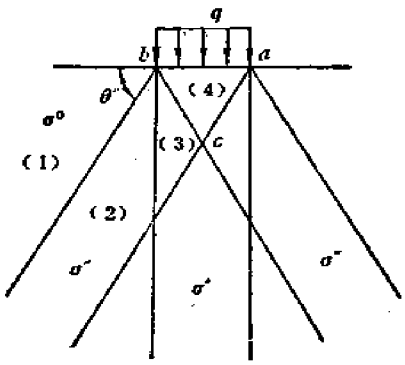


图 8.10 应力柱法

极限平衡的应力场，σ'' 为满足只有自重而无表面荷载和凝聚力的极限应力场，两者叠加得到的 σ 将自然满足平衡方程和应力边界条件和 (8.46)，而相应的极限荷载也将由两者叠加而成

$$q = -\sigma_c + (p + \sigma_c) N_1 + \frac{1}{2} \gamma B N_2 \tag{8.47}$$

N_1 和 N_2 为只与 φ 有关的系数，B 为基础宽。如果令 $N_p = N_1$，$N_c = (N_1 - 1)\operatorname{ctg}\varphi$，$N_\gamma = N_2$，上式即变为 Terzaghi 公式

$$q = pN_p + cN_c + \frac{1}{2}\gamma B N_\gamma \tag{8.48}$$

根据前面分析，如果 N_p，N_c 和 N_γ 都根据可静应力场算出，则 Terzaghi 公式将是一个可静解，但实际计算中 N_γ 往往是从可动解求得的。

应用叠加原理的另一个例子是应力柱法[17]。下面以图 8.10 的无重土体为例说明此法的基本思想。设边界上无荷载，$\sigma_z^0 = 0$，$\sigma_x^0 = 2c\cos\varphi/(1-\sin\varphi)$ 为满足边界条件的基本解，在其上叠加三个应力柱，柱内应力分别为 $\sigma_1' = 2c\cos\varphi/(1-\sin\varphi)$，$\sigma_3' = 0$，$\theta' = 90°$ 和 $\sigma_3'' = 0$ σ_1'' 及 θ'' 待定，而柱外的应力均为 0。根据图中(2)区及(3)区的叠加应力满足 Coulomb 屈服条件，可以求得 σ_1'' 和 θ'' 如下

$$\sigma_1'' = \frac{2c\cos\varphi(1+\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)^2}$$

$$\cos\theta'' = \frac{1}{2}(1+\sin^2\varphi)$$

由此可得(4)区内的叠加应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2c\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\cos^2\varphi\right) \\ q = \sigma_z &= \frac{2c\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}(3+\sin^2\varphi)\right] \end{aligned} \tag{8.49}$$

后者即为极限荷载的近似解，当 $\varphi = 30°$ 时 $q = 11.75\, c\operatorname{ctg}\varphi$，而精确解(8.44)为 $q = 17.40\, c\operatorname{ctg}\varphi$。当应力柱的数量不断增加时，所得的解将逐渐接近精确解。

8.5.3 虚平衡法

根据式(8.19)的虚功原理，对于某一选定的速度场可用下式计算可动荷载 Q^*

$$Q^* = \frac{1}{\bar{v}}\left[\int_\Omega \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma 3} (\tau_s^* \Delta v_t + \sigma_n^* \Delta v_n^*) d\Gamma - \int_{\Gamma 1} p v_i^* d\Gamma - \int_\Omega F_i v_i^* d\Omega\right] \quad (8.50)$$

但应用此式时必须先把速度场的具体值求出，相当麻烦。因为虚功原理与力的平衡条件是等价的，利用滑块平衡条件求可动荷载 Q^* 往往更为方便，而且还可用大家熟知的力矢图解法进行。下面仍以无重土地基为例来说明。

图 8.11 是 Prandtl 正确解的滑移线场，根据扇形 acd 上作用力对 a 点的力矩平衡条件，考虑到 cd 线上反力都通过 a 点(凝聚压力 $c\,\mathrm{ctg}\,\varphi$ 当作外荷载后按无凝聚性土处理)，可得

$$\sigma_n'' = \sigma_n' \exp(\pi\,\mathrm{tg}\,\varphi) \quad (a)$$

而根据滑块 ade 和 abc 的平衡条件，考虑滑移线上 $\tau_s = \sigma_n\,\mathrm{tg}\,\varphi$，可得

$$\sigma_n' = (p + \sigma_c)(1 + \sin\varphi) \quad (b)$$

$$q + \sigma_c = \sigma_n'' \frac{1}{1 - \sin\varphi} \quad (c)$$

前两式代入第三式后，即得式(8.44)的 Prandtl 解。

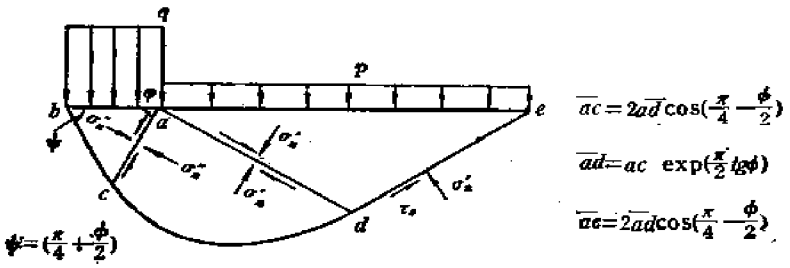


图 8.11 虚平衡法——Prandtl 解

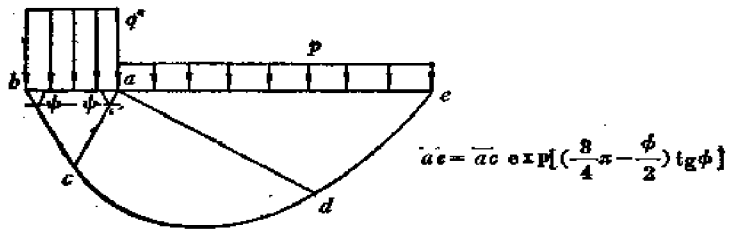


图 8.12 虚平衡法——可动解

当选用的可动速度场不正确时，由此求解的 q^* 将大于式(8.44)的值。例如图 8.12，假定滑动面中 cde 一段为对数螺线，则根据围绕 a 点的力矩平衡可得

$$\sigma_n'' = (p + \sigma_c)\exp(1.5\pi - \varphi)$$

从而

$$q^* = \frac{p + \sigma_c}{1 - \sin\varphi} \exp[(1.5\pi - \varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi] - \sigma_c \quad (8.51)$$

当 $\varphi = 30°$ 时，$q^* = 20(p + \sigma_c) - \sigma_c$。

显然，此时土体并不真的处于极限平衡状态，因而称为虚平衡法。另外，不能把整个 $bcde$ 当

作对数螺线，因为此时边界 ab 将围绕 a 点转动而不是平移，从而不满足给定速度边界条件。

8.5.4 滑块单元法

如果在滑动土体中象有限元法一样划成许多小块，建立其平衡和运动方程，则最后可以归并成线性代数方程组并利用计算机求解。根据这一思想，有人建议了下列滑块(运动)单元法[18]。

设 i 为某一单元 e 的一边，e_i 为边长，α_i 为其外法线方向角，R_i 和 u_i 分别为作用其上的有效应力合力和孔隙压力，考虑到

$$N_i = R_i \cos\phi,\ S_i = R_i \sin\phi,\ C = ce_i$$

根据力的平衡可得

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}(-R_i\sin(\alpha_i+\varphi) - C\cos\alpha_i - u_i\sin\alpha_i) + X_e = 0\\ \sum_{i=1}^{4}(R_i\cos(\alpha_i+\varphi) - C\sin\alpha_i + u_i\cos\alpha_i) + Z_e = 0\end{aligned}\right\} \tag{8.52}$$

或写为

$$[k_{\alpha\varphi}]_e\{R\}_e + \{F\}_e = 0 \tag{8.52a}$$

其中

$$\{R\}_e = \{R_h,\ R_i,\ R_j,\ R_k\}$$

$$[k_{\alpha\varphi}]_e = [\{k_h\},\ \{k_i\},\ \{k_j\},\ \{k_k\}]$$

$$\{k_i\}^T = \{-\sin(\alpha_i+\varphi),\ \cos(\alpha_i+\varphi)\}$$

$$\{F\}_e = \{F_c\} + \{F_u\} + \{F_b\}$$

$$\{F_c\} = \Sigma\{F_{ci}\}$$

$$\{F_{ci}\} = \{-C\cos\alpha_i,\ -C\sin\alpha_i\}$$

$$\{F_u\} = \sum\{F_{ui}\}$$

$$\{F_{ui}\} = \{-u_i\sin\alpha,\ u_i\cos\alpha\}$$

$$\{F_b\}^T = \{X_e,\ Z_e\}$$

对上述单元方程迭加形成总体方程，由此可解出各单元间作用力，最后得到极限荷载(可动荷载)

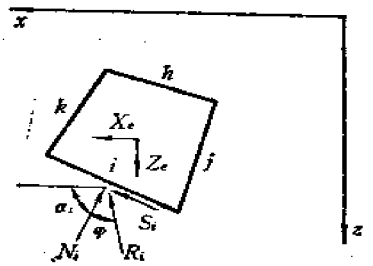


图 8.13 滑块单元法

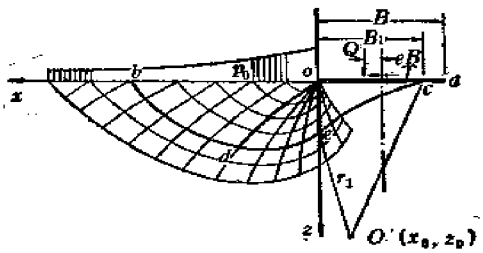


图 8.14 刚性基础下的地基极限平衡

8.6 地基极限承载力

8.6.1 一般解法

本节介绍刚性基础下地基极限平衡问题的一般解法。已知表面 ob 上荷载分布 p_0，另一部分表面 oa 以某种方式作刚性运动，要求出引起这种运动的荷载(图 8.14)。

先在地基中划分 obd，ode 和 oec 三个塑性区，求解静力场。ob 不是一条特征线，而其中的应力分布已知，故解 Cauchy 问题，即可得 obd 区内应力分布。其次，在 ode 区内特征线 od 上应力分布已知，o 点本身系另一条特征线收缩到一点而成，故解 Goursat 问题即可求得 ode 区内应力分布。最后，oec 区则是静不定问题，因为人们只知道特征线 oe 上的应力分布，故必须求助于运动边界条件。排除基础沿地表滑动的情况，则当刚性基础运动时，oce 区内土体也必然跟着一起作刚性运动，因此 ec 线必须是对数螺线或直线。决定对数螺线 ec 的位置需要三个参数，即 e 点的 (x, z) 坐标和 e 点至转动中心 o' 的距离。当 ec 线决定后，沿此线对式 (8.10) 中第二组特征线方程积分，即可求得此线上应力分布，下一步就是再解 Goursat 问题，求得整个 oec 区内应力分布及接触面 oa 上的荷载分布。

运动分析按相反方向进行，因为已知 oec 作刚性运动，所以 oe 线上速度分布马上可以得出。其次，bde 是特征线，沿此线对式(8.15)中第二组方程积分，即可求得沿此线的速度分布，然后对 ode 区和 obd 区两次求解 Goursat 问题，即可求得整个速度场。但是，人们对破坏时的速度场并不感兴趣，所以这一项分析不必进行。

决定对数螺线的位置需三个参数，相应地求得的极限荷载也有三个参数，垂直分量 Q，水平分量 T 和偏心距 e。对于 p 为均布荷载的无重散粒体，沈珠江求解了 Q，T 和 e 的解析解[5]，对 $\varphi=30°$ 情况用曲线表示如图 8.15。图中虚线左边代表偏心距较大时滑动区只限于基础底下一部分，即 ac 与地面脱开的情况。当考虑土体自重时，必须用特征线法求数值解。图 8.16 就是这样的算例，其中假定底板与土的摩擦角 φ_a 也为 30°，因而，滑动线在 c 点与底板相切。当偏心距小于零，即合力移到对称轴右边时，转动中心 o' 可能移到地面以上。平面滑动，即转动中心位于无穷远处，是一个特例。当 $T=0$ 和 $e=0$ 时，即得到垂直中心荷载下地基极限平衡的情况(图 8.17)。

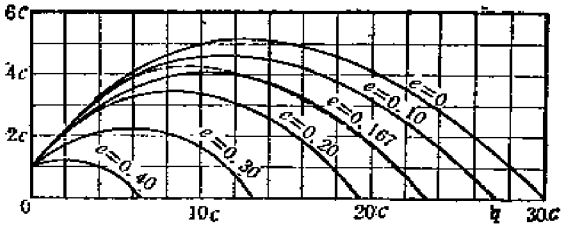


图 8.15 水平荷载下无重土体的极限承载力

8.6.2 应用极值原理的近似解法

以图 8.16 的算例来说明极大极小原理的应用。

作为可静解，选用图 8.18 的可静应力场，其中 oe 为一条应力不连续线，线左边为高塑性应力区或常说的被动土压力区，由此可以推算出 oe 线上的应力分布，然后假定 ec 线为滑动线，根据力的矢量平衡求出 oc 面上的可静荷载分量 Q' 和 T'，偏心矩 e 可按力的作用点位于 oc 的中点考虑，随着选用的不连续线 oe 的倾斜度不同，得出的 Q' 与 T' 之比将不同。针对图(8.16)的例子，当 Q' 也为 $17.7\,cB$ 时，$T'=5.4cB$。

可动解的速度场采用无重土的精确解速度场，即假定滑动线由一段直线和两段对数螺线组成，如图(8.19)的虚线。把此速度场代入式(8.19)经积分后可求出

$$\int_{\Gamma 2} q_i^* v_i \mathrm{d}\Gamma = Q^* v_x + T^* v_z \tag{8.53}$$

v_x 和 v_z 为合力作用点的速度。为了使求得的可动解接近真正解，必须假定不同的转动中心位置 $o'(r_0, \theta_0)$，以 T^* 最小者为准。当 $Q^*=17.7cB$ 时，如此得出的 $T^*_{\min}=6.50cB$。而前面特征线法求得的数值解为 $T=6.46cB$，可见 $T'<T<T^*$，而且 T^* 比 T' 更接近于 T。

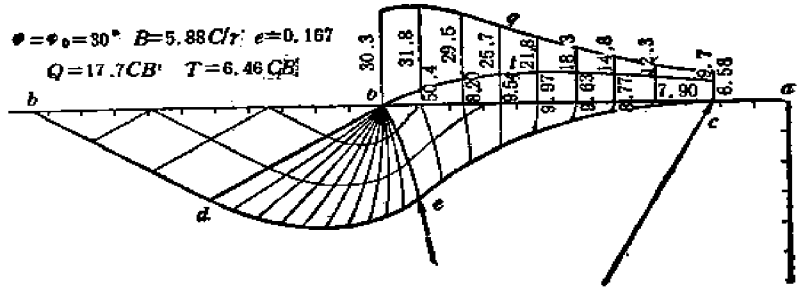


图 8.16 有重土体算例

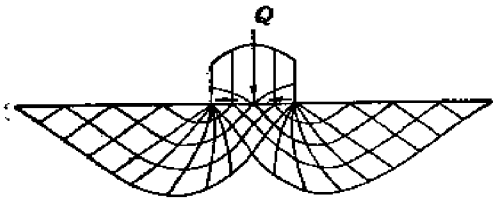


图 8.17 垂直中心荷载

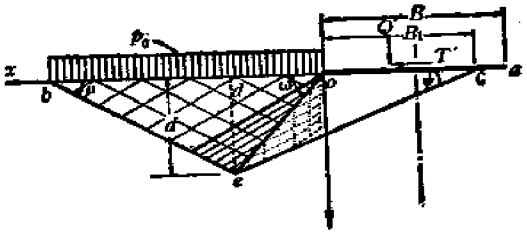


图 8.18 可静应力场

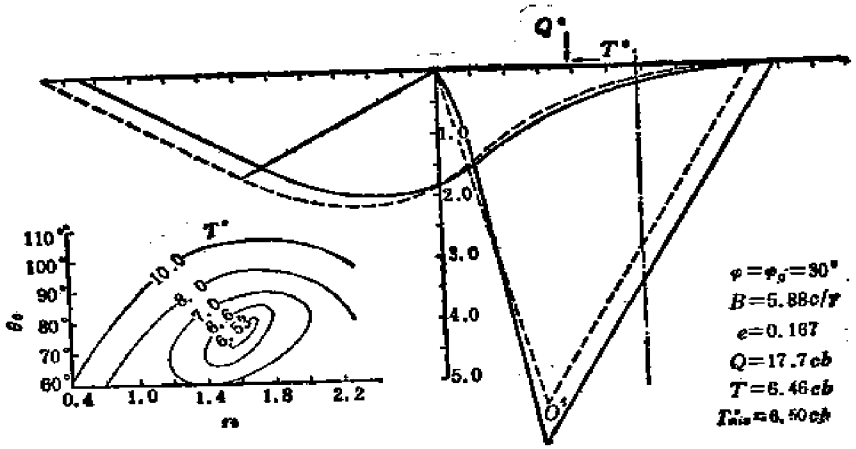


图 8.19 可动应力场

8.6.3 饱和粘土地基的极限承载力

在排水条件下饱和粘土的抗剪强度公式中也有相当大的内摩擦角，按正交流动法则也将得出大量的剪胀应变，这就与实际情况相差太远了。为了能把极限平衡理论用于这类土体，沈珠江建议把它看作不均质的纯凝聚体[20]，即把屈服条件改为

$$f=\tau_m-(c+\sigma_m \operatorname{tg}\varphi)=0 \tag{18.54}$$

式中 φ 和 c 与习惯所用的有效内摩擦角 φ' 和凝聚力 c' 略有差别(图 8.20)，σ_m 则是破坏以前设计状态下的平均有效应力，是已知坐标(x, z)的函数，或者说其合成的凝聚力或抗剪强度 $\tau_f=c+\sigma_m \operatorname{tg}\varphi$ 是坐标的函数，从而把饱和粘土的破坏问题归结为非均质凝聚材料的极限平衡问题。

此时，相应的应力场和速度场的特征线方程将为

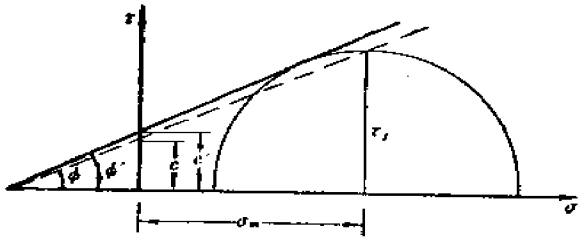


图 8.20 饱和土的抗剪强度

沿第一组特征线

$$\alpha=\text{const}$$

$$\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\quad d\sigma_m+2\tau_f d\theta=(xdx+zdz)-\frac{d\tau_f}{ds_\alpha}ds_\beta$$

$$dv_\beta+v_\alpha d\theta=0 \tag{8.55a}$$

沿第二组特征线

$$\beta=\text{const}$$

$$\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\quad d\sigma_m-2\tau_f d\theta=(xdx+zdz)+\frac{d\tau_f}{ds_\beta}ds_\alpha$$

$$dv_\alpha-v_\beta d\theta=0 \tag{8.55b}$$

把上式写成差分形式，则当点①的 x_1、z_1，$(\sigma_m)_1$和 θ_1 与点②的 x_2，z_2，$(\sigma_m)_2$，θ_2 已知时，k 点的坐标和应力函数$(\sigma_m)_k$，Q_k 可按下式计算：

$$\left.\begin{aligned}
z_k&=z_1+\operatorname{tg}\left(\theta_1+\frac{\pi}{4}\right)(x_k-x_1)\\
z_k&=z_2+\operatorname{tg}\left(\theta_2-\frac{\pi}{4}\right)(x_k-x_2)\\
\theta_k&=\left(\tau_{f1}\theta_1+\tau_{f2}\theta_2+\frac{A-B}{2}\right)\Big/(\tau_{f1}+\tau_{f2})\\
(\sigma_m)_k&=[2\tau_{f1}\tau_{f2}(\theta_1-\theta_2)+A\tau_{f2}+B\tau_{f1}]/(\tau_{f1}+\tau_{f2})
\end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

其中

$$A=(\sigma_m)_1+\left(\frac{\partial\tau_f}{\partial z}\right)_1(x_k-x_1)+\left[z-\left(\frac{\partial\tau_f}{\partial x}\right)_1\right](z_k-z_1)$$

$$B=(\sigma_m)_2-\left(\frac{\partial\tau_f}{\partial z}\right)_2(x_k-x_1)+\left[z-\left(\frac{\partial\tau_f}{\partial x}\right)_2\right](z_k-z_2)$$

上式中未考虑水平惯性力 X。

具体计算时，地基中设计状态下的平均有效应力分布以 $M\cdot N$ 个网格点方式输入，然后用内插公式求特征线交点处的 σ_m，τ_f，$\frac{\partial\tau_f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\tau_f}{\partial z}$。

8.6.4 算例及程序

图 8.21 的算例取自文献[22]。假定表层深为 1/4 基础宽度的范围内地基的天然强度 $\tau_{f0}=10$ kPa 为常量，以下随深度线性增加，增加比为 $\tau_f/p=0.4$，p 为自重压力。取侧压力系数 $K_0=0.7$，则平均自重应力为 $\sigma_{m0}=0.8p$，因而摩擦系数 $\operatorname{tg}\varphi=0.5$。设地基在基础荷载 50 kPa 下完全固结，用弹性理论计算固结荷载引起的平均附加固结压力 $\Delta\sigma_m$。因而总的有效固结压力将为 $\sigma_m=\sigma_{m0}+\Delta\sigma_m$。用这样的 σ_m 输入后(见图中网格点上的数字)，算得的极限荷载的平均值为 107.45 kPa。原文用圆弧法求得的极限荷载为 126.5 kPa，最危滑

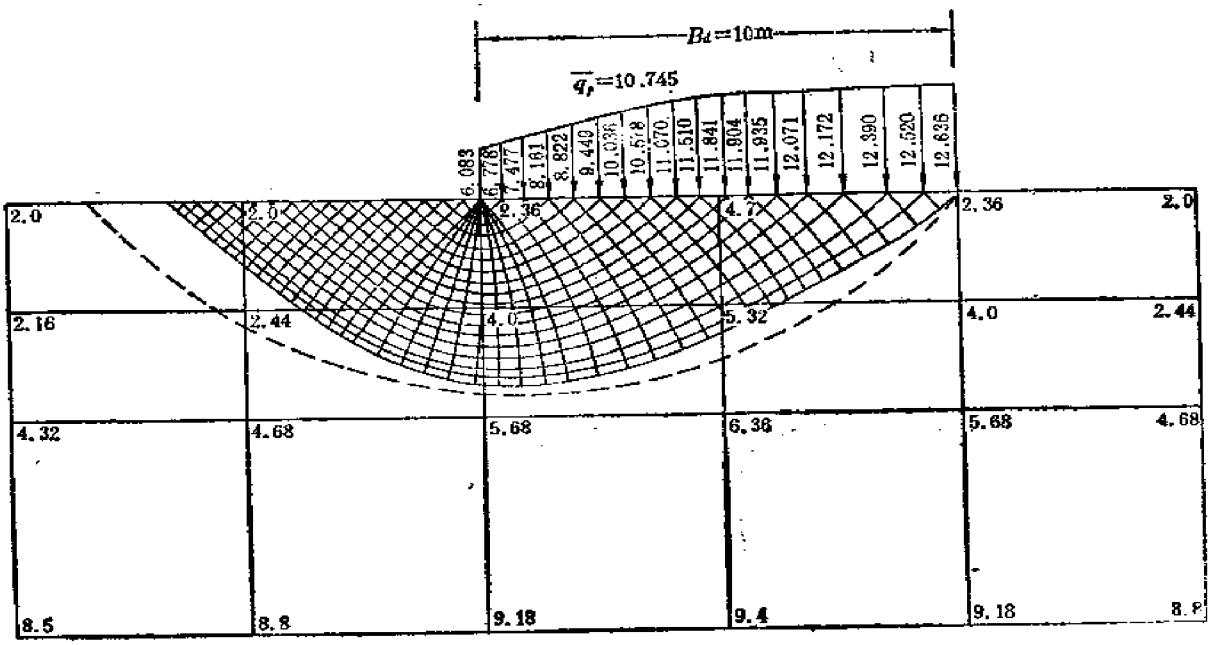


图 8.21 饱和粘土地基算例

弧的位置如图中虚线。正如预料，后者大于前者，因为前者是可静解，后者是可动解。

下面介绍求解式(8.56)的程序段落(系根据文献[21]改写)。

P.8.1 特征线法求解饱和粘土极限荷载程序

【功能】 找出两个已知点的 x, z, σ_m, θ，调用子程序 TP 和SWP求 x_k, z_k, $(\sigma_m)_k$, θ_k，然后再取①点与 k 点或②点与 k 点的平均值 $\bar{\tau}_f$, $\overline{\frac{\partial \tau_f}{\partial x}}$, $\overline{\frac{\partial \tau_f}{\partial z}}$ 进行第二次计算，并把计算结果存入相应数组，以便转入下一点的计算。

子程序TP——根据周围四个结点的已知有效应力 $(\sigma_m)_i$，利用内插公式 $\sigma_m=\sum_{i=1}^{4}N_i(\sigma_m)_i$ 求该点的 σ_m，N_i 为矩形单元的形状函数，并根据 $\tau_f=c+\sigma_m \operatorname{tg}\varphi$ 求出 τ_f 及偏导数 τ_{fx} 和 τ_{fz}。

子程序 SWP——根据已知的第①点和第②点的 x_1, z_1, $(\sigma_m)_1$, θ_1 和 x_2, z_2, $(\sigma_m)_2$, θ_2 按公式(8.56)求交点的 x_k, z_k, $(\sigma_m)_k$, θ_k。

【标识符】

C, F, G——土的凝聚力，摩擦系数 $\operatorname{tg}\varphi$ 和容重

X0, Z0, S0——输入的网格线的 x、z 坐标及其交点处的平均有效应力

T, TX, TZ——τ_f, $\frac{\partial \tau_f}{\partial x}$, $\frac{\partial \tau_f}{\partial z}$

X, Z, S, W——特征线交点处的 x, z, σ_m 和 θ，足标 I 代表已知的第一点，J 代表第二点，K 代表要求的点

```
      SUBROUTINE CHARAC
      COMMON I,J,XI,XJ,XK,ZI,ZJ,ZK,
     * TI,TJ,TK,TXI,TXJ,TXK,TZI,TZJ
     * ,TZK,SK,WK/A1/X(20,60),Z(20,
     * 60),S(20,60,),W(20,60)
      X1=X(I-1,J)
      Z1=Z(I-1,J)
      S1=S(I-1,J)
      W1=W(I-1,J)
      X2=X(I,J-1)
      Z2=Z(I,J-1)
      S2=S(I,J-1)
      W2=W(I,J-1)
      CALL TP(XI,ZI,TI,TXI,TZI)
      CALL TP(XJ,ZJ,TJ,TXJ,TZJ)
C
C        FIRST ITERATION
C
      CALL SWP
      CALL TP(XK,ZK,TK,TXK,TZK)
      W1=(WI+WK)/2.
      W2=(WJ+WK)/2.
      TI=(TI+TK)/2.
      TJ=(TJ+TK)/2.
      TXI=(TXI+TXK)/2.
      TXJ=(TXJ+TXK)/2.
      TZI=(TZI+TZK)/2.
      TZJ=(TZJ+TZK)/2.
C
C       SECOND ITERATION
C
      CALL SWP
      X(I,J)=XK
      Z(I,J)=ZK
      S(I,J)=SK
      W(I,J)=WK
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TP(X,Z,T,TX,TZ)
      COMMON /R/C,F,G/A2/XO(20),
     * ZO(20),SO(20,20)
      IP=0
10    IP=IP+1
      IF(X.GT.XO(IP)) GOTO 10
      IQ=0
20    IQ=IQ+1
      IF(Z.GT.ZO(IQ)) GOTO 20
      S1=SO(IP-1,IQ-1)
      S2=SO(IP,IQ-1)
      S3=SO(IP,IQ)
      S3=SO(IP-1,IQ)
      X1=XO(IP-1)
      X2=XO(IP)
      Z1=ZO(IQ-1)
      Z2=ZO(IQ)
      A=(X2-X1)*(Z2-Z1)
      T=C+F*((X2-X)*(Z2-Z)*S1+
     * (X-X1)*(Z2-Z)*S2+(X-X1)*
     * (Z-Z1)*S3+(X2-X)
     * *(Z-Z1)*S4)/A
      TX=F*((Z2-Z)*(S2-S1)+
     * (Z-Z1)*(S3-S4))/A
      TY=F*((X2-X)*(S4-S1)+
     * (X-X1)*(S3-S2))/A
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SWP
      COMMON I,J,XI,XJ,XK,ZI,ZJ,ZK,
     * TI,TJ,TK,TXI,TXJ,TXK,TZI,TZJ
     * ,TZK,SK,WK/R/C,F,G
      IF(ABS(WI-0.7854).LT.1.0E-4)
     * W=0.7854+SIN(W1-0.7854)*1.0E-4
      A=TAN(W1+0.7854)
      B=TAN(W2-0.7854)
      XK=(A*XI-B*XJ-ZI+ZJ)/(A-B)
      YK=(A*B*(XI-XJ)-ZI*B+ZJ*A)/(A-B)
      A=SI+TZI*(XK-XI)+(G-TXI)*(ZK-ZI)
      B=SJ-TZJ*(XK-XJ)+(G+TXJ)*(ZK-ZJ)
      SK=(2.*TI*TJ*(WI-WJ)+A*TJ+B*TI)
     * /(TI+TJ)
      WK=(TI*WI+TJ*WJ+(A-B)/2.)/(TI+TJ)
      RETURN
      END
```

8.7 极限土压力

8.7.1 经典土压力理论

Rankine 和 Coulomb 土压力理论是大家所熟知的，先从极限分析的观点讨论这两个经典土压力理论。

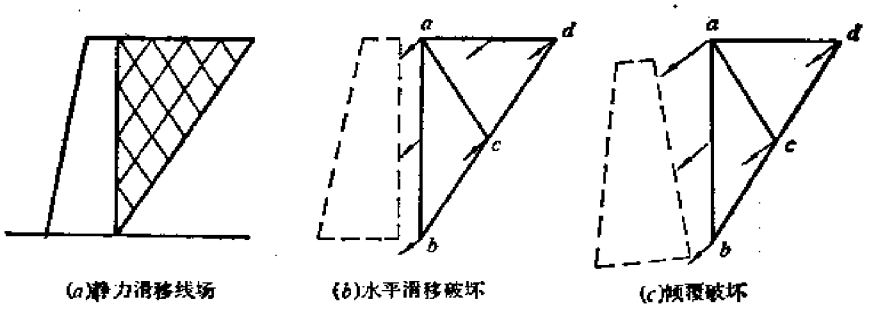
按照 Rankine 理论，对于水平土面、光滑垂直墙背，墙后的应力分布为

$$\sigma_z=\gamma z,\ \sigma_x=K_a\gamma z,\ \tau_{xz}=0$$

上述应力场满足静力平衡条件和破坏准则，因而是可静应力场。然而，上述解答正确与否，还要看是否存在满足运动边界条件的速度场。墙的可能破坏方式有三种：①墙位于坚实地基上，因而只能水平滑移；②地基土质较差，墙身绕地基中某一点倾复（见上节水平荷重下地基的极限平衡）；③墙顶受到支撑，底部位移大于顶部（图 8.22）。对于前面两种情况，可

以通过运动分析求得相应的速度场。具体的解法是先对 abc 区求解混合问题，因为 bc 是特征线，其上的速度分布可以根据 b 点的边界条件积分而得，另一条非特征线 ab 上已知水平位移，即式(13)中 v_α 与 v_β 之间的关系已知。其次是 acd 区，由于 ac 和 cd 两特征线上速度分布均已知，故解 Goursat 问题即可。但是对第三种墙运动情况，将得不到相应的速度场，因而 Rankine 理论不再正确。

Coulomb 土压力理论假定滑动面后用虚平衡法求解墙上的土压力，因而是一种可动解法，而且也只适用于墙身平移和向前倾覆的破坏方式。



(a)静力滑移线场 (b)水平滑移破坏 (c)倾覆破坏

图 8.22 挡土墙的运动方式

8.7.2 复杂边界条件下的不连续解

当光滑边界上给定的速度或荷载不连续时，或边界形状本身不连续(折线边界)时，必然会出现应力不连续线。

不连续线两边的静力关系见式(8.42)和(8.43)。至于运动关系，因为应力不连续线系由刚性区缩减到极限而成，则应当把它看作不能伸长的软线，即沿此线的切向速度变化 $\mathrm{d}v_x\cos\omega+\mathrm{d}v_y\sin\omega=0$，由此可得下列应力不连续线的运动条件。

$$\begin{aligned}&\sin(\theta+\mu-\omega)\mathrm{d}v_\alpha-\sin(\theta-\mu-\omega)\mathrm{d}v_\beta\\&=[-v_\alpha\cos(\theta+\mu-\omega)+v_\beta\cos(\varphi-\mu-\omega)]\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{8.57}$$

其中 v_α 和 v_β 为沿特征线方向的速度分量。对纯凝聚体上式变为

$$\mathrm{d}v_\alpha-\mathrm{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}-\omega\right)\mathrm{d}v_\beta=\left[v_\alpha\mathrm{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}-\omega\right)+v_\beta\right]\mathrm{d}\theta\tag{8.57a}$$

下面用前述古典土压力理论无法解决的问题，即挡土墙上部受到支撑的情况为例，说明不连续解的应用，其它边界不连续问题可以举一反三地求解*。如图 8.23，设挡土墙上、下两段以不同方式运动，下段 ob 向外移动，上段 ao 不动或向内移动。显然，分界点 o 上的速度不连续必然导致该点上极限土压力分布的不连续，因此，必然有一条从 o 点出发的应力不连续线 od 存在。这条线还必须伸向土面，而不能伸向速度不连续线 bd，因为该线上的应力必须连续。此外，设土面上的荷载分布是连续的，应力不连续线还必须与土面相切。显然，本问题不能光依靠静力分析求解，因为 od 线以下的应力场完全取决于此线的位置，而后者又取决于墙面 ob 上的速度边界条件。因此，正确的解法必须同时求解静力方程和运动方程。但是，这样的一般解法由于数学处理上的困难无法实行，实际求解时只能求助于逆算法，即先假定 od 线的位置，然后进行相应的静力和运动分析，求得墙面 ob 上的压力分布和速度分

* 见 8.5.1 脚注。

布。如果这样求得的速度分布满足预定的边界条件，所得的解便是正确的，否则就要修改 od 线的位置，重新求解。具体解法如下。

不连续线 od 以上的应力场可根据一般方法求得。如果土面上承受均布荷载 p，且墙面 oa 绝对光滑，则此区即为高塑性应力区（被动土压力区），即 $\sigma_\sigma^+ = p + c\,\mathrm{ctg}\,\varphi/(1-\sin\varphi)$，$\theta^+ = 0$，然后根据假定的 od 线的方向角 ω，按式(8.42)和(8.43)求得此线下面的低塑性应力状态 $(\sigma_\sigma^-, \theta^-)$。因为 od 线不是特征线，解 Cauchy 问题可以求解 ocd 区内应力场，然后根据 oc 线上应力分布和 o 点的奇点性质，解 Gaursat 问题，求得 ocg 区内应力场，最后根据 og 线上的应力分布和墙面 ob 上的边界条件，例如给定的墙摩擦角，解混合问题，即可求得 obg 区内的应力场和墙上的极限压力分布。

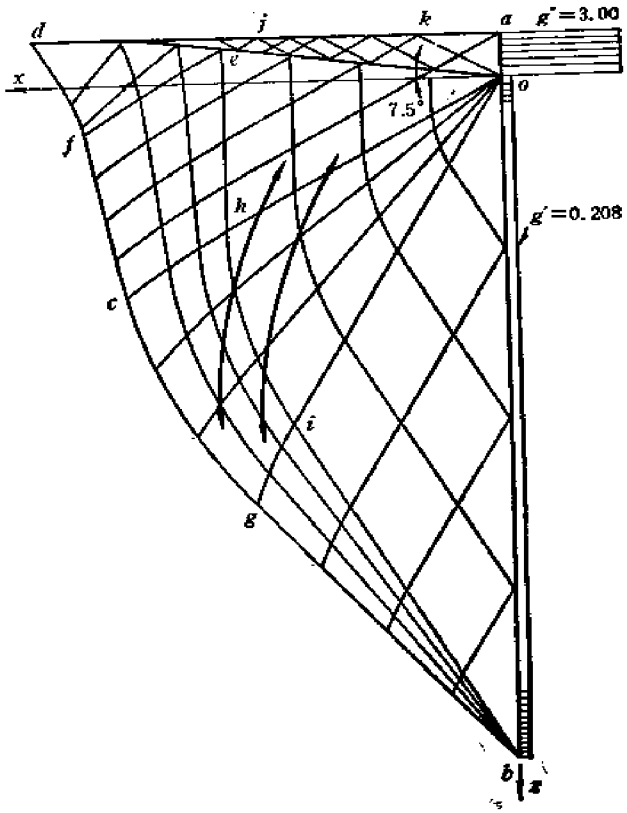


图 8.23 上端固定墙上的土压力

进行动态分析时，必须先求得 bd 线上的速度分布，bd 线是速度不连续线，线上 $v_n = 0$，从而根据塑性流动方程式(8.15)之二，可得

$$v_\alpha = v_b \cos\varphi \exp[-\mathrm{tg}\,\varphi(\theta - \theta_b)] \quad (8.58)$$

式中 v_b 和 θ_b 代表 b 点的速度和大主应力方向角。这样，根据 bd 线上的速度分布和 od 线上的刚性移动条件 (8.57)，解混合问题，可以求出 ocd 区的速度场。然后根据 bc 和 oc 线上的速度分布，解 Gaursat 问题，求得 ocb 区内和墙面 ob 上的速度分布。后者必须满足预定的边界条件。

图 8.23 是一个无重土体的算例。假定墙面光滑，墙上的应力分布将是均匀的，相应地 oeh 和 oib 区内的应力场也是均匀的，不连续的 oe 段将是直线，其方向角 ω_0 与墙段 ob 与 oa 之比有关。取 $\omega_0 = 7.5°$，按照前面的方法，求解 oeh 区、oih 区和 oib 区的应力场，得出 ob 面上的土压力如下

$$q^- = 0.208(p + c\,\mathrm{ctg}\,\varphi) - c\,\mathrm{ctg}\,\varphi \quad (8.59)$$

至于应力不连续线的曲线段 ed 和滑动边界 $bgcfd$ 的位置，则可按下列办法确定。由于 b 点也是特征线退化的奇点，当 $bihe$ 上的应力分布已知时，解 Gaursat 问题，可得 bef 区内的应力场，至于最后的 def 区内的应力分布和不连续线 ed 的确定，就比较复杂。因为 ef 线上应力已知，ed 线上已知 ω，σ_σ^- 和 θ^- 之间的关系，如式(8.42)和(8.43)，原则上是求解混合问题，具体计算时需用试算法，即先假定 θ^-，从式(8.42)和(8.43)求出 ω 和 σ^-，然后从特征线 ef 出发引出另一特征线，根据此线与 de 线在交点处有 $(\sigma_\sigma)_M = (\sigma_\sigma^-)_M$，解混合问题，求出 M 点的坐标及 θ_M^- 值(图 8.4)。此 θ_M^- 应与原先假定的 θ^- 相等，否则重新假定 θ^- 重复计算。如此绘成 def 区内的特征线网，求得 d 点的位置。整个 bed 区的范围是根据 d 的不连

续线必须与土面相切的条件决定。然后从 d 点作一水平线 ad 即得上段墙高 oa，显然 ω_0 取得大一些，oa 段高相应增加。

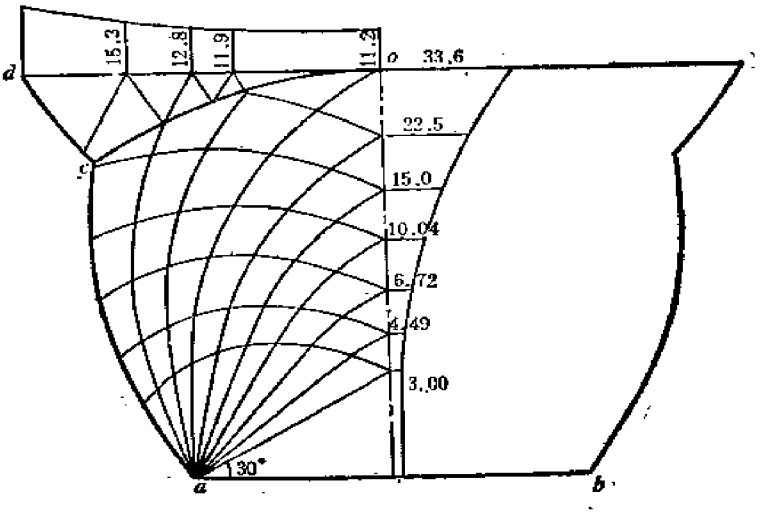


图 8.24 底孔盖板上土压力

动态分析完全按前面方法进行。分析结果表明，此例相适应的边界条件是墙段 ob 作向外平行移动，同时 oib 区和 $ohejk$ 区作刚性移动，而且当 oa 不动时，后者与 oak 区的速度不一样，故 ok 线也是一条速度不连续线。

图 8.23 中所画的箭头为大主应力方向，表明下段墙上的一部分土压力沿着这样的方向传给上部刚性支承端，这就是所谓的拱作用。图 8.24 为涵管上土压力或土从孔口挤出问题的不连续解，是拱作用的另一个例子。此例中孔顶 ab 向下移动，一部分土压力向刚性的两侧传递，oc 为应力不连续线。计算中先假定孔顶压力已知（等于 1），反求土面 od 上的荷载分布。如假定 od 面上荷载已知，欲求 ab 面上极限压力，则要用试算法。

8.7.3 极值原理应用

上述精确解法用于实际土体的计算几乎是不可能的，此时最好还是求助于极值原理的近似解法，下面举上端固定的挡土墙为例说明之。

建议的可静解如图 8.25*a* 所示，下段墙上的可静压力可以按下列 Rankine 主动土压力公式计算

$$Q=\frac{1}{2}\gamma(H+2D)HK_a$$

作为可动解，建议如图 8.25*b* 所示，把滑动土体分成四块，其中楔形体 oce 为变形区，其他均为刚性移动区。可动压力 Q^* 可用图解法计算，如图 c。为了求得最小的可动压力 Q^*_{min}，需要变动楔形区的夹角 θ。根据极值原理，真正的极限压力大于可静压力而小于可动压力，即

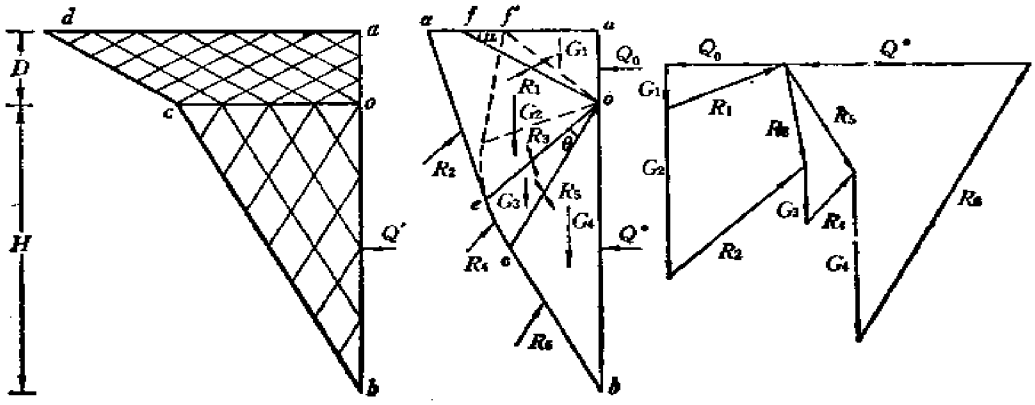
$$-Q'<-Q<-Q^*_{min}$$

或

$$Q^*_{min}<Q<Q'$$

负号表示主动土压力对土体所作的是负功。

利用这一方法对 $\varphi=30°$ 和 $H=4D$ 的情况进行计算，得



(a)静力场 (b)滑动场 (c)力矢图

图 8.25 上部固定墙的近似解法

$$\left.\begin{aligned} Q' &= 0.25\gamma H^2 \\ Q^*_{\min} &= 0.20\gamma H^2 \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

如果取 $Q=\frac{1}{2}(Q'+Q^*_{\min})=0.225\gamma H^2$，其精度为 ±10%。

8.7.4 阻滑桩土压力

前面讨论的都是垂直截面上的滑动问题。对于阻滑桩，可以切一水平平面而讨论土绕过桩滑动时作用于单位桩长上的土压力。此时，由于重力与所讨论的截面垂直，土体就可以当作无重体看待，在这样的条件下，进一步假设桩表面绝对粗糙，且桩的间距较大，忽略其相互作用，沈珠江推得土体绕过矩形桩(图 8.26)和圆形桩(图 8.27)滑动时单位桩长上的绕流压力公式如下[26]

$$Q=\left[\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi}}{1-\sin\varphi}-\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi}}{1+\sin\varphi}\right](p_0+\sigma_c)A+2\operatorname{tg}\varphi(p_0+\sigma_c)B \tag{8.61}$$

和

$$\begin{aligned} Q=\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi}}{4\operatorname{tg}^2\varphi+1}\Bigg\{e^{\pi\operatorname{tg}\varphi}\Big[&3\operatorname{tg}\varphi\sin\mu+(2\operatorname{tg}^2\varphi-1)\cos\mu \\ &+\frac{4\operatorname{tg}^2\varphi+1}{1-\sin\varphi}\cos\varphi\Big]+\Big[3\operatorname{tg}\varphi\cos\mu-(2\operatorname{tg}^2\varphi-1)\sin\mu \\ &-\frac{4\operatorname{tg}^2\varphi+1}{1+\sin\varphi}\sin\mu\Big]\Bigg\}(p_0+\sigma_c)D \end{aligned} \tag{8.62}$$

其中 A 和 B 为矩形桩的尺寸，D 为圆桩直径，$p_0=k_0\sigma_c$ 为所考察深度的静止侧压力。

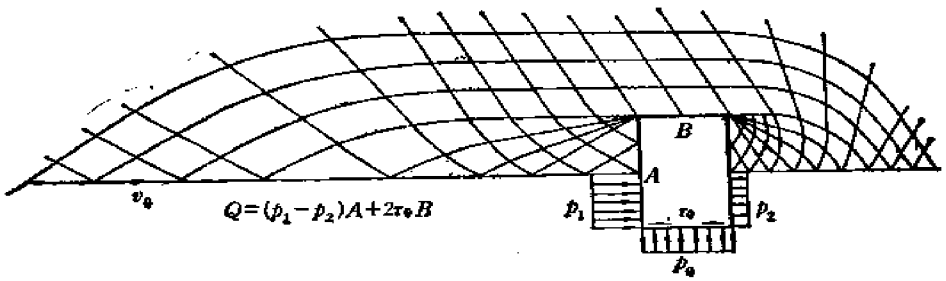


图 8.26 绕过矩形桩的滑动

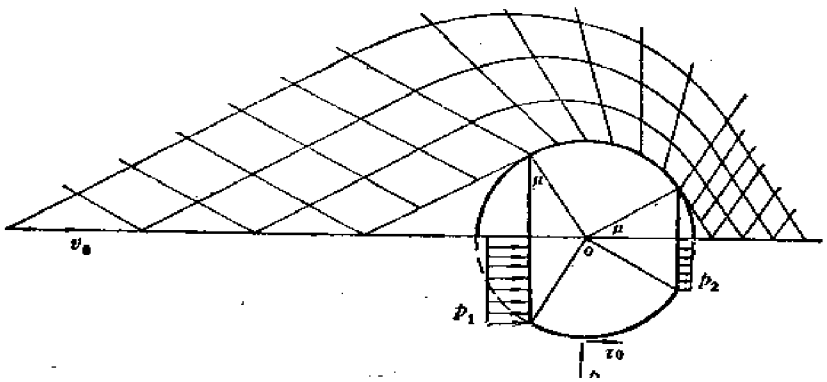


图 8.27 绕过圆形桩的滑动

对纯凝聚土，上式将简化为

$$Q=(2+\pi)cA+2cB \tag{8.61a}$$

和

$$Q=4\sqrt{2}cD \tag{8.62a}$$

8.8 土坡极限分析

滑坡可能性分析通常称土坡稳定分析，但此处的稳定概念实际上是指破坏，与力学中的稳定概念不同。本节从极限分析的观点出发讨论土坡稳定分析中的常用的几种方法，因此正名为土坡极限分析。

8.8.1 分析步骤

土坡极限分析一般分以下几个步骤：

① 假定滑动面的形式和位置；

② 把滑动面包围的土体分条；

③ 在某种假设下，根据土条上作用力的平衡条件求出滑弧上的法向及切向应力（滑动应力）；

④ 根据破坏准则求出滑弧上的抗剪强度；

⑤ 根据沿滑动面的抗滑力(矩)与滑动力(矩)之比求出安全系数；

⑥ 再假定其他滑动面，重复以上步骤，直至求出最小安全系数。

以上步骤中关键的是①和③两步，即滑动面的形式和土条之间作用力的假设，下面分别来讨论。

8.8.2 滑动面的形式

土坡稳定分析方法最早是由瑞典工程师提出的，假定滑动面为圆弧，因此称为瑞典圆弧法。以后陆续提出过对数螺线形滑动面，复式滑动面，折线形滑动面和任意滑动面。从极限分析观点看，假定滑动面的分析方法就是求可动解。如果假定滑动体作刚性运动，则非凝聚性土的滑动面必须是 $r=r_0\exp(-\theta\operatorname{tg}\rho)$ 形式的对数螺线，采用正交流动法则时 $\rho=\varphi$。如果假定滑动面是复式的或其它曲面，则相应地假定滑动土体中存在塑性流动区域(图 8.28)。

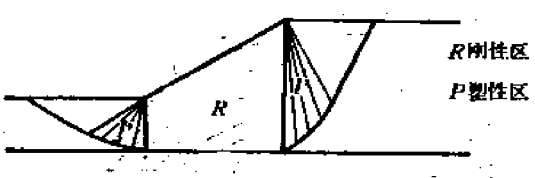


图 8.28 复式滑动面

对于饱和粘性土，如果把破坏准则改为式(8.54)那样

$$\tau_f = c + \sigma_m \operatorname{tg}\varphi$$

σ_m 为平均有效应力而不是摩尔准则的滑动面上的法向应力，从而把土体看作抗剪强度随 σ_m 而变的纯凝聚性土，则圆弧滑动面将满足严格的刚性滑动的要求。

根据极小原理，可动解得到的安全系数大于真正值，因此需要假定不同的滑动面寻找极小值。

8.8.3 土条平衡

设 d_x 为土条宽度，则根据垂直和水平向的力的平衡及对土条中心与滑弧交点的力矩平衡，并略去高阶小量后可得

$$\sigma_n + \tau_s \operatorname{tg}\alpha + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = w_v h \tag{8.63}$$

$$\tau_s + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} - \sigma_n \operatorname{tg}\alpha = w_x h \tag{8.64}$$

$$(z_s - z_e)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} - E\frac{\mathrm{d}z_e}{\mathrm{d}x} + T = w_x h h_s \tag{8.65}$$

式中 w_x 和 w_v 为水平和垂直向的平均体积力，h 为土条高度，h_s 为土条重心到滑动面的距离，z_e 为土条间作用力的合力垂直坐标，其它符号见图 8.29。设 FS 为安全系数，抗剪强度降低 FS 倍后土条处于极限平衡状态，则滑面上的应力条件为

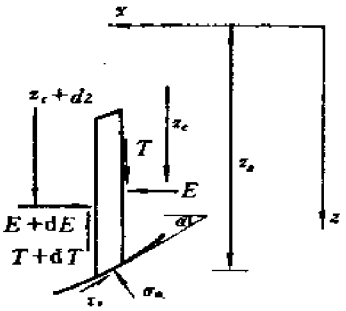


图 8.29 土条的平衡

$$\tau_s = \frac{1}{FS}[c + (\sigma_n - u)\operatorname{tg}\varphi] \tag{8.66}$$

如果孔隙压力分布 u 已知，并先假定 FS 已知，则上述四式中包含 σ_n，τ_s，T，E 和 z_e 五个未知变量，因而无法求解。为了把上述静不定问题化成静定问题，必须选用一个假设。例如瑞典圆弧法假定 $T = E = 0$，简化 Bishop 法采用 Krey 的 $T = 0$ 的假设，Morgenstern-Price 假定 T 与 E 之间存在某种函数关系，Spencer 假定 T 与 E 之间的比例已知，Janbu 假定 z_e 已知[23]。上述方法未考虑滑出点的边界条件，陈祖煜根据滑面与土坡两个交点处 E 和 T 均为零的边界条件改进了 Morgenstern-Price 法[24]。

从极限分析的观点看，如果得出的土条内各点的应力状态未破坏式(8.2)的屈服条件的话，上述各种方法相当于寻求一个可静解。许多方法强调内力分布的合理条件，也就是说力图使土条在垂直接触面上的应力分布总体上不违反屈服条件。但是由于未对非垂直面上的应力是否违反屈服条件进行检验，上述各种方法算出的应力分布并不是严格意义上的可静解。考虑到局部违反屈服条件对总体结果不会有大的影响，上述各种解法大体上还是可以看作是可静解。由此潘家铮根据极大原理推论，对于固定的滑动面，各种内力合理性假设中应当选用能使安全系数最大的一个假设[10]。孙君实在此基础上提出一个双重求极值的所谓双层复形法[11]，即先对每个固定滑动面，按各种可能的内力分布求安全系数的极大值，再从各种滑动面中挑选出安全系数最小者。

8.8.4 简化 Bishop 法

目前工程界常用的两种土坡稳定分析方法仍为瑞典圆弧法 (Fellenius) 和简化 Bishop 法。前者采用的土条间作用力的假设太不合理，计算得出的安全系数明显偏低；后者的假设比较合理，也不太复杂，因而是宜于实际工程中推广应用的主要方法。下面介绍该法的基本公式及程序。

当 $T=0$ 时由式(8.63)和(8.66)消去 σ_n 后可以解出 τ_s 如下

$$\tau_s=\frac{c+(w_zh-u)\ \mathrm{tg}\ \varphi}{\mathrm{FS}+\mathrm{tg}\ \alpha}$$

对滑弧中心的力矩平衡条件为

$$\int\frac{\tau_s}{\cos\alpha}\mathrm{d}x=\int wh\sin\alpha\mathrm{d}x+\int w_xh\left(\cos\alpha-\frac{h_s}{R}\right)\mathrm{d}x$$

用有限差 b 代替 $\mathrm{d}x$，代入 τ_s 可得

$$\mathrm{FS}=\frac{\Sigma\dfrac{(c_ib_i+(W_i-u_ib_i\varphi_i)\mathrm{tg}\ \varphi_i}{(\cos\alpha_i+\sin\alpha_i\ \mathrm{tg}\ \varphi_i)/F_s}}{\Sigma W_i\sin\alpha_i+\Sigma Q_i\cos(\alpha_i-\beta_i)}\tag{8.67}$$

式中 $W_i=w_{zi}h_ib_i$ 和 $Q_i=w_{xi}h_ib_i$ 为土条重量和水平惯性力，$\beta_i=\dfrac{h_{si}}{R}$，$R$ 为滑弧半径。由于公式两边都含有 FS，因此计算时要用迭代法。设 FS^n 和 FS^{n+1} 分别为前后两次迭代的安全系数，则按照 Newton-Raphson 迭代法

$$FS^{n+1}=FS^n-\frac{f(FS^n)}{f'(FS^n)}$$

或

$$FS^{n+1}=FS^n\left(1-\frac{W_w-S_b}{W_w-S_a}\right)\tag{8.68}$$

式中

$$W_w=\sum W_i\sin\alpha_i+\sum Q_i\cos(\alpha_i-\beta_i)$$

$$S_b=\sum\frac{c_ib_i+(W_i-u_ib_i)\mathrm{tg}\ \varphi_i}{FS^n\cos\alpha_i+\sin\alpha_i\ \mathrm{tg}\ \varphi_i}$$

$$S_a=\sum\frac{[c_ib_i+(W_i-u_ib_i)\mathrm{tg}\ \phi]\sin\alpha_i\ \mathrm{tg}\ \varphi_i}{(FS^n\cos\alpha_i+\sin\alpha_i\ \mathrm{tg}\ \varphi_i)^2}$$

下面列出一段简化 Bishop 法的有效应力法程序，系在文献[25]基础上改进的。其要点是用折线形网格描绘复杂的土坡形状及土层分布以及孔隙水压力变形规律，网格线可以重合，如图 8.30。

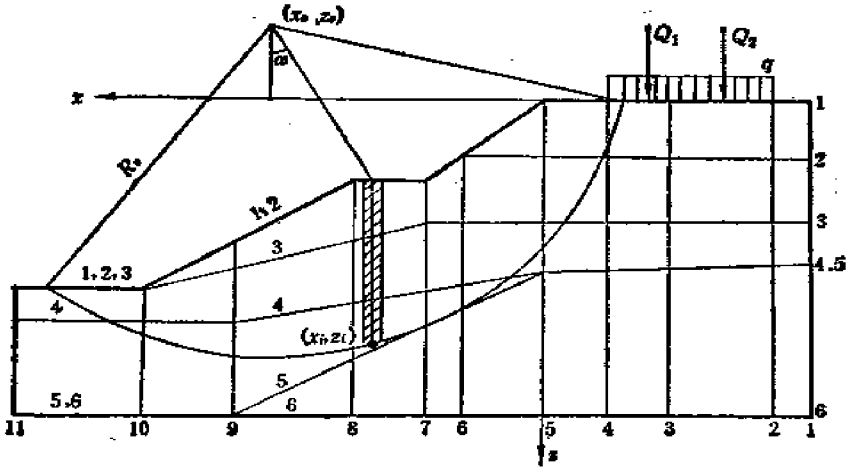


图 8.30 滑弧分析算例

P.8.2 简化 Bishop 法圆弧稳定分析程序

【功能】 对于一个固定的滑弧用 Bishop 法算出其安全系数

【标识符】

XO、ZO——圆心坐标

RO、LO——滑弧半径和所切深度

N、M——网格线条数(图中 N=6, M=11)

X、Z、S——网格点坐标及两点间斜率

R——地表网格点到圆心距

D——控制滑弧切点精度的小数(例如 1 米)

NU、NL——滑弧与坡面相交点数

XU、ZU, XL、ZL——上交点及下交点坐标

FS——安全系数(>50 表示滑弧与坡面不相交或交点数大于 2 个)

B——土条宽

NA、NE——圆心右边及左边土条数

NO——滑弧通过的最右边网格号

WW——滑动力

TO——滑弧两端土条宽与中间土条宽之比

SN, OS——$\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$

X_i, Z_i——土条中心线上滑弧坐标

W, WT——土条重(包括表面荷载)

IM——均布荷载作用区段(图中为二段)

ID、QD——均布荷载作用区右端的网格线号及荷载大小

IQ, XQ, QL——集中荷载数作用点坐标及其大小

ZH——滑弧面下面一条网格线坐标

U——输入的网格点孔隙压力

UI——内插得到的滑弧面上的孔隙压力

C、F、G——土的凝聚力,摩擦系数及容重

ST——抗剪强度

FF——$\mathrm{tg}\,\varphi\sin\alpha$

QI——水平惯性力

RA——水平向地震加速度与重力加速度比

SB、SS——见式(8.68)

FSMIN, XMIN, YMIN——最小安全系数及滑弧圆心

【说明】

(1) 10~90 确定滑弧与坡面的交点数;

(2) 90~120 求出第一个与最后一个土条位置;

(3) 135~300 计算各土条上作用力;

(4) 300~340 用迭代法计算安全系数。

```
      SUBROUTINE CICLE
      COMMON N,M,LO,XO,ZO,D,RA,XMIN,
     * ZMIN,RMIN,FSMIN/A1/X(20,30),
     * Z(20,30),U(20,30),S(20,30),
     * /A2/C(10),F(10),G(10),IJ(6),
     * QQ(6),IQ,XQ(4),QL(4),IM,ID(3),
     * QD(3)
      DIMENSION NO(20),R(30),CS(60),
     * ZH(60),WT(60),ST(60),FF(60)
      RO=LO-ZO
      RM=1000
      DO 10 I=1,M
      DX=X(1,I)-XO
      DZ=Z(1,I)-ZO
      R(I)=SQRT(DX*DX+DZ*DZ)
      IF(RM.GT.R(I)) RM=RI
10    CONTINUE
      IF(RO-RM.GE.2*D) GOTO 20
      FS=53
      GOTO 350
20    NU=0
      NL=0
      DO 70 J=1,M-1
      AQ=S(1,J)*X(1,J)-Z(1,J)+ZO
      AK=1.0+S(1,J)**2
      PK=(S(1,J)+XO-AQ)**2
      BK=SQRT(AK*RO*RO-PK)
      IF(RO.LE.R(J).AND.RO.GT.
     * R(J+1)) GOTO 30
      GOTO 40
30    AB=XO+S(1,J)*AQ-BK
      XU=AB/AK
      ZU=AB*S(1,J)+Z(1,J)
      NU=NU+1
40    IF(RO.GE.R(J).AND.RO.LT.
     * R(J+1)) GOTO 50
50    AB=XO+S(1,J)*AQ+BK
      XL=AB/AK
      ZL=AB*S(1,J)+Z(1,J)
      NL=NL+1
70    CONTINUE
      IF(NU.GT.1.OR.NL.GT.1)
     * GOTO 80
      GOTO 90
80    FS=55
      GOTO 350
90    B=RO/50
      PK=XO-XU-B/2.0
      NA=INT(PK/B)
      IF(PK.GT.FLOAT(NA)*B)
     * NA=NA+1
      IF(XL.GT.XO) GOTO 100
      GOTO 110
100   AK=XL-XO-B/2.0
      NE=-1*INT(AK/B)
      IF(AK.GT.-1*FLOAT(NE)*B)
     * NE=NE-1
      GOTO 120
110   AK=XO-XL-B/2.0
      NE=INT(AK/B)
      IF(AK.GE.FLOAT(NE)*B)
     * NE=NE+1
120   DO 130 JK=1,N
130   NO(JK)=1
      WW=0
135   NM=NA-NE
      DO 300 II=1,NM
      I=NA-II
      DI=FLOAT(I)
      SN=DI/50.0
      XI=XO-B*DI
      TO=1
      IF(I.EQ.JA) GOTO 140
      GOTO 150
140   AQ=XO-FLOAT(NA-1)*B-B/2.0
      XI=(AQ+XU)/2.0
      TO=(AQ-XU)/B
      SN=(XO-XI)/RO
150   IF(I.EQ.JE) GOTO 160
      GOTO 170
160   AQ=XO-FLOAT(NE+1)*B+B/2.0
      XI=(AQ+XL)/2.0
      TO=(XL-Q)/B
      SN=(XO-XI)/RO
170   ZI=ZO+SQRT(RO*RO-(XI-XO)**2)
      CS(II)=SQRT(1.0-SN*SN)
      W=0
      DO 180 J=1,IM
      JK=ID(J)
      IF(XI.GE.X(1,JK).AND.XI.LT.
     * X(1,JK+1)) W=QD(J)
180   CONTINUE
      DO 190 JK=1,IQ
      IF(XQ(JK).GE.(XI-B/2.).AND.
     * XQ(JK).LT.(XI+B/2.))
     * W=W+QL(JK)/B
190   CONTINUE
      DO 220 JK=1,N
      J=NO(JK)
      DO 210 JP=J,M-1
      IF(XI.GE.X(JK,JP).AND.XI.LT.
     * X(JK,JP+1)) GOTO 200
      GOTO 210
200   NO(JK)=JP
      AK=(XI-X(JK,JP))*S(JK,JP)
      ZH(JK)=Z(JK,JP)*AK
      IF(ZH(JK).LT.ZI) GOTO 220
      JPP=JK-1
      MT=1
      GOTO 230
210   CONTINUE
220   CONTINUE
230   WT(II)=W
      IF(MT.EQ.1) JP=JPP
      DO 240 JK=1,JP
240   WT(II)=WT(II)+G(JK)*
     * (ZH(JK+1)-ZH(JK))
      WT(II)=WT(II)-G(JP)*
     * (ZH(JP+1)-ZI)
      JN=JPP
      J=NO(JN)
      AK=U(JN,J+1)-U(JN,J)
      IF(X(JN,J).EQ.X(JN,J+1))
     * GOTO 250
```

```
      AQ=(XI-X(JN,J))/
     * (X(JN,J+1)-X(JN,J))
      GOTO 260
250   AQ=0.
260   AK=U(JN,J)+AK*AQ
      J=NO(JN+1)
      PK=U(JN+1,J+1)-U(JN+1,J)
      IF(X(JN,J+1).EQ.X(JN,J))
     * GOTO 270
      AQ=(XI-X(JN,J))/
     * (X(JN,J+1)-X(JN,J))
      GOTO 280
270   AQ=0.
      PK=U(JN+1,J)+PK*AQ
      IF(ZH(JN+1).EQ.ZH(JN))
     *GOTO 280
      AQ=(ZI-ZH(JN))/(ZH(JN+1)
     * -ZH(JN))
      GOTO 290
280   AQ=0.
290   UI=AK+(PK-AK)*AQ
      CI=C(JN)
      FI=F(JN)
      Q=(WT(II)-UI)*TO*FI
      IF(Q.LT.0.) Q=0.
      ST(II)=CI*TO+Q
      FF(II)=CN*FI
      WW=WW+WT(II)*TO*SN
      EI=(ZI-ZH(1))/2.-ZO
      QI=WT(II)*RA
      WW=WW+QI*EI/RO
      ST(II)=ST(II)-QI*SN*TO*FI
300   CONTINUE
      FSO=1.0
      SB=0.
      SS=0.
310   DO 320 II=1,NM
      I=NA-II
      AK=FSO+CS(II)+FF(II)
      SB=SB+ST(II)/AK
      SS=SS+ST(II)*FF(II)/AK/AK
320   CONTINUE
      FS=FSO*(1-(WW-SB)/(WW-SS))
      IF(ABS(FS-FSO).LE.0.001)
     * GOTO 340
      SS=0.
      SB=0.
      FSO=FS
      GOTO 310
340   IF(FS.GE.FSMIN) GOTO 360
350   XMIN=XO
      ZMIN=ZO
      FSMIN=FS
360   RETURN
      END
```

参 考 文 献

1. Drucker D. C. & Prager W,Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quartly J. Appl. Math,Vol. 10, No. 2, 1952.
2. Drucker D. C.Coulomb friction plasticity and limit loads, ASME. J. Appl. Mech., Vol 21. No. 1, 1954.
3. Соколовский В. В., Статика сыпучей среды, 1960, 第 3 版(第 2 版中译本,徐志英译,地质出版社,1956)。
4. 沈珠江,散粒体极限平衡理论及其应用,水利学报,1962 年第 3 期。
5. 沈珠江,水平荷重下地基的极限平衡,中国科学,8 卷 7 期,1964.
6. 沈珠江,极大极小原理在土体稳定分析中的应用,第一届土力学及基础工程学术讨论会论文选集,p. 202,建筑工程出版社,1964.
7. 钱令希、钟万勰,论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理,力学学报,1964 年第 1 期。
8. Palmer A. C., Alimit theorem for materials with non-associated flow laws, J, Mecanique, Vol. 5, No.2, 1966.
9. De Jong G. D. J, A limit theorem for material with internal friction, Symp. on the Role of Plasticity in soil machanics. p. p.12～21 Cambridge, 1973.
10. 潘家铮,建筑物的抗滑稳定和滑坡分析,水利出版社,1980.
11. 孙君实,条分法的数值分析,岩土工程学报,6 卷 2 期,1984.
12. Lysmer J., Limit analysis of plane problems in soil mechanics, J, Soil Mech. & Found. Div.,ASCE,96, No. SM4, 1970.
13. Fremond M. and Salencon J., Limit analysis by finite element methods, Symp. on the Role of Plasticity in soil Mech., Cambridge. p.297, 1973.
14. Salencon J., Applicntions of the theory of plasticify in soil mechanics, Jhon Wiley & Sons, 1977.
15. Березанцев В. Г., Осесимметричная задача теорий предельного равновесия сыпучей среды, Гостехиздат, 1952.
16. Terzaghi, K. & Peck. 工程实用土力学,蒋彭年译,水电出版社,1960.
17. Chen W. F., Limit analysis and soil plasticity, Elsevier Company, 1975.
18. Gussmann P, Kinematical elements for soils and rocks, 4th Int.Conf. Numerical Methods in Geomech.,Vol-1, p. 47, 1982.

19. Jamura J. et,al., Rigid plastic finite element method for soil structure, 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomech., Vol. 1, p. 185, 1985.
20. 沈珠江.饱和粘性土的极限平衡理论,第一届土力学及基础工程学术讨论会论文选集,建筑工程出版社,p.193,1964.
21. 沈珠江.粘土地基极限荷载计算程序,水利水运科技情报,1975 年 4~5 期.
22. Taylor D. W. & Oci T. A, Increase in bearing capacity resulting from consolidation, Geotechnique, Vol. 21, No. 4, 1971.
23. 魏汝龙.土坡稳定分析法,水利水运科技情报,1986 年 4 期
24. 陈祖煜和 Morgenstern N. R, Extension to the generalized method of slice for stability analysis, Canadian. Geotechnical J., 20, No. 1, 1983.
25. 魏汝龙等.土坡圆弧稳定分析电子计算机计算程序,水利水运科技情报,1974 年 3 期.
26 沈珠江,散粒体对柱体的绕流压力及其在计算桩对岸坡稳定的遮帘作用中的应用,南京水利科学研究所报告,1961.

第九章　概率数值计算

9.1　概述

在传统的土力学计算中，把土的物理力学指标和作用在土体上的荷载都作为确定性值来处理，因此计算所得的反应当然也是确定性的。然而，人们早已注意到土的物理力学指标的离散性，这种离散性是由土体本身的变异性和测定指标的不确定性所造成的；同时，作用在土体上的荷载，特别是活荷载和偶然荷载，也常常带有不确定性，显然，土体的反应也并不是确定性的。土力学计算的结果只是人们对于某种反应的一种估计，计算结果与实测结果之间存在着一定的差异是很正常的事，关键在于选用的指标是否符合实际，能否根据土工指标和荷载的不确定性对计算结果的误差作出定量的估计。

随着高速电子计算机的普及与应用，土力学中的数值方法得到了很大的发展，并用于解决复杂的实际问题，取得了不同程度的成功。但同时也带来了相当精确的计算方法与带有相当误差的输入数据之间的协调问题，这个问题如果不妥善解决，数值方法的重要作用就得不到充分的发挥。S.Valliappan 曾经指出[1]，在岩土工程方面各种各样的实际问题受到大量随机因素的影响，因而有限元方法也许不能提供开业工程师所希望的那么可靠的结果。对于这类问题，如果将概率方法与有限元结合起来，就有可能获得可靠的解答。从另一个方面来说，对于一个比较复杂的岩土工程系统，其概率极限状态方程常常是高度非线性的，再加上随机变量概率模型的复杂性，概率计算很难用精确的解析方法，于是各类数值计算，数值模拟方法被引入概率计算，用以解决各种各样的概率估计问题。概率计算和数值计算两种计算方法的耦合称为概率数值计算。

本章主要包括四个内容。第一个内容是概率计算基本方法，它是概率数值计算的基础；第二个内容是 Monte Carlo 模拟，这是一种有效的随机数值方法；第三个内容是有限差分和 Monte Carlo 方法的耦合；第四个内容是随机有限元，包括有限元一次二阶矩法与有限元 Monte Carlo 方法。后两个内容是前两个内容与传统的数值方法的结合，形成了具有特色的概率数值方法。

9.2　工程系统失效概率计算

在岩土工程设计时，如将土工指标和荷载作为随机变量引入到设计准则中去，建立概率极限状态的概念，就可以计算工程系统的失效概率。在这一节中主要讨论用一次二阶矩方法求解失效概率。

9.2.1　极限状态方程与失效概率

若整个岩土工程结构物或结构的一部分超过某一特定状态就不能满足设计规定的某一功能的要求，此特定的状态称之为该功能的极限状态。例如变形验算时，规定了各种建筑物的容许变形值，要求建筑物的变形小于容许变形值，如果大于容许变形值，就没有满足设计规定的变形要求，那末计算变形等于容许变形就是一种极限状态。

极限状态是对应于某一功能而言的，而每一种功能都由若干个参数或基本变量所规定

的，反映这种定量关系的数学表达式称为功能函数，记作 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为基本变量。

极限状态的数学涵义是功能函数为零，即：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{9.1}$$

这一方程就称为极限状态方程。

极限状态方程所反映的现象，在确定性设计中是作为确定性事件来处理的，如果认为设计时不出现极限状态，那么肯定永远不会发生极限状态。可实际并非如此，设计时即使取了相当大的安全系数，严格控制不出现极限状态，但事实上仍有可能发生极限状态，极限状态一旦发生，就称之为失效。失效现象实际上是一种随机现象，它既可能发生，也可能不发生，人们把可能产生失效的概率称为失效概率。概率极限状态设计就是把极限状态作为随机事件来处理，根据基本变量的概率模型及其在极限状态方程中的作用来估计失效概率，并把它限制在人们可以接受的范围内，在风险优化决策时预先考虑失效可能带来的经济损失。

极限状态方程可能是线性的，但大多数是非线性的；基本变量可能全部符合正态分布，也可能有一些基本变量是非正态的；基本变量之间可能是互相独立的，也可能存在着一定的相关关系。当然，线性正态独立变量的极限状态方程在数学处理上最简单，如果是非线性非正态相关变量的极限状态方程，则需要作一些特殊的数学处理。

下面讨论最简单的情况，设系统的能力为 C，对系统的需求为 D，则极限状态方程可表达为安全储备 SM 等于零，即：

$$SM = C - D = 0 \tag{9.2}$$

这一极限状态方程在 COD 平面上为一根 45° 线，将平面划分为可靠区和失效区，如图 9-1 所示。

失效概率 P_f 定义为安全储备小于等于零的概率，即：

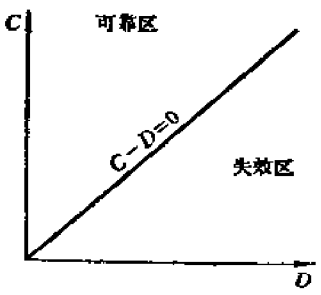


图 9.1 极限状态方程

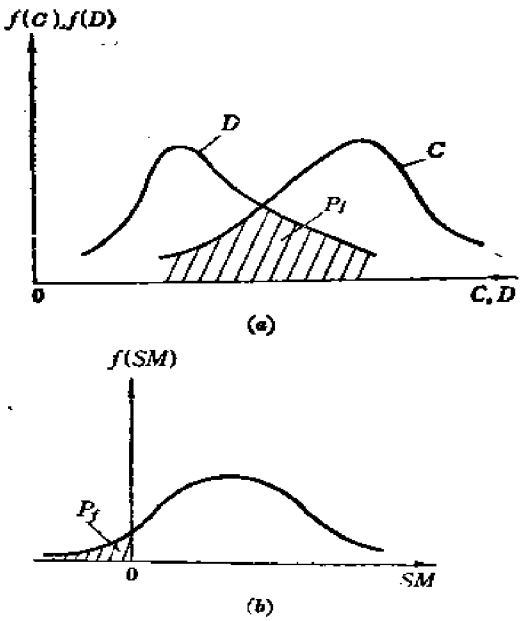


图 9.2 失效概率的几何意义

$$P_f = P(SM \leqslant 0) = P(C - D \leqslant 0) \tag{9.3}$$

如已知C和D的概率密度函数$f(C)$、$f(D)$，则失效概率为图9.2(a)中的阴影面积，其值由下式计算：

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{D} f(C)\mathrm{d}C \right] f(D)\mathrm{d}D \tag{9.4}$$

若已知安全储备SM的概率密度函数$f(SM)$，则失效概率为图9.2(b)中的尾部概率。

若能力C和需求D均服从正态分布，则安全储备SM也服从正态分布。可以用标准正态分布很方便地求得失效概率：

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}\right) = \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{\overline{C} - \overline{D}}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}}\right) \tag{9.5a}$$

式中$\frac{\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}$称为可靠性指标，用$\beta$表示，则：

$$\beta = \frac{\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}$$

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(\beta) \tag{9.5b}$$

9.2.2 可靠性计算的一次二阶矩法

对于非线性极限状态方程，不能用前面介绍的方法计算失效概率，这里介绍一种常用的简化计算方法，即：一次二阶矩法，简记为$FOSM$法。

如果令功能函数为$Z = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，对功能函数在平均值处用Taylor级数展开得：

$$Z = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{\bar{x}_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_{\bar{x}_i, \bar{x}_j} + \cdots \tag{9.6}$$

忽略两次以上的项，得：

$$Z \approx g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{\bar{x}_i} \tag{9.7}$$

对上式分别取均值和方差，得：

$$\bar{Z} = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \tag{9.8}$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 \simeq \sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_{x_i}^2\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2\Big|_{\bar{x}_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} COV(x_i, x_j)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\Big|_{\bar{x}_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\Big|_{\bar{x}_j} \tag{9.9}$$

如果变量之间互相独立，则$COV(x_i, x_j) = 0$，由(9-9)式得：

$$\hat{\sigma}_Z^2 \simeq \sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_{x_i}^2\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2\Big|_{\bar{x}_i} \tag{9.10}$$

式(9-10)就是人们所熟知和常用的误差传递公式。此时，可靠性指标为：

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{\hat{\sigma}_Z} \tag{9.11}$$

这种方法建立在Taylor级数展开后忽略两次以上的项，并且只考虑一阶原点矩(First Order)和二阶中心矩(Second Moment)这两个特征参数，故称为一次二阶矩法。

对于非线性极限状态方程，涉及到偏导数的赋值问题，如果象上面所介绍的用平均值赋

值，就称为中心点法。但是，中心点法会带来较大的误差，因为在 $i=1, 2, \cdots, n$ 的多维空间里，超几何的极限状态曲面将这个空间分为两个区，可靠区域与失效区域，而上述由平均值所确定的坐标点位于可靠区域而不是在极限状态曲面上。为了解决这个问题，人们将 Taylor 展开式的点选在极限状态曲面上，并且只在失效概率为最大的这个点上，这个赋值点称为验算点，经过这样改进后的一次二阶矩法称为验算点法。

对于极限状态方程中的每个基本变量分别取标准化变量：

$$x_{ui}=\frac{x_i-\bar{x}_i}{\hat{\sigma}_{xi}} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{9.12}$$

然后便可得出用标准化变量表示的极限状态方程：

$$g(x_{u1}\hat{\sigma}_{x1}+\bar{x}_1, x_{u2}\hat{\sigma}_{x_2}+\bar{x}_2, \cdots, x_{un}\hat{\sigma}_{xn}+\bar{x}_n)=0 \tag{9.13}$$

该极限状态方程在 $x_{u1}, x_{u2}, \cdots, x_{un}$ 的多维空间里是一个不通过坐标原点的超几何曲面，从坐标原点到该曲面的最短距离 $\overline{OP^*}$ 就是可靠性指标 β，P^* 点即为验算点，$\overline{OP^*}$ 与各坐标夹角的余弦，即 β 的方向余弦由下式求得：

$$\cos\theta_{xi}=\cos\theta_{xui}=\frac{-\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{p^*}\hat{\sigma}_{xi}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{p^*}\hat{\sigma}_{xi}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{9.14}$$

验算点的坐标(标准化变量)：

$$x_{ui}^*=\beta\cos\theta_{xi} \tag{9.15}$$

原变量的验算点坐标：

$$x_i^*=\bar{x}_i+\beta\hat{\sigma}_{xi}\cos\theta_{xi} \tag{9.16}$$

由于验算点位于极限状态曲面上，因此必然满足极限状态方程：

$$g(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)=0 \tag{9.17}$$

已知平均值 $\bar{x}_i$ 和标准差 $\hat{\sigma}_{xi}$，方向余弦已可求得，故有 $n+1$ 个未知数(n 个 x_i^* 和 β)，联立求解就可求得可靠性指标和验算点坐标。可是在计算方向余弦时需在验算点赋值，而验算点坐标尚是未知数，因此必须用迭代法才能求解。

用迭代法求解时，先假定初始值，一般取平均值为验算点坐标的初始值进行计算，直到两次求得的可靠性指标 β 的差值小于允许误差为止。

求得可靠性指标 β 后用下式计算失效概率：

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi(\beta) \tag{9.18}$$

如果基本变量中存在非正态变量，就不能直接采用上述方法计算。为了能将一次二阶矩法用于非正态变量，需将非正态变量变换为当量正态变量，然后参加上述计算过程。

若已知非正态变量 y 的概率分布函数 $F(y)$ 和概率密度函数 $f(y)$，我们可以假设一个具有平均值 $\bar{x}'$和标准差 $\hat{\sigma}_x'$ 的正态分布，令两者在验算点 P^* 处有相同的概率分布函数和概率密度函数，以此为条件求得当量正态分布的平均值 $\bar{x}'$ 和标准差 $\hat{\sigma}_{\bar{x}}'$。

根据在 P^*处概率分布函数相等的条件得：

$$\bar{x}'=y^*-\Phi^{-1}[F(y^*)]\hat{\sigma}_x' \tag{9.19}$$

根据在 P^*处概率密度函数相等的条件得：

$$\hat{\sigma}_x'=\varphi\{\Phi^{-1}[F(y^*)]\}/f(y^*) \tag{9.20}$$

式中 Φ^{-1} 为标准正态分布函数的反函数；φ 为标准正态分布概率密度函数。

上述方法只适用于基本变量互相独立的情况，对于相关变量可以先将它们变换为互不相关的变量，再用一次二阶矩验算点法求解可靠性指标 β 和失效概率 P_f。

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相关变量，则 $COV(x_i, x_j) \neq 0$，因此可以得到协方差矩阵 $[C_x]$。

对于标准化变量：

$$COV(x_{ui}, x_{uj}) = E[(x_{ui}-\bar{x}_{ui})(x_{uj}-\bar{x}_{uj})] = \frac{E[(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)]}{\hat{\sigma}_{xi}\cdot\hat{\sigma}_{xj}}$$

$$= \frac{COV(x_i, x_j)}{\hat{\sigma}_{xi}\hat{\sigma}_{xj}} = \gamma_{ij} \tag{9.21}$$

由上式可以看出，标准化变量的协方差矩阵就是原变量的相关矩阵，即：

$$[C_u] = [R_x] \tag{9.22}$$

如果能找到一组新的变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，且其协方差矩阵 $[C_y]$ 为一对角矩阵，即对角线元素为 $\hat{\sigma}_{yi}^2$，其余元素均为零，则 y 变量是互相独立的。

$[C_u]$ 是实对称矩阵，有互不相同的 n 个特征值 λ，将对应的特征向量作为列写出正交矩阵 $[T]$，则特征值矩阵由下式求得：

$$[\lambda] = [T]^t[C_u][T] \tag{9.23}$$

这个特征值矩阵是对角矩阵。

互不相关的一组新变量 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 可由标准化变量 $X_u = \{x_{u1}, x_{u2}, \cdots, x_{un}\}$ 通过下面的正交变换得到：

$$Y = [T]^t X_u \tag{9.24}$$

Y 的协方差矩阵为：

$$[C_y] = E(YY^t) = E([T]^t X_u X_u^t[T]) = [T]^t E(X_u X_u^t)[T] \tag{9.25}$$

$$\because \quad E(X_u X_u^t) = [C_u]$$

$$\therefore \quad [C_y] = [T]^t[C_u][T] = [\lambda] \tag{9.26}$$

可见，原变量相关矩阵的特征值就是变换后新变量的方差，由于特征值矩阵是对角矩阵，这就证明了新变量的协方差为零，这组新变量确实是互不相关的。

上述一次二阶矩验算点法，可以应用于各类土力学问题的概率计算。作为例子，下面讨论两个土力学问题。

【例 1】 地基承载力问题：

在水平地基上，埋深 $D = 1$ m、宽度 $B = 4$ m 的条形基础承受中心竖直荷载，荷载及土工指标的统计特征见表 9-1，用 Hansen 公式一次二阶矩验算点法计算结果见表 9-2[11]。

表 9-1 荷载及土工指标的统计特征

基本变量	符 号	名 称	分 布	均 值	标准差
x_1	p	荷载(kPa)	极值Ⅰ型	200	30
x_2	r	土的重度(kN/m³)	正态	20	2
x_3	c	内聚力(kPa)	正态	10	1.5
x_4	φ	内摩擦角(°)	正态	25	3

表 9-2 Hansen 公式验算点法计算结果

迭代次数	z	β	p^*	r^*	c^*	φ^*
1	0.0935	3.8281	215.066	19.192	9.245	13.8
2	0.0407	3.5281	278.760	19.660	8.842	16.6
3	−0.0488	3.3500	301.898	19.609	9.097	17.3
4	0.0828	3.3359	305.861	19.599	9.150	17.4
5	0.0223	3.3359	306.369	19.598	9.158	17.4

失效概率 $$P_f=\frac{1}{2}-\psi(3.3359)=0.425‰$$

在这个算例中，荷载是非正态变量，服从极值 I 型分布，其概率密度函数为：

$$f(x)=\alpha\exp[-\alpha(x-u)]\exp\{-\exp[\alpha(x-u)]\}$$

式中 α 和 u 为分布特征参数，且有：

$$\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{6}\,\hat{\sigma}_x}=\frac{\pi}{\sqrt{6}\times 40}=0.03206$$

$$u=\bar{x}-\frac{0.57722}{\alpha}=200-\frac{0.57722}{0.03206}=181.99836$$

【例 2】 土坡稳定分析[12]。

土坡稳定问题用普通条分法分析的极限状态方程为：

$$Z=\Sigma[C_i'b_i/\cos\alpha_i+(W_i-u_ib_i)\cos\alpha_i\,\mathrm{tg}\,\varphi_i']-\Sigma W_i\sin\alpha_i=0$$

在极限状态方程中，抗剪强度指标 C'，$\mathrm{tg}\,\varphi'$ 作为随机变量，其余的变量均作为确定性变量处理。

如果考虑 c' 与 $\mathrm{tg}\,\varphi'$ 之间的相关性，通过正交变换得到相应的新变量 y_1 与 y_2，新变量与原变量之间的关系由下式求得：

$$c'=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{c'}(y_1+y_2)+\overline{c'}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi'=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\varphi'}(y_1-y_2)+\overline{\mathrm{tg}\,\varphi'}$$

$$\hat{\sigma}_{y1}=(1+\gamma_{c'1}\,\mathrm{tg}\,\varphi')^{1/2}$$

$$\hat{\sigma}_{y2}=(1-\gamma_{c'1}\,\mathrm{tg}\,\varphi')^{1/2}$$

代入极限状态方程，整理后可得到用新变量表示的极限状态方程：

$$Z=Ay_1+By_2+C=0$$

式中

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{c'}(\Sigma\sec\alpha_i)+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\varphi'}[\Sigma(\gamma H_i-u_i)\cos\alpha_i]$$

$$B=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{c'}(\Sigma\sec\alpha_i)-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\varphi'}[\Sigma(\gamma H_i-u_i)\cos\alpha_i]$$

$$C=(\Sigma\sec\alpha_i)\overline{c'}+[\Sigma(\gamma H_i-u_i)\cos\alpha_i]\overline{\mathrm{tg}\varphi'}-\Sigma\gamma H_i\sin\alpha_i$$

分别对变量 y_1 和 y_2 求一阶偏导数，则有：

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}=A,\quad \frac{\partial g}{\partial y_2}=B$$

方向余弦为：

$$\cos\theta_{y1}=\frac{-A\hat{\sigma}_{y1}}{\sqrt{(A\hat{\sigma}_{y1})^2+(B\hat{\sigma}_{y2})^2}}$$

$$\cos\theta_{y2}=\frac{-B\hat{\sigma}_{y2}}{\sqrt{(A\hat{\sigma}_{y1})^2+(B\hat{\sigma}_{y2})^2}}$$

验算点坐标为：

$$y_1^*=\cos\theta_{y1}\hat{\sigma}_{y1}\beta$$

$$y_2^*=\cos\theta_{y2}\hat{\sigma}_{y2}\beta$$

可靠性指标 β 由下式求得：

$$\beta=\frac{-C}{A\cos\theta_{y1}\hat{\sigma}_{y1}+B\cos\theta_{y2}\hat{\sigma}_{y2}}$$

一次二阶矩法早已应用于结构工程的可靠性分析，在岩土工程的可靠性分析中也采用一次二矩法，则便于使两者在设计准则上相互统一。

9.3 Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 模拟方法亦称为随机模拟方法，或称为随机抽样技术或统计试验方法，是人工产生和利用随机数的方法之总称，它是一种采用统计抽样理论近似求解数学、物理和工程技术问题的数值方法。

9.3.1 Monte Carlo 方法的基本概念

Monte Carlo 方法解题的基本思想为：欲求一个问题的数值解，首先建立一个概率模型或随机过程，使其某数字特征（如数学期望）为所求问题的解；然后按给定的概率模型在计算机上产生随机数，将每一个随机数作为抽样试验的结果参加运算，求得所求参数的统计特征。

在计算机上可以用物理方法来产生随机数，但是价格昂贵，不能重复，使用不便。另一种方法是用数学递推公式产生，这样产生的序列与真正的随机数序列不同，所以称为伪随机数或伪随机序列，只要方法和参数选择合适，所产生的伪随机数就能满足均匀性和独立性，与真正的随机数具有相近的性质。

产生随机数的方法是先用一定的方法产生 [0, 1]均匀分布的随机数，然后通过一个适当的变换就可以得到符合某一概率模型的随机数。

产生 [0, 1]均匀分布的随机数的方法很多，目前常用的有乘同余法和混合同余法。

用乘同余法产生 [0, 1]均匀分布随机数的递推公式为

$$x_i=\lambda x_{i-1}(\mathrm{mod}\ M)\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots)\tag{9.27}$$

式中，λ 为乘子，M 为模，当 $i=1$ 时，$x_{i-1}=x_0$ 为初始参数，x_0 可取 1 或任意正奇数。

利用上述公式算出序列 x_1, x_2, …后再取

$$\gamma_i=\frac{x_i}{M}\tag{9.28}$$

即为第 i 个 (0, 1)均匀分布的随机数。

例如，设 $\lambda=13$, $x_0=1$, $M=100$, 则求得 x_i 的序列为 1, 13, 69, 97, 61, 93, 9, …，相应的随机数为 0.01, 0.13, 0.69, 0.97, 0.61, 0.93, 0.09, …。

从上式可以看出，不同的 x_i 最多只能有 M 个。所产生的序列 x_i 和 γ_i 是有周期的，设其周期为 L，则有 $L\leqslant M$ 和 $\gamma_{i+1}=\gamma_i$，发生循环后，再产生的 γ_i 不能再看作是随机数。但如果

L充分大，则在同一个周期内的数有可能经受得住独立性和均匀性的检验，这完全取决于参数x_0、λ和M的选择。下面举出几个已经经过检验的参数，以供参考，见表9-3。

表9-3 乘同余法建议参数

M	λ	x_0	L
2^{32}	5^{13}	1	10^9
2^{36}	5^{13}	1	2×10^{10}
2^{42}	5^{17}	1	10^{12}

混合同余法又称线性同余法，产生随机数的递推公式为：

$$x_i=(\lambda x_{i-1}+c)\ (\mathrm{mod}\ M) \tag{9.29}$$

$$\gamma_i=x_i/M \tag{9.30}$$

通过适当选取参数可以改善随机数的统计性质。

产生了[0, 1]均匀分布的随机数后，接下来的问题是如何产生其他给定分布的随机数。根据概率论可知，[0, 1] 均匀分布的随机变量与其他的随机变量之间存在着以下的重要关系。

若随机变量η的分布函数为$F(x)$，该$F(x)$为x的单增连续函数。我们定义：

$$\xi=F(\eta) \tag{9.31}$$

为另一随机变量，可以证明此变量在[0, 1] 上呈均匀分布。如果已知随机变量η的分布函数为$F(x)$，则η与ξ之间的关系为：

$$\eta=F^{-1}(\xi) \tag{9.32}$$

如果F^{-1}可以表示成显函数形式，那么可以直接利用反函数这个关系，从[0, 1]均匀分布随机数变换为给定分布函数的随机数。

例如：设ξ为[0, 1]上均匀分布的随机变量，试求由它所产生[a, b]上的均匀分布随机变量η。

[a, b] 上均匀分布的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (a\leqslant x\leqslant b)\\ 0\end{cases}$$

$$\xi=F(\eta)=\int_a^\eta f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\eta\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{\eta-a}{b-a}$$

由此可得：

$$\eta=(b-a)\xi+a$$

对于F^{-1}不能表示为显函数的情况，就不能用上述反函数法变换，此时可采用线性插值法变换。

上述ξ与η的关系，可用图9-3来表示。在[0, 1]均匀分布随机变量轴上，在0-1之间可划成m等份。给定分布的概率分布曲线也同时被划分成m段，将每一段曲线用折线来代替就可以得到对应于[0, 1]均匀分布随机数γ_i的给定分布的随机数x_i：

$$x_i=x_j+\left[\frac{x_{j+1}-x_j}{\gamma_{j+1}-\gamma_j}\right](\gamma_i-\gamma_j) \tag{9.33}$$

式中 γ_i 为[0, 1]均匀分布随机数；

γ_j, γ_{j+1} 为 γ_i 所在区段的上、下限；

x_j, x_{j+1} 为与 γ_i 对应区段的 x 的上、下限。

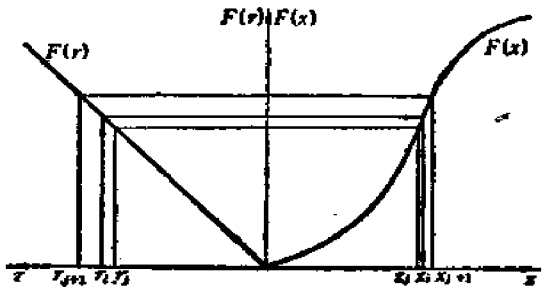


图 9.3 线性插入法变换

9.3.2 正态变量的 Monte Carlo 模拟

对于服从正态分布的随机变量可以通过标准正态分布进行变换。

设正态分布变量 X：$N(\bar{x}, \hat{\sigma}_x)$，标准正态分布变量 U：$N(0, 1)$

$$u=\frac{x-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x} \tag{9.34}$$

则

$$x=\hat{\sigma}_x u+\bar{x} \tag{9.35}$$

如已知一系列标准正态分布的随机数 $\{u_i\}$，代入上式变换后即可求得正态分布的随机数 $\{x_i\}$。

标准正态分布的随机数 u_i 可以用下列极限近似法或舍选法产生。

1. 极限近似法

已知 [0, 1] 均匀分布随机变量的期望值为 1/2，方差为 $\frac{1}{12}$，由中心极限定理知随机变量：

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \tag{9.36}$$

渐近地服从标准正态分布 $N[0, 1]$。为了保证一定的精度，上式中的 n 应取足够大，一般约取 $n=10$ 即可，当取 $n=12$ 时，上式的形式最简单。

2. 舍选法

已知标准正态分布的概率密度为：

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \tag{9.37}$$

选择 $c=\sqrt{2\pi}$，并取取值区间 $(-a, a)$（a 的数值可根据计算精度需要选取，例如取 $a=5$）。在计算机上产生一对[0, 1]均匀分布的随机数 γ_1, γ_2，并将 γ_1 通过下式求得在 $[-a, a]$ 上均匀分布的一个随机数：

$$z_1=2a\gamma_1-a \tag{9.38}$$

如果

$$\exp\left[-\frac{z_1^2}{2}\right]\geqslant\gamma_2 \tag{9.39}$$

则取 z_1 作为 $f(u)$ 的一个随机数 u_i，如不满足上列不等式就舍弃。这样不断地取一对[0,1]分布的随机数进行考察，便产生一系列标准正态随机数 $\{u_i\}$。

对于多元相关的正态随机变量可用矩阵形式写出线性变换的关系：

$$X = AU + B \tag{9.40}$$

则相关矩阵：

$$C = AA^T \tag{9.41}$$

若有两个相关的正态变量 x_1，x_2，相关系数 γ_{12}，数学期望和方差分别为 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\hat{\sigma}_1^2$，$\hat{\sigma}_2^2$。协方差矩阵为：

$$C = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \gamma_{12}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \\ \gamma_{12}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2^2 \end{bmatrix} \tag{9.42}$$

线性变换公式为：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + b_1 \\ x_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \tag{9.43}$$

系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

则

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} \tag{9.44}$$

由于 $C = AA^T$，故有：

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= \hat{\sigma}_1^2 \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} &= \gamma_{12}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= \hat{\sigma}_2^2 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= \gamma_{12}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \end{aligned}$$

如设 $a_{12} = 0$，则 $a_{11} = \hat{\sigma}_1$，$a_{21} = \gamma_{12}\hat{\sigma}_2$，$a_{22} = \hat{\sigma}_2(1-\gamma_{12}^2)^{1/2}$，故有：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \hat{\sigma}_1 u_1 + \bar{x}_1 \\ x_2 &= \hat{\sigma}_2(1-\gamma_{12}^2)^{1/2}u_2 + \gamma_{12}\hat{\sigma}_2 u_1 + \bar{x}_2 \end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

如已求得标准正态分布 $N[0, 1]$上的随机数 u_{11}，u_{21}，代入上式即可求得相关正态变量 x_{11}，x_{21}。

9.3.3 可靠性计算中的 Monte Carlo 方法

在可靠性计算中，由于受力情况比较复杂，变量众多且分布各异，极限状态方程往往是非线性的，采用一次二阶矩验算点法和当量正态变换，所得的结果有时误差过大，或计算过程出现不收敛等问题，而 Monte Carlo 方法就不受这些条件的限制，不管极限状态方程是否线性，也不管分布是否服从正态，只要模拟次数足够多，就能得到一个相对精确的失效概率值。

对于一种失效模式，根据土力学和基础工程知识可写出它的功能函数：

$$z = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

对于一个体系，有 m 个失效模式，其相应的功能函数为：

$$z_j = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad j = 1, 2, \cdots, m \tag{9.46}$$

体系的失效概率为

$$P_f = \int\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{9.47}$$

式中 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是各随机变量的联合概率密度函数，如各变量相互独立，则有：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i) \tag{9.48}$$

解上述多重积分可用 Monte Carlo 模拟方法，通常可用随机投点法，又称为直接法。

首先我们定义一个指标函数如下：

$$I(g(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \begin{cases} 1 & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) < 0 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases} \tag{9.49}$$

由数学期望定义知：

$$P_f = P(g(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = E_f(I(g(x_1, x_2, \cdots, x_n))) \tag{9.50}$$

上式所示的 P_f 的无偏估计为：

$$\bar{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I(g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \frac{N_f}{N} \tag{9.51}$$

式中$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是从随机变量的联合概率密度函数中抽样得到的。如假定各随机变量之间统计独立，可以很方便地根据各自的分布函数进行抽样，N_f 为 N 次模拟中 $z<0$ 的次数。

直接法比较直观、简单，但它的缺点是失效概率同模拟次数有很大的关系，对于失效概率很小的情形，为了减小方差，模拟次数往往需要很大，有的认为必须满足：

$$N \geqslant 100/P_f$$

这在许多情况下是不现实的。有的认为对于一般工程技术问题，取 $N=3000\sim50000$ 已经满足工程精度要求，但当系统比较复杂时，就需较多的上机时间。

为了避免直接法的缺点可以用平均法或半解析法。

9.4 Monte Carlo 模拟与有限差分法的耦合

有限差分法是用一组有限差分方程代替偏微分方程，作数学上的近似处理，它广泛应用于岩土工程计算。如果输入的参数并不是确定性数值而是服从于某种概率分布模型的随机变量，那末给出的解答也是一种随机变量，它呈一定的分布。Monte Carlo 模拟与有限差分方法的耦合可以提供一种有效的方法来求有限差分的概率解。

如将一维固结微分方程写为隐式的差分方程：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \gamma[m_v(z) + n(z)\beta]\frac{\partial u}{\partial t} \tag{9.52}$$

式中 $k(z)$ 为土的渗透系数；$m_v(z)$ 为土的体积压缩系数；$m_v = a(1-n)$；a 为土的压缩系数；$n(z)$为土的孔隙率；γ 为水的密度；β 为水的压缩系数；u 为超孔隙水压力。

对于均匀土层，差分方程为

$$\frac{k}{(\Delta z)^2}(u_{i-1,t+1} - 2u_{i,t+1} + u_{i+1,t+1}) = \gamma(m_v + n\beta)\frac{u_{i,t+1} - u_{i,t}}{\Delta t} \tag{9.53}$$

根据实测资料分析，土的渗透系数 k 服从对数正态分布，对于对数正态分布可以定义一个新的变量 $y = \ln k$，则 y 服从正态分布，即 $Y \sim N[\bar{y}, \hat{\sigma}_y^2]$；土的体积压缩系数 m_v 也服从对数正态分布，定义 $c = \ln m_v$，则 $c \sim N[\bar{c}\hat{\sigma}, {}^{2}_{c}]$；土的孔隙率服从正态分布。

为了叙述的方便，我们定义一个向量 X 来表示土的参数，分别用 x_1，x_2，x_3 表示 y，c 和 n，则有：$x_1 \sim N[\bar{x}_1, \hat{\sigma}_{11}^2]$，$x_2 \sim N[\bar{x}_2, \hat{\sigma}_{22}^2]$，$x_3 \sim N[\bar{x}_3, \hat{\sigma}_{33}^2]$。利用上一节相关正态变量线

性变换原理可以得到下面的变换公式：

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \hat{\sigma}_{33}u_3 + \bar{x}_3 \\ x_2 &= a\hat{\sigma}_{22}u_2 + bu_3 + \bar{x}_2 \\ x_1 &= c\hat{\sigma}_{11}u_1 + du_2 + eu_3 + \bar{x}_1 \end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

式中

$$a = (1-\gamma_{22}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \gamma_{23}\hat{\sigma}_{22}$$

$$c = \left[1-\gamma_{13}^2 - \frac{(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23})^2}{1-\gamma_{23}}\right]^{1/2}$$

$$d = \frac{(\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23}^2)}{1-\gamma_{23}^2}\ \hat{\sigma}_{11}$$

$$e = \frac{(\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23})}{1-\gamma_{23}^2}\ \hat{\sigma}_{11}$$

三个参数之间的相关系数 γ_{ij} 应当满足下式：

$$1-\gamma_{12}^2-\gamma_{23}^2-\gamma_{13}^2+2\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13} \geqslant 0 \tag{9.55}$$

计算实例的数据见表 9-4，计算结果示于图 9-4，图 9-5。[3]

在图 9-4 中，左侧是孔隙水压力均值的等时线，右侧是孔隙水压力标准差的等时线。从图可以看出，孔隙水压力的标准差也是时间和位置坐标的函数，曲线形状随时间和深度而变化，在最初的时刻，标准差的峰值出现在上、下两个排水面附近，随着时间的推移，峰值逐渐向土层中部转移。在固结过程中某一时刻，标准差达最大值，而在固结快结束时，标准差又显著减小，并趋于分布比较平缓。

表 9-4 Monte Carlo 模拟计算实例统计参数

参 数	变 换	符 号	单 位	$\bar{x}$	$\hat{\sigma}$	γ_{ij}
k	y	x_1	cm/s	−7.00	1.0	$\gamma_{12}=-0.90$
m_v	c	x_2	$cm^2/dyne$	−8.00	0.25	$\gamma_{23}=-0.90$
n		x_3	%	55	4	$\gamma_{13}=-0.90$

土层厚度 $L=100$ cm
网格点数 $J=50$，$\Delta z=2$ cm
模拟次数 200 次

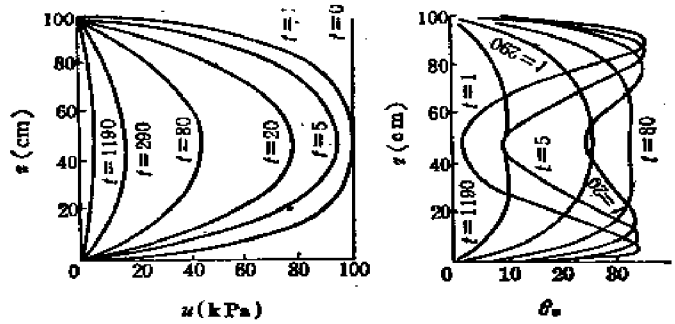


图 9.4 孔隙水压力均值及标准差的等时线

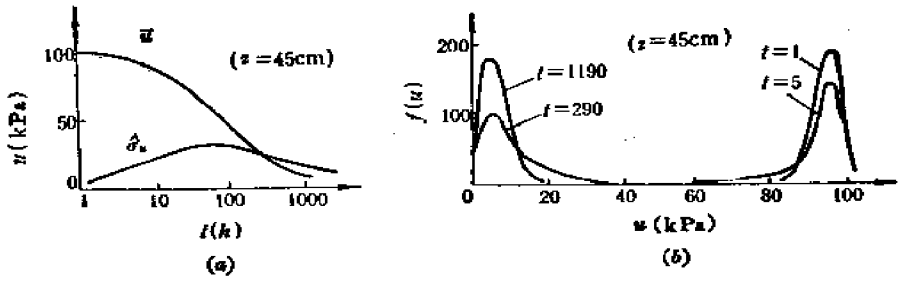


图 9.5 孔隙水压力的时程曲线及概率密度函数

在图 9-5(a) 中给出了土层中某一深度处 ($z=45$ cm) 孔隙水压力均值及其标准差随固结时间的变化曲线。从图可以看出，在 $t=100$ 小时附近，标准差达最大值。

在图 9-5(b) 中给出了不同时刻的孔隙水压力的概率密度函数。可以看出，孔隙水压力呈偏态分布，在固结开始时是呈左偏分布，当固结接近终了时又呈右偏分布。

将一维固结问题推广到两维和三维，同样可以用 Monte Carlo 有限差分法求得。一个计算实例的相关矩阵及统计参数见表 9-5，固结维数对计算结果的影响见图 9-6[4]。

表 9-5 参数相关矩阵

变 量	e_0	c_v	P_0'	$\lg k_z$	SL
e_0	1.0	0.680	−0.713	0.587	0.018
c_v	—	1.0	−0.127	0.332	−0.221
P_0'	—	—	1.0	−0.325	−0.127
$\lg k_z$	—	—	—	1.0	0.619
SL	—	—	—	—	1.0
平均值	3.092	1.578	0.312	−2.722	0.920
方 差	0.160	0.073	0.009	0.123	0.037

水平方向渗透系数 k_h 由下式求得：

$$\lg k_h = 1.342 \lg k_z + 1.092 + 0.212\, N(0,\ 1)$$

表 9-5 中的五个变量都服从正态分布，其中 SL 为渗透系数与孔隙比关系曲线的斜率。

从图 9-6 可以看出，当固结维数增加时，固结速率加快，一维固结概率分析所得的孔隙水压力均值大于确定性分析的结果，孔隙水压力的标准差随维数的增加而减小，亦即增加维数可提高固结分析的可靠性。不论是一维、二维或三维固结分析，都在孔隙水压力减小到为初始孔隙水压力 u_0 的 35% 附近时标准差达到最大值。

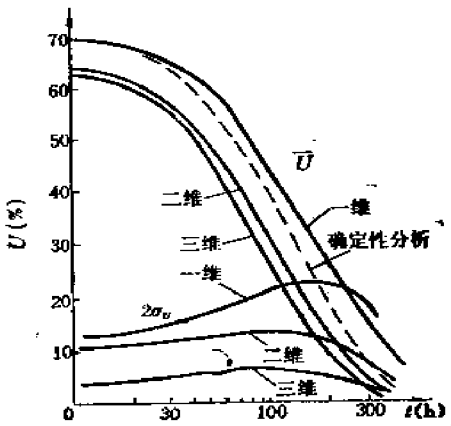


图 9.6 固结概率分析结果比较

9.5 随机有限元方法

在岩土工程中，有限元被广泛用来求解那种不能求得解析解的复杂问题。在可靠性计算中，如果

功能函数中的随机变量的分布特征值只有通过有限元分析才能得到，或者极限状态方程本身与有限元的控制方程直接有关时，可以用随机有限元方法求解。在随机有限元分析中，可以把位移作为基本未知量，也可以把应力作为基本未知量，根据求解问题的性质采用不同的方法。

9.5.1 随机有限元基本公式

对于线性静力分析，有限元法的控制方程为

$$[K]\{u\} = \{Q\} \tag{9.56}$$

式中，$\{u\}$为节点位移向量；$\{Q\}$为节点力向量；$[K]$为刚度矩阵，其中的元素表明该单元上发生一定节点位移时所对应的节点力，是土性参数和几何参数的函数，而与单元位置无关，一般可表达为：

$$[K] = [K(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \tag{9.57}$$

如把控制方程中的物理量分成随机变量均值和偏差两部分，则有：

$$[[\overline{K}] + [\Delta K]]\{\overline{u} + \Delta u\} = \{\overline{Q} + \Delta Q\} \tag{9.58}$$

展开后可得：

$$[\overline{K}]\{\overline{u}\} + [\overline{K}]\{\Delta u\} + [\Delta K]\{\overline{u}\} + [\Delta K]\{\Delta u\} = \{\overline{Q}\} + \{\Delta Q\} \tag{9.59}$$

其中$[\Delta K]\{\Delta u\}$是与变量的变异系数有关的二阶微量。当各变量的变异系数较小时，这个二阶微量可以略去不计。由此可将(9-59)分解为两个方程

$$[\overline{K}]\{\overline{u}\} = \{\overline{Q}\} \tag{9.60}$$

$$[\overline{K}]\{\Delta u\} = \{\Delta Q\} - [\Delta K]\{\overline{u}\} \tag{9.61}$$

前一个方程为确定性的有限元方程(9-60)式，只需把各个变量的均值代入即可。通过求解该式，可得到节点位移的均值。

下面着重讨论由变量的变异性引起的偏差部分(9-61)式。

令 $$\{\Delta Q\} - [\Delta K]\{\overline{u}\} = \{\Delta q\}$$

则 $$\{\Delta u\} = [\overline{K}]^{-1}\{\Delta q\} \tag{9.62}$$

$\{\Delta q\}$向量表示系统对于每一个随机变量偏离值的敏感性，就象一个恢复力那样来平衡刚度和力偏离值所引起的影响。把向量$\{\Delta q\}$分别对随机变量取偏导，如果略去高价偏导，可得下式：

$$\{\Delta q\} = \left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\right]\{\delta_{x_i}\} \tag{9.63}$$

位移u的协方差矩阵由下式求得：

$$[C_{uu}] = \{\Delta u\}\{\Delta u\}^T = [\overline{K}]^{-1}\left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\right]\{\delta_{x_i}\}^T\left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\right]^T[\overline{K}]^{-1T} \tag{9.64}$$

直接由上式计算协方差矩阵的计算效率是很差的。因而可以先计算单元协方差矩阵，再进行组合。

如果出现在刚度矩阵中的随机变量x_i的协方差矩阵为$[C_{xx}]$，则节点位移协方差矩阵$[C_{uu}]$可由下式得到：

$$[C_{uu}]_{m\times m} = [T]_{m\times n}[C_{xx}]_{n\times n}[T]^T_{n\times m} \tag{9.65}$$

式中$[T]$为转换矩阵：

$$[T]_{m\times n} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_{\overline{x}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.66}$$

$[C_{uu}]$的主对角元素表示了各节点位移分量的方差，而非对角元素表示了各节点位移之间的协方差，当它们为零时表示各节点位移相互独立。

转换矩阵可由下式求得：

$$[K]\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[K]\right)\{u\}=\left\{\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}_{\bar{x}_i}=[\bar{K}]^{-1}\left(-\left[\frac{\partial K}{\partial x_i}\right]_{\bar{x}_i}\{\bar{u}\}+\frac{\partial\{Q\}}{\partial x_i}\right)\tag{9.67}$$

如果要计算节点的应力，则有限元公式为：

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}\tag{9.68}$$

$$\{\varepsilon\}=[B]\{u\}\tag{9.69}$$

式中 $\{\sigma\}$和$\{\varepsilon\}$分别为单元的应力向量和应变向量，$[D]$为与土的应力应变特性有关的弹塑性矩阵，且：

$$[D]=[D]_e-[D]_p\tag{9.70}$$

其中：$[D]_e$为弹性矩阵；$[D]_p$为塑性矩阵。

另外，式(9-69)中的矩阵$[B]$为仅与节点坐标有关的应变矩阵。

与位移法的推导方法相同，我们可以写出应力的偏差向量：

$$\{\Delta\sigma\}=[\bar{D}][B]\{\Delta u\}+[\Delta D][B]\{\bar{u}\}\tag{9.71}$$

应力均值向量为：

$$\{\bar{\sigma}\}=[\bar{D}][B]\{\bar{u}\}\tag{9.72}$$

各应力分量之间的协方差矩阵为：

$$\begin{aligned}[C_{\sigma\sigma}]=&[\bar{D}][B]\{\Delta u\}\{\Delta u\}^T[B]^T[\bar{D}]^T+[\bar{D}][B]\{\Delta u\}\{\bar{u}\}^T[B]^T[\Delta D]^T\\&+[\Delta D][B]\{\bar{u}\}\{\Delta u\}^T[B]^T[\bar{D}]^T+[\Delta D][B]\{\bar{u}\}\{\bar{u}\}^T[B]^T[\Delta D]^T\end{aligned}\tag{9.73}$$

对于不确定性问题的有限元分析正在深入发展之中，或使用摄动展开来考虑随机变量的不确定性的影响，但每一次只能计入某一指定变量的变异，而且公式十分繁复；或力图使计算简化以提高分析效率；或寻求新的途径。下面具体介绍不确定性有限元分析的两种实用方法。

9.5.2 有限元一次二阶矩法

求解节点位移时，功能函数可写作：

$$\{u\}=[K]^{-1}\{Q\}=\{g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\tag{9.74}$$

$\{x\}$为确定功能函数特征的随机向量。将功能函数$g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在各随机变量的设计验算点x_i^*上展开成Taylor级数($j=1,2,\cdots,m$；$i=1,2,\cdots,n$；且m为方程的阶数)，可得到：

$$\begin{aligned}g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&g_j(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\\&+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^*}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)^2\left(\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i^2}\right)\Big|_{x^*}\\&+\cdots+H.O.T.\quad(j=1,2,\cdots,m)\end{aligned}\tag{9.75}$$

当各随机变量变异系数较小时，可略去二次以上导数项，于是可线性化为：

均值：

$$\{\bar{u}\} = \{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)\} \tag{9.76}$$

方差：

$$V(\{u_j\}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}^2 \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)^2 \Big|_{x^*} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} \gamma_{ik}\delta_{xi}\delta_{xk} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^*} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\right)\Big|_{x^*}\right),$$

$$j = 1, 2, \cdots, m \tag{9.77}$$

式中：

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{\partial [K]^{-1}}{\partial x_i}\{Q\} + [K]^{-1}\frac{\partial \{Q\}}{\partial x_i}$$

求解应力分量时，功能函数可写成：

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u\} = \{g'(y_1, y_2, \cdots, y_n)\} \tag{9.78}$$

式中 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是出现在应力计算式中的各个随机变量，当然也包括了节点位移各分量。同理可得：

均值：

$$\{\bar{\sigma}\} = \{g'(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)\} \tag{9.79}$$

方差：

$$V(\{\sigma_j\}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}^2 \left(\frac{\partial g_j'}{\partial y_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} \gamma_{ik}\delta_{yi}\delta_{yk} \left(\frac{\partial g_j'}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial g_j'}{\partial y_k}\right)\right],$$

$$(j = 1, 2, \cdots, l) \tag{9.80}$$

式中：

$$\frac{\partial g_j'}{\partial \gamma_i} = [B][D]\frac{\partial \{u\}}{\partial y_i} + [B]\{u\}\frac{\partial [D]}{\partial y_i} = [B][D]\{Q\}\frac{\partial [K]^{-1}}{\partial x_i}$$

$$+ [B][D][K]^{-1}\frac{\partial \{Q\}}{\partial x_i} + [B][Q][K]^{-1}\frac{\partial [D]}{\partial y_i}$$

对于给定的可靠度计算问题，可建立位移平衡或应力平衡的概率极限状态方程，然后求解 $z \leqslant 0$ 的概率，即失效概率 P_f。

如已求得土体中每一个单元的应力的统计参数，根据已知的土体强度参数，则可用概率干涉理论来求解每个单元的局部失效概率，再进行整体稳定性的可靠性分析。

岩土工程中常用的 Mohr-Coulomb 准则在平面问题中可写成如下形式

$$z = \tau_s - \tau_{max} = c\cos\varphi + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\sin\varphi + \varepsilon^p H - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{9.81}$$

式中 ε^p——塑性应变；

H——硬化参数。

塑性应变 ε^p 很小，可作为确定性变量，则功能函数有 σ_x、σ_y、τ_{xy}、c、φ、H 等 6 个随机变量，可用验算点法求解可靠性指标 β 和 6 个验算点坐标值，用下式计算局部失效概率：

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(\beta) \tag{9.82}$$

对于一个坡高 70 m，坡角为 60° 的岩坡，参数的统计量见表 9-6，通过弹塑性随机有限元计算，局部失效概率的等值线见图 9-7[6]。

表 9-6 岩坡参数的统计特征

参 数	单 位	平均值	变异系数	相关系数
弹性模量	(kPa)	2.8×10^7	0.08	0.4
泊松比		0.3	0.05	
内摩擦角	(°)	55	0.05	−0.3
内聚力	(kPa)	350	0.10	
硬化参数	(kPa)	4×10^5	0.10	
容 重	t/m³	2.57	0.05	

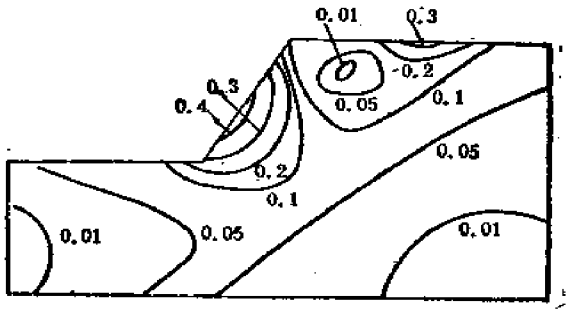


图 9.7 局部失效概率等值线

9.5.3 有限元——Monte Carlo 法

一次二阶矩方法尽管简单、实用，但对考虑随机变量分布的形式有不足之处，而失效概率对于极限状态方程中随机变量分布的尾部是十分敏感的。尽管在一次二阶矩方法中可以用当量正态方法考虑随机变量的概率模型，但在复杂体系的有限元分析时要作多次迭代计算，这是很不方便的。如果把有限元方法与 Monte Carlo 模拟耦合，就可以在有限元计算中反映随机变量的分布形式对计算结果的影响。

Monte Carlo——有限元方法的第一步是对极限状态方程中每一个随机变量，按其分布类型产生随机数；第二步是把每一次产生的随机数序列作为有限元分析的输入，通过有限元计算得到结果；第三步是对 N 次模拟计算的结果进行统计分析，就可以求得计算结果的统计特征(包括概率模型和统计参数)，或者直接计算失效概率。

上面只是 Monte Carlo——有限元方法的一般思路，对于具体的问题，应按实际问题解题步骤给出 Monte Carlo——有限元方法的程序框图。

例如，对于上面的岩坡稳定分析问题，可以作为 Monte Carlo——有限元方法来处理。在求解局部失效概率的极限状态方程中，前三个随机变量是用有限元求解的 σ_x, σ_y 和 τ_{xy}，而在求解应力的功能函数中，弹性模量和泊松比则是二个已知分布类型的随机变量，通过有限元分析建立这两组随机变量之间的联系。因此，解题的第一部分是用 Monte Carlo 方法产生弹性模量和泊松比的随机数，作为有限元分析的输入，求解得到三个应力的随机数；第二步是对后三个随机变量 c, φ, H 用 Monte Carlo 方法产生随机数，并和三个应力的随机数一起代入极限状态方程，判别指标函数，并按前述的方法求失效概率。

参 考 文 献

1. S. Valliappan, Finite Element+Probability=Reliability? Seminar on The Probabilistic Analyses of Soil

and Rock Structure.1980.
2. V.U.Nguyen and R.N.Chowdhury, Simulation for Risk Analysis with Correlated Variables, Geotechnique 1985.No.1.
3. R.A.Freeze Probabilistic One-Dimensional Consolidation ASCE, Vol.103.GT7, 1977.
4. D.Hwang and M.W.Witczak, Multidimensional Probabilistic Consolidation ASCE.Vol.110.GT8, 1984.
5. A. H-S Ang and W. H. Tang,Probability Concepts in Engineering Planning and Design Vol II. Decision, Risk, and Reliability.
6. 卢世深等译，岩土工程数值方法(中译本) 中国建筑工业出版社，1981年。
7. 桑国光、张圣坤编著，结构可靠性原理及其应用 上海交通大学出版社，1986年。
8. 邹进彰、熊文林，有限元在随机破坏及可靠性分析中的应用，第三届全国岩土力学数值分析和解析方法讨论会。
9. 叶军，Monte Carlo 法在结构可靠度分析中的应用，河海大学研究生毕业论文，1987。
10. 高大钊，岩土工程的可靠度分析，岩土工程学报 1983年第3，4期，1984年第1期。
11. 盛崇文，地基承载力的可靠指标计算，1986。
12. 毛尚之，考虑打桩影响的岸坡稳定概率分析，同济大学研究生毕业论文，1988。

第十章 浅基础

10.1 概述

条形基础、片筏基础和箱形基础是工业与民用建筑中大量采用的基础型式。按照惯例，浅基础是指基础宽度B比其埋深D大很多倍，而埋深$D\leqslant 5$ m的那些基础。

浅基础的结构型式按上部结构的特点、平面布置和对差异沉降的敏感性而选用。其埋深按有无地下室、土层构造和当地冻结深度而综合考虑。应当为基础选择合适的地基承载力。在软土地区，控制基础的总沉降、差异沉降或倾斜比充分利用地基承载力更重要。天津、上海、宁波和福州等地区的经验证明，在扣除开挖土重和浮力以后的基础附加应力小于土层的前期固结应力p_c时，沉降一般较小。而大于p_c时，沉降急剧增大。因此，经常利用补偿式基础，即开挖一定深度的基坑，使挖去的土重部份地或全部地补偿建筑物及基础的荷载，以期减小建筑物的沉降。

我国沿海地区的表层有一层厚1～4 m的亚粘土硬壳层。它可能由于长期的地下水位反复升降所产生的毛细压力所形成。这种土处于轻度超固结状态。工程师们经常采用较小的基础埋深，以保留更厚的硬壳层。

在本章中，只限于用数值方法来分析浅基础的形变和内力分布。决定反力分布是首要问题，因为基础和承重结构的形变和内力分布对反力分布的变化十分敏感。从土力学的观点看来，仅仅满足平衡条件的反力分布可能有很多解答，而既满足平衡条件，又满足基础挠曲和地基沉降之间的位移连续性条件和所有边界条件的反力分布则是唯一的。为了比较符合实际地决定反力分布，应当选择能反映当地土质情况的应力-应变关系。

近年来，北京、天津、上海、武汉、西安、郑州和保定地区对一些建筑物的反力分布、沉降特性和基础内力进行了现场实测或模型试验，大大丰富了人们对浅基础工作特性的认识。

土-结构物相互作用的研究在我国已获得很多成就。迄今为止，在设计中假设建筑底层柱脚为完全固定，以分析承重结构在不同荷载组合下的位移和内力。接着，把与结构物反力大小相等而方向相反的力系作用于基础上，用以分析基础的内力。在这里，只考虑两者之间的作用力联系而忽略变形的连续性条件。这种方法造成基础工程的很大浪费。相互作用分析的特点在于分析上部结构的劲度对减少基础挠曲和内力的作用，同时考虑基础挠曲在上部结构中产生附加应力和柱荷载重分布。定量地分析这种相互影响就是相互作用分析。研究桩-土体系、挡墙-锚杆-土体系、土-地下结构和加筋路堤-路基体系的相互作用则是本章内容的延伸。

10.2 条形基础

柱下条形基础广泛用于框架结构，也间或用于排架结构下的基础。它在局部软弱土上具有跨越作用。基础宽度B由地基承载力和变形条件决定，高度H经常取为跨径的1/6。不应片面强调减少基础断面以降低造价，而应当这样来选择断面及其劲度，使整个建筑物的形变状态和内力分布处于最优状态。

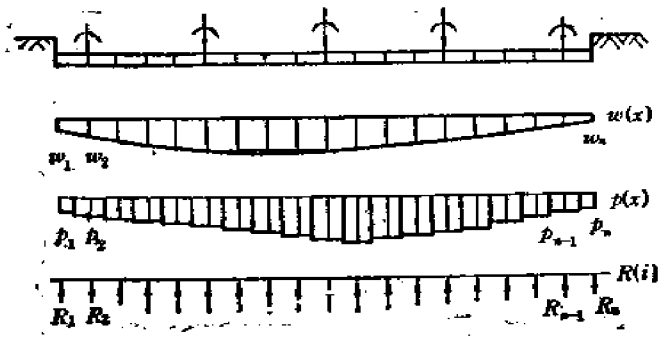


图 10.1 条形基础的挠度、分布反力和集中反力

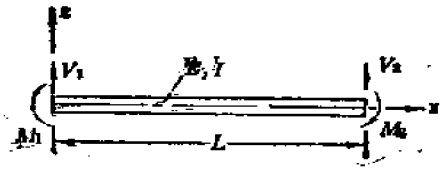


图 10.2 基础的内力

在图 10.1 中，把条形基础分为若干长度为 L 的梁单元。每一跨径则分成四个最好是六个单元，以便更准确地把握挠曲和内力的分布。每个单元有 i，j 两个结点，每个结点两个自由度：挠度 w 和转角 θ。相应的结点力为剪力 V 和弯矩 M（图 10.2）。联系结点力 $\{F\}^e$ 和结点位移 $\{\delta\}^e$ 的单元劲度矩阵 $[k]^e$ 可以用 *Galerkin* 原理建立。

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e \tag{10.1}$$

或

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{10.1a}$$

式中

$$[k]^e=\left[\begin{array}{cc:cc} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hdashline -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \tag{10.1b}$$

把所有的单元劲度矩阵集合成总劲度矩阵 $[K]$，它是对称的带状矩阵，同时把单元荷载列向量集合成总荷载列向量 $\{P\}$。于是得条形基础的平衡方程：

$$[K]\{w\}=\{P\}-\{R\} \tag{10.2}$$

式中 $\{P\}$ 是外荷列向量，而 $\{R\}$ 是地基集中反力列向量。

为了求 $\{R\}$，我国设计单位很多采用基床系数假说，即假设某点地基反力分布 $p(x)$ 只与该点沉降 s 成正比，而与邻近各点的沉降无关，即

$$p(x)=ks(x) \tag{10.3}$$

或

$$R(i)=LBks(i)=LBp(i) \tag{10.3a}$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_2 \\ 0 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ 0 \\ R_n \\ 0 \end{Bmatrix} = BLk \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & 0 & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_2 \\ 0 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ 0 \\ s_n \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{10.4}$$

或

$$\{R\} = [KS]\{s\} \tag{10.4a}$$

式中 k(kN/m³) 是地基的基床系数，表示基础产生单位沉降所需的反力。因为地基上的每点只有竖直位移自由度，而基础梁每个结点有二个自由度。应当把地基劲度矩阵$[KS]$增广以后才能迭加到基础梁总劲度矩阵$[K]$的主对角元中去。

现在考虑地基沉降$\{s\}$与基础挠曲$\{w\}$之间的位移连续性条件：

$$\{w\} = \{s\} \tag{10.5}$$

将式(10.5)和(10.4a)代入式(10.2)，于是有

$$([K] + [KS])\{w\} = \{P\} \tag{10.6}$$

对于自由支承在地基上的条形基础，有边界条件$V_1 = M_1 = 0$以及$V_n = M_n = 0$。因此在端结点1和n的平衡方程中，使主对角元为1，并划行划列，同时在右端项的相应位置上以w_1、θ_1和w_n，θ_n代替，即表示已考虑了全部的边界条件。

求解方程式(10.6)，得到全部挠度$w(i)$和转角$\theta(i)$。回代到式(10.1a)，用以计算弯矩和剪力分布。

10.3 片筏基础

在整个建筑下面采用带有或不带有纵横向基础梁的板基础，能够克服因柱荷载分布不均匀或局部软弱地基而形成的不均匀沉降。近来对残留于地表的文化层经过人工压实以后，在上面修筑六、七层居住建筑的不埋式片筏基础。

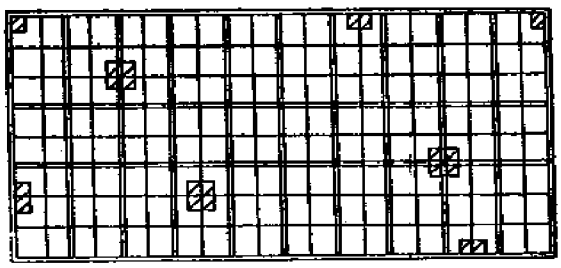


图 10.3 片筏基础和地基的有限元离散

采用有限单元法分析片筏基础的挠曲和内力时，首先将它离散为若干矩形板单元，并使地基单元的形心与板单元结点相重合（图10.3），以便在这些结点上建立平衡条件和位移连续性条件；其次建立基础梁、板的劲度矩阵和地基的柔度矩阵，并进而集合成基础-土体系的总劲度矩阵和总荷载列阵；最后，在引入边界条件以后，求解全部结点的位移，通过回代，求得基础内力和反力分布。把反力总和起来，是否与荷载的合力相等，以检查计算结果的正确性。

10.3.1 板单元的劲度矩阵

设基础-土体系的总坐标系为 XYZ，而基础单元的局部坐标系为 xyz。矩形板单元 $ijmp$ 有四个结点，相邻单元通过这些结点劲性地联结，使之既能传递横向力，又能传递弯曲应力。每个结点有三个自由度，即挠度 w，转角 θ_x 和 θ_y；相应地，有三个结点力，即剪力 V，弯矩 M_x 和 M_y。以结点 i 为例

$$\{\delta_i\} = \{w_i \ \ \theta_{xi} \ \ \theta_{yi}\}^T$$
$$\{F_i\} = \{V_i \ \ M_{xi} \ \ M_{yi}\}^T \tag{10.7}$$

联系单元结点力 $\{F\}^e$ 和结点位移 $\{\delta\}^e$ 的单元劲度矩阵 $[\mathrm{KB}]^e$（B 表示板）已经建立。它是 12 阶方阵。用子矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \\ \{F_m\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} KB_{ii} & KB_{ij} & KB_{im} & KB_{ip} \\ KB_{ji} & KB_{jj} & KB_{jm} & KB_{jp} \\ KB_{mi} & KB_{mj} & KB_{mm} & KB_{mp} \\ KB_{pi} & KB_{pj} & KB_{pm} & KB_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \\ \{\delta_m\} \\ \{\delta_p\} \end{Bmatrix} \tag{10.8}$$

或记为

$$\{F\}^e = [KB]\{\delta\}^e \tag{10.8a}$$

$$[KB] = \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \times$$

$$\begin{bmatrix}
AA & & & & & & & & & & & \\
BA & BB & & & & & & & & & & \\
-CA & -CB & CC & & & & & & & & & \\
DA & EA & FA & AA & & & & & & & & \\
EA & EB & 0 & BA & BB & & & & & & & \\
-FA & 0 & FC & CA & CB & CC & & & & & & \\
GA & -HA & -IA & JA & -KA & -LA & AA & & & & & \\
HA & HB & 0 & KA & KC & 0 & -BA & BB & & & & \\
IA & 0 & IC & -LA & 0 & LC & CA & -CB & CC & & & \\
JA & -KA & LA & GA & -HA & IA & DA & -EA & -FA & AA & & \\
KA & KC & 0 & HA & HB & 0 & -EA & EB & 0 & -BA & BB & \\
LA & 0 & LC & -IA & 0 & IC & FA & 0 & FC & -CA & CB & CC
\end{bmatrix} \tag{10.9}$$

（对称）

式中 E，ν 为基础板材料的弹性模量和泊松比，而 $2a$，$2b$，t 分别为板单元的长宽和厚度。

板单元劲度矩阵 $[KB]$ 中有 21 个独立变量，它们是

$$\begin{aligned}
AA &= 21 - 6\nu + 30b^2/a^2 + 30a^2/b^2 & GA &= 21 - 6\nu - 15b^2/a^2 - 15a^2/b^2 \\
BA &= 3b + 12\nu b + 30a^2/b & HA &= -3b + 3\nu b + 15a^2/b \\
BB &= 8b^2 - 8\nu b^2 + 40a^2 & HB &= 2b^2 - 2\nu b^2 + 10a^2 \\
CA &= 3a + 12\nu a + 30b^2/a & IA &= 3a - 3\nu a - 15b^2/a \\
CB &= 30\nu ab & IC &= 2a^2 - 2\nu a^2 + 10b^2 \\
CC &= 8a^2 - 8\nu a^2 + 40b^2 & JA &= -21 + 6\nu + 15b^2/a^2 - 30a^2/b^2
\end{aligned} \tag{10.10}$$

$$DA=-21+6\nu-30b^2/a^2+15a^2/b^2 \qquad KA=3b-3\nu b+30a^2/b$$
$$EA=-3b-12\nu b+15a^2/b \qquad KC=-2b^2+2\nu b^2+20a^2$$
$$EB=-8b^2+8\nu b^2+20a^2 \qquad LA=3a+12\nu a-15b^2/a$$
$$FA=3a-3\nu a+30b^2/a \qquad LC=-8a^2+8\nu a^2+20b^2$$
$$FC=-2a^2+2\nu a^2+20b^2$$

利用式(10.9)和(10.10)很容易编写板单元劲度矩阵$[KB]$的子程序。先完成下三角，然后利用对称性，再完成上三角。

10.3.2 基础梁单元劲度矩阵

每个梁单元有两个结点i，j。略去梁的轴向变形，每个结点也有三个自由度w、θ_x和θ_y，与此相对应的结点力为剪力V、弯矩M和扭矩T。纵向梁在某一结点的转角θ_x必然使横向梁在同一点产生θ_y，于是横向梁就产生扭矩T。反之亦然(图10.4)。

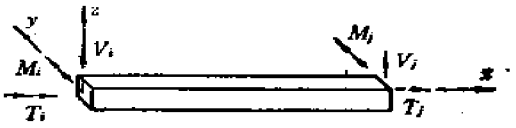


图10.4 基础梁的受力状态

在局部坐标系$oxyz$中，联系结点力$\{F\}^e$与结点位移$\{\delta\}^e$的单元劲度矩阵$[KL]$(L表示梁)如下：

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ T_i \\ V_j \\ M_j \\ T_j \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L & 0 \\ 0 & 0 & GJ/L & 0 & 0 & -GJ/L \\ \hdashline -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L & 0 \\ 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 & GJ/L \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \tag{10.11}$$

或记作

$$\{F\}^e=[KL]\{\delta\}^e \tag{10.11a}$$

式中 G——基础材料的剪切模量；

J——矩形断面梁在扭曲时的惯性矩，可由梁断面的高宽比h/b按式(10.12)求得：

$$J=\beta hb^3 \tag{10.12}$$

h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263

纵向基础梁的局部坐标与总坐标系一致，不需作坐标变换。横向基础梁则不然。最好事先为横向梁建立相对于总坐标系的单元劲度矩阵，以免去坐标变换。

有的板单元的边界有一个或几个梁单元，有的一个也没有。因此，要按照板单元上梁单元的方位和个数分为几种类型，以便集合成总劲度矩阵：

$$([KB]+[KL])\{w\}=\{P\}-\{R\} \tag{10.13}$$

式中 $\{R\}$——地基集中反力列向量。

10.3.3 地基柔度矩阵

为了表达式(10.13)中的集中反力列向量 $\{R\}$，需要建立地基的劲度矩阵或柔度矩阵。为此目的，有各种不同的土本构关系可供使用。目前经常用基床系数法以及分层总和法。

基床系数法

对上海一些高层房屋的基础反力和沉降进行的观测，可以据以反算基床系数(kN/m^3)值(表 10.1)。

表 10.1 上海若干高层房屋下地基的基床系数

工程名称	结构型式	平均反力 (kPa)	平均沉降 (cm)	基床系数 k (kN/m^3)
康乐大楼	板墙框架	185	10.8	1745
四平大楼	板墙	188	7.7	2442
华盛大楼	预制框架	156	16.54	940
胸科大楼	预制框架	155	25.33	612
北站旅社	框架	102	6.3	1616
陆家宅大楼	板墙	132.5	5.6	2366
妇幼大楼	框架	96.1	24.6	391

大多数房屋基础的边长比 $L/B=3\sim5$。把基础的底面积分为 40 块，将实测反力的平均值 p_0 除以实测沉降的平均值 $S_0=\Sigma S(i)/40$ 就得到基床系数 k。它在 $940\sim2400\ kN/m^3$ 之间变化，而平均值为 $1620\ kN/m^3$。比目前设计单位使用的数值 $k=8000\sim10000\ kN/m^3$ 小很多。

对各个建筑物的反力实测资料作统计分析，得到淤泥质粘土和粉质粘土上的反力系数 $\beta(x,y)$，即平均反力的倍数如表 10.2 及 10.3 所示。

表 10.2 淤泥质粘土上的反力系数 $\beta(x,y)$

0.906	0.966	0.814	0.738	0.738	0.814	0.966	0.906
1.124	1.197	1.009	0.914	0.914	1.009	1.197	1.124
1.235	1.314	1.109	1.006	1.006	1.109	1.314	1.235
1.124	1.197	1.009	0.914	0.914	1.009	1.197	1.124
0.906	0.966	0.814	0.738	0.738	0.814	0.966	0.906

表 10.3 亚砂土上的反力系数 $\beta(x,y)$

0.925	0.850	0.835	0.814	0.814	0.835	0.850	0.925
1.147	1.054	1.034	1.009	1.009	1.034	1.054	1.147
1.261	1.157	1.137	1.109	1.109	1.137	1.157	1.261
1.147	1.054	1.034	1.009	1.009	1.034	1.054	1.147
0.925	0.850	0.835	0.814	0.814	0.835	0.850	0.925

根据反力系数$\beta(x, y)$对基床系数进行调整，即用$\beta(x, y)k$代替原来的平均k值，使基床系数的变化与实测反力的分布相协调，这样，基础的计算挠曲与实测挠曲就比较接近。

基于上述想法，可以将反力分布$p(x, y)$表示为

$$p(x, y) = \beta(x, y)kw(x, y) \tag{10.14}$$

在式(10.14)中已包括了基础挠度与地基沉降相协调的连续性条件。

集中反力R为

$$R(i) = A\beta(x, y)kw(x, y) \tag{10.15}$$

式中A为地基单元的面积。当i分别为内部结点、边缘结点或角结点时，A分别为$4ab$，$2ab$或ab。

地基位移只有一个自由度，而基础结点有三个自由度。因此，应当把式(10.15)增广，然后把式(10.13)改写为

$$([KB] + [KL] + A\beta(x, y)k)\ \{w\} = \{P\} \tag{10.16}$$

解出$\{w\}$以后，代入式(10.8)和(10.11)，便可以求得基础板和基础梁的内力；代入式(10.15)，可以得反力分布。

下面是用基础床系数法计算基础板的一个子程序。

子程序 WINKLER

【功能】 建立地基劲度矩阵$[KS]$，并将之合并到片筏基础总劲度矩阵$ASTIF$中主对角元的适当位置上。

【标识符】

K——最大结点编号；

KK——最大自由度编号；

KKK——一维存放总劲度矩阵系数的末地址；

WK——平均基床系数；

IC——竖直自由度在结点自由度中的位置编号；

ILS——存贮全部结点自由度的一维数组；

【说明】 第14-15行求内部各结点的地基刚度系数；第16-19行求四角结点的地基刚度系数；第20-27行求片筏基础左右上下各边缘结点的劲度系数；第28-31行找出各结点竖直位移自由度的地址，并把地基劲度系数加到片筏基础总劲度系数矩阵的相应主对角元上去。

```
 1:*       SUBROUTINE WINKLER(KS,A,B,WK,
 2:*       M,N,PO,SO,S,BETA,ASTIF,NDOFN,
 3:*       KK,IC,KKK,ILS)
 4:        DIMENSION KS(K),S(K),BETA(K),
 5:*       ASTIF(KKK),ILS(KK)
 6:        K=(N+1)*(M+1)
 7:        SO=0
 8:        DO 1 I=1,K
 9:  1     SO=SO+S(I)
10:        SO=SO/K
11:        WK=PO/SO
12:        DO 2 I=1,K
13:  2     WK1(I)=A*B*BETA(I)*WK
14:        DO 3 I=M+3,K-M-2
15:  3     KS(I)=4.*WK1
16:        KS(1)=WK1
17:        KS(K)=WK1
18:        KS(M+1)=WK1
19:        KS(K-M)=WK1
20:        DO 4 I=2,M
21:  4     KS(I)=2.*WK1
22:        DO 5 I=K-M+1,K-1
23:  5     KS(I)=2.*WK1
24:        DO 6 I=2*(M+1),K-M-1,M+1
25:  6     KS(I)=2.*WK1
26:        DO 7 I=M+2,K-2*M-1,M+1
27:  7     KS(I)=2.*WK1
28:        DO 8 I=1,K
29:        J1=NDOFN*(I-1)+IC
30:        J1=ILS(J1)
31:  8     ASTIF(J1)=ASTIF(J1)+KS(I)
32:        RETURN
33:        END
```

分层总和法

用土力学中熟知的分层总和法来建立地基柔度矩阵[f]。其中系数 $f_{ij}(i=1,2,\cdots n$, 为计算点，$j=1,2,\cdots,n$ 为荷载点，n 为结点数)表示当 j 点有单位反力 $R_j=1$ 时，在 i 点引起的沉降为若干。

该法的优点在于简单明了，易于掌握；能考虑土分层的特点；能考虑相邻建筑物的影响；所使用的参数，即压缩模量 E_S 有明确的定义和试验方法；能考虑 E_S 值随深度的变化；还可以考虑地基的受荷历史，亦即在初加载或者卸载-再加载曲线上取相应的 E_S 值。而缺点在于基础边缘的计算反力大于实测值，导致基础内力过大。这可以在分析中对第一次算出的边缘反力给以限制，例如不得大于土的临塑荷载，然后再分析一次。上述缺点即可克服。

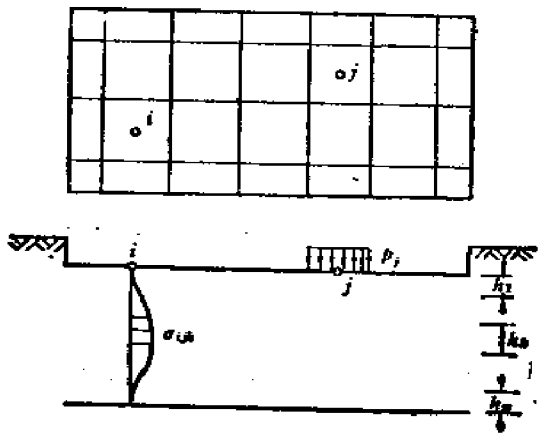


图 10.5 用分层总和法建立地基柔度矩阵

地基各点的沉降 $\{s\}$ 通过柔度矩阵[f]与反力向量$\{R\}$建立联系，即

$$\{s\}=[f]\{R\} \tag{10.17}$$

或

$$\{R\}=[f]^{-1}\{s\}=[KS]\{s\} \tag{10.18}$$

式中

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(\sigma_{ij})_k h_k}{(E_s)_k} \tag{10.19}$$

$(\sigma_{ij})_k$ 为 j 点有反力 $p_j=1/A_j$ 作用时，在 i 点下土层 k 的中点产生的附加应力；而 m 为自基础底面到压缩层下限的分层数目；$(E_s)_k$ 及 h_k 分别为土层 k 的压缩模量和层厚。

当土层的层面略有倾斜，但层厚相差不大时，可以设界面为水平的，以简化计算。

为了减少计算工作量，可以利用片筏基础、荷载以及边界条件的对称性，而只取二分之一或四分之一基础来分析。

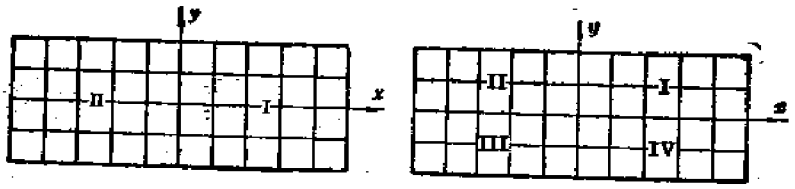


图 10.6 分析二分之一或四分之一片筏基础

当仅分析二分之一基础时，沿图 10.6 中对称轴 y 的法线方向，有边界条件

$$\{\theta_y\}_{x=0}=\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}_{x=0}=0 \tag{10.20}$$

同时地基的柔度矩阵[f]为

$$[f]=[f]_{\mathrm{I,I}}+[f]_{\mathrm{I,II}} \tag{10.21}$$

当分析四分之一基础时，沿图 10.6 的两个对称轴线上有边界条件：

$$\{\theta_y\}_{x=0}=\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\}_{x=0}=0$$

以及

$$\{\theta_x\}_{y=0}=\left\{\frac{\partial w}{\partial y}\right\}_{y=0}=0 \tag{10.22}$$

同时，地基的柔度矩阵$[f]$为

$$[f]=[f]_{\mathrm{I,I}}+[f]_{\mathrm{I,II}}+[f]_{\mathrm{I,III}}+[f]_{\mathrm{I,IV}} \tag{10.23}$$

应当注意，在建立基础板的劲度矩阵时，只需考虑二分之一或四分之一板块即可。

10.3.4 地基-基础体系

在建立地基柔度矩阵$[f]$以后，对$[f]$求逆，即可得地基的劲度矩阵$[KS]$，如式(10.18)所示。于是得地基-基础体系的矩阵方程

$$([KB]+[KL]+[KS])\{w\}=\{P\} \tag{10.24}$$

式中 KB、KL及KS分别为基础板、梁和地基土的劲度矩阵。

$\{w\}$为总位移列向量；

$\{P\}$为荷载列向量。

由于地基表面与基础底面之间没有转角的连续性，而只有竖直位移的连续性，即

$$\{s\}=\{w\} \tag{10.25}$$

为了使基础的劲度矩阵$(KB+KL)$得以与地基劲度矩阵KS相加，有必要把θ_x与θ_y当作内部自由度处理。即从$(KB+KL)$中把与w有关的自由度与θ_x、θ_y分离开来：

$$\begin{Bmatrix}P\\M\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ww}&K_{w\theta}\\K_{\theta w}&K_{\theta\theta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\\theta\end{Bmatrix} \tag{10.26}$$

或

$$\begin{aligned}\{P\}&=K_{ww}\{w\}+K_{w\theta}\{\theta\}\\\{M\}&=K_{\theta w}\{w\}+K_{\theta\theta}\{\theta\}\end{aligned} \tag{10.26a}$$

由上式中的第二式解出$\{\theta\}$：

$$\{\theta\}=K_{\theta\theta}^{-1}[\{M\}-K_{\theta w}\{w\}] \tag{10.27}$$

并代入第一式，得

$$(K_{ww}-K_{w\theta}K_{\theta\theta}^{-1}K_{\theta w})\{w\}=\{P\}-K_{w\theta}K_{\theta\theta}^{-1}\{M\}$$

或记作

$$[K_w]\{w\}=\{P\}^* \tag{10.28}$$

式中$\{P\}^*$为经过自由度凝聚所形成的外荷载。

把地基集中反力列向量$\{R\}$引入式(10.28)，并考虑到式(10.25)，于是有

$$[K_w]\{w\}=\{P^*\}-\{R\} \tag{10.29}$$

或

$$(K_w+K_s)\{w\}=\{P^*\} \tag{10.29a}$$

由式(10.29)解出基础板所有结点的挠度，代入式(10.27)，再求得板结点的转角$\{\theta\}$。通过回代，求基础弯矩的分布；将$\{w\}$代入$\{R\}=[K_s]\{w\}$中，可求得反力分布。用反力总和与外荷载合力是否相等来检查计算结果的正确性。

子程序说明

用分层总和法计算地基变形的关键在于建立地基的柔度矩阵。

1．子程序 SFDD

【功能】 求出地基柔度系数并存贮在 FDD 数组中。

【标识符】

SI——各分层变形

ZO——从设计地面到各土层中点的距离

H——各分层厚度

KI——压缩层范围内的分层数目

D1——基础埋深

GX1, GY1——计算点 i 的坐标

GX2, GY2——荷载点 j 的坐标

R——规定的距离，当 i，j 间距小于 R 时，用分布荷载求地基应力，否则，用集中荷载求地基应力

【说明】 在子程序 SFDD 中要调用子程序 SIM 或 SIM1，先形成柔度矩阵 FDD 的下三角，利用对称性，再形成上三角。

2. 子程序 SIM

【功能】 是用角点法计算地基应力，接着计算地基变形。

【标识符】

A2, B2, DX1, DY1——角点法中各有关受荷面积的边长

ZO——从设计地面算起的深度

Z——从基础底面算起的深度

AA1, BB1, CC1, DD1——角点法中四个分块在土层中点的应力值

【说明】 第 23-30 行，根据 i，j 两点的相对位置，把应力叠加；第 31 行是用分层总和法求单位反力作用下的变形。

函数过程 SGMAZO 用于求角点应力。其公式见土力学教科书。

3. 子程序 SIM1 可用来求集中力作用下的地基应力。各种变量已在前面说明。

```
 1:*         SUBROUTINE SFDD(SI,ZO,H,ES,KI,
 2:*         D1,A,B,GX2,GY2,GX1,GY1,ND,R)
 3:  c
 4:  c       FLEXIBILITY MATRIX OF SOIL
 5:  c
 6:          DIMENSION SI(KI),ZO(KI),H(KI),
 7:*         ES(KI),GX1(ND),GY1(ND),
 8:*         GX2(ND),GY2(ND)
 9:          COMMON/C2/FDD(63,63)
10:          DO 4 I=1,ND
11:          DO 4 J=1,I
12:          DX=ABS(GX2(J)-GX1(I))
13:          DY=ABS(GY2(J)-GY1(I))
14:          R1=SQRT(DX*DX+DY*DY)
15:          IF(R1.GT.R) GOTO 10
16:          P=1./(4.*A*B)
17:          CALL SIM(SI,ZO,H,ES,KI,D1,D1,
18:*         P,A,B,DX,DY)
19:          GOTO 11
20:   10     CALL SIM1(SI,ZO,H,ES,KI,D1,
21:*         D1,1.,R1)
22:   11     DO 5 M=1,KI
23:    5     FDD(I,J)=FDD(I,J)+SI(M)
24:    4     CONTINUE
25:          RETURN
26:          END

 1:*         SUBROUTINE SIM1(SI,ZO,H,ES,KI,
 2:*         D1,D2,P,R1)
 3:  c       SETTLEMENT DUE TO
 4:  c       CONCENTRATED LOAD P
 5:  c
 6:          DIMENSION SI(KI),ZO(KI),
 7:*         H(KI),ES(KI)
 8:          DO 9 M=1,KI
 9:          EZO=ZO(M)-AMAX1(D1,D2)
10:          IF(EZO) 10,10,20
11:   10     SI(M)=.0
12:          GOTO 9
13:   20     Z=ZO(M)-D2
14:          SGM=3.*P/(2.*3.14159*Z*Z*
15:*         SQRT((1.+(R1/Z)**2)**5))
16:          SI(M)=SGM*H(M)/ES(M)
17:    9     CONTINUE
18:          RETURN
19:          END

 1:*     SUBROUTINE SIM(SI,ZO,H,ES,KI,
 2:*     D1,D2,P,A,B,DX,DY)
 3:  c
 4:  c   SETTLEMENT EVALUATION BY MEANS
 5:  c   OF CORNER POINT METHOD
 6:  c
 7:      DIMENSION SI(KI),ZO(KI),H(KI),
 8:*     ES(KI)
 9:      A2=ABS(DX+A)
10:      B2=ABS(DY+B)
11:      DX1=ABS(DX-A)
12:      DY1=ABS(DY-B)
13:      DO 9 M=1,KI
14:      EZO=ZO(M)-AMAX1(D1-D2)
15:      IF(EZO) 10,10,20,
16:  10  SI(M)=0
17:      GOTO 9
```

```
18: 20   Z=ZO(M)-D2
19:      AA1=SGMAZC(A2,B2,P,Z)
20:      BB1=SGMAZC(A2,DY1,P,Z)
21:      CC1=SGMAZC(DX1,B2,P,Z)
22:      DD1=SGMAZC(DX1,DY1,P,Z)
23:      IF(DX.LE.A.AND.DY.LE.B)
24:      SGM=AA1+BB1+CC1+DD1
25:      IF(DX.GT.A.AND.DY.LE.B)
26:      SGM=AA1+BB1-CC1-DD1
27:      IF(DX.LE.A.AND.DY.GT.B)
28:      SGM=AA1-BB1+CC1-DD1
29:      IF(DX.GT.A.AND.DY.GT.B)
30:      SGM=AA1-BB1-CC1+DD1
31:      SI(M)=SGM*H(M)/ES(M)
32:  9   CONTINUE
33:      RETURN
34:      END
35:
36:
37:      FUNCTION SGMAZC(A2,B2,P,Z)
38:      X1=A2*B2/(Z*SQRT(A2*A2+B2*B2
39:     *+Z*Z)+Z*Z))
40:      X2=Z*Z*(A2*A2+B2*B2+2.*Z*Z)/
41:     *((A2*A2+Z*Z)*(B2*B2+Z*Z))
42:      X3=ATAN(X1)
43:      SGMAZC=(X1*X2+X3)*P/(2.*3.14159)
44:      RETURN
45:      END
```

10.4 不规则片筏基础

自八十年代初期以来，高层房屋的平面型式多为长宽比为 1～4 的矩形。近来，高层房屋的平面造型有更多的变化（图 10.7）。前面所述的矩形板单元不能很好地模拟基础平面形状的变化，而三角形板单元则更合适。

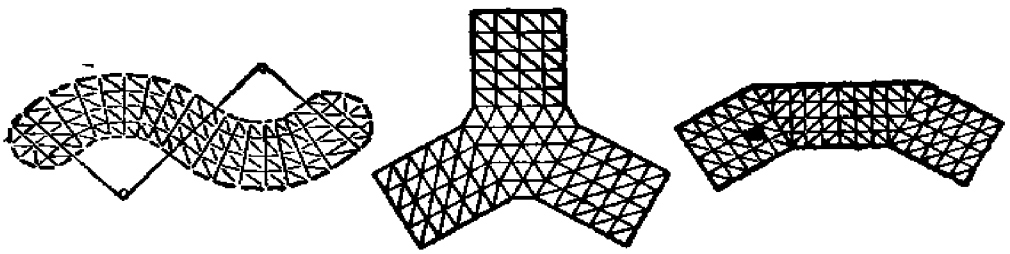


图 10.7 不规则片筏基础

三角形薄板单元(图 10.8) 有三个结点，每个结点有三个相应于总坐标系的自由度 w、θ_x 和 θ_y。

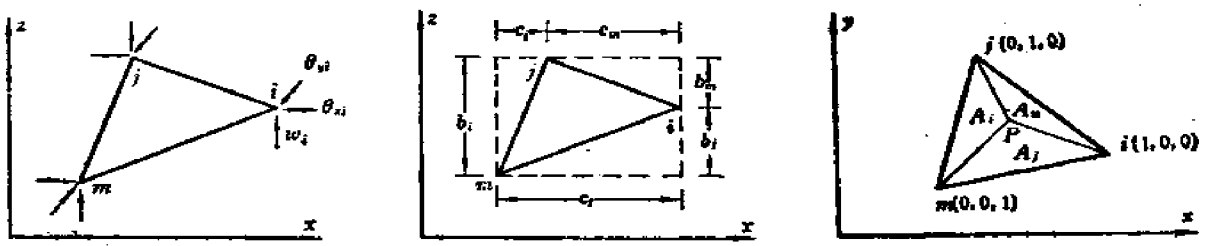


图 10.8 三角形板单元的位移和几何性质　　图 10.9 面积坐标

单元结点位移为

$$\{\delta\}^e = \{w_i\ \theta_{xi}\ \theta_{yi}\ w_j\ \theta_{xj}\ \theta_{yj}\ w_m\ \theta_{xm}\ \theta_{ym}\}^T \tag{10.30}$$

而相应的单元结点力为

$$\{F\}^e = \{W_i\ M_{xi}\ M_{yi}\ W_j\ M_{xj}\ M_{yj}\ W_m\ M_{xm}\ M_{ym}\}^T \tag{10.31}$$

单元内任意一点 P 的位置用面积坐标 L 表示(图 10.9)：

$$L_i = A_i/A,\ L_j = A_j/A,\ L_m = A_m/A \tag{10.32}$$

同时有

$$L_i + L_j + L_m = 1 \tag{10.33}$$

其中 A 为三角形单元的面积，而 A_i 为结点 i 的对边与 P 点所形成的三角形面积，余类推。

A_i 等由式

$$A_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2 \tag{10.34}$$

定义，其中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= -x_j + x_m \end{aligned}\right\} \tag{10.35}$$

式中 a_i 为结点 i 的对边与坐标系原点 0 所围成面积的一半，而 b_i 及 c_i 分别为 i 点的对边 jm 在坐标轴上的投影。

由式(10.32)、(10.33)和(10.34)可以建立面积坐标与直角坐标之间的关系：

$$\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \tag{10.36}$$

解出 x，y，得

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} \tag{10.37}$$

单元内任一点的位移分量为

$$\begin{aligned} \{f\} &= \{w\} \\ &= [N_{i1} \quad N_{i2} \quad N_{i3} \quad N_{j1} \quad N_{j2} \quad N_{j3} \quad N_{m1} \quad N_{m2} \quad N_{m3}]\{\delta\}^e \end{aligned} \tag{10.38}$$

式中的形函数

$$\left.\begin{aligned} N_{i1} &= L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_m - L_i L_j^2 - L_i L_m^2 \\ N_{i2} &= b_j L_i^2 L_m - b_m L_i^2 L_j + (b_j - b_m) L_i L_j L_m/2 \\ N_{i3} &= c_j L_i^2 L_m - c_m L_i^2 L_j + (c_j - c_m) L_i L_j L_m/2 \end{aligned}\right\} \tag{10.39}$$

使式(10.39)中的下标 ijm 轮转，可以写出其它的形函数。

在建立形变矩阵时，需要求形函数 N 的偏导数：

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial L_i}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial L_i} + \frac{\partial L_j}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial L_j} + \frac{\partial L_m}{\partial x}\frac{\partial N}{\partial L_m} \\ &= \frac{b_i}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_i} + \frac{b_j}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_j} + \frac{b_m}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_m} \\ \frac{\partial N}{\partial y} &= \frac{\partial L_i}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial L_i} + \frac{\partial L_j}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial L_j} + \frac{\partial L_m}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial L_m} \\ &= \frac{c_i}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_i} + \frac{c_j}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_j} + \frac{c_m}{2A}\frac{\partial N}{\partial L_m} \end{aligned} \tag{10.40}$$

对面积坐标的幂函数在单元范围内求积分时，应用下式将更方便：

$$\int_A L_i^a L_j^b L_m^c \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}2A \tag{10.41}$$

10.4.1 单元内力矩阵

可以证明，单元各结点的内力可以由下式决定：

$$\{M\}=\{W\ \ M_x\ M_y\}^T=\frac{1}{4A^3}[D][H][C][T]\{\delta\} \tag{10.42}$$

式中 $[D]$ 是基础板的弹性矩阵

$$[D]=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & 对 & \\ \nu & 1 & 称 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{10.43}$$

将坐标原点放在单元的形心，则矩阵$[H]$是

$$[H]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 3y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0\end{bmatrix} \tag{10.44}$$

矩阵$[T]$如下：

$$[T]=\begin{bmatrix}-c_i/2A & 1 & 0 & -c_j/2A & 0 & 0 & -c_m/2A & 0 & 0 \\ b_i/2A & 0 & 1 & b_j/2A & 0 & 0 & b_m/2A & 0 & 0 \\ -c_i/2A & 0 & 0 & -c_j/2A & 1 & 0 & -c_m/2A & 0 & 0 \\ b_i/2A & 0 & 0 & b_j/2A & 0 & 1 & b_m/2A & 0 & 0 \\ -c_i/2A & 0 & 0 & -c_j/2A & 0 & 0 & -c_m/2A & 1 & 0 \\ b_i/2A & 0 & 0 & b_j/2A & 0 & 0 & b_m/2A & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.44a}$$

矩阵$[C]$由六个列阵组成：

$$[C]=[\{C_x\}^i\ \ \{C_y\}^i\ \ \{C_x\}^j\ \ \{C_y\}^j\ \ \{C_x\}^m\ \ \{C_y\}^m] \tag{10.45}$$

式中

$$\begin{aligned}\{C_x\}^i&=[C_{x1}^i\ \ C_{x2}^i\ \ C_{x3}^i\ \ C_{x4}^i\ \ C_{x5}^i\ \ C_{x6}^i\ \ C_{x7}^i]^T \\ \{C_y\}^i&=[C_{y1}^i\ \ C_{y2}^i\ \ C_{y3}^i\ \ C_{y4}^i\ \ C_{y5}^i\ \ C_{y6}^i\ \ C_{y7}^i]^T\end{aligned} \tag{10.46}$$

各个表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}C_{xl}^i&=x_l^i b_m-y_l^i b_j+E_l F^i \\ C_{yl}^i&=x_l^i C_m-y_l^i C_j+E_l G^i\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&(i=i,\ j,\ m)\\&(l=1,\ 2\cdots 7)\end{aligned} \tag{10.47}$$

$$\begin{aligned}x_1^i&=2Ab_i(b_i+2b_j)/3; & y_1^i&=2Ab_i(b_i+2b_m)/3; \\ x_2^i&=4A(b_ic_i+b_jc_i+b_ic_j)/3; & y_2^i&=4A(b_ic_i+b_mc_i+b_ic_m)/3; \\ x_3^i&=2Ac_i(c_i+2c_j)/3; & y_3^i&=2Ac_i(c_i+2c_m)/3; \\ x_4^i&=b_i^2b_j; & y_4^i&=b_i^2b_m; \\ x_5^i&=2b_i(c_ib_j+b_ic_j); & y_5^i&=2b_i(c_ib_m+b_ic_m); \\ x_6^i&=c_i(c_ib_j+2b_ic_j); & y_6^i&=c_i(c_ib_m+2b_ic_m); \\ x_7^i&=c_i^2c_j; & y_7^i&=c_i^2c_m\end{aligned} \tag{10.48}$$

$$\begin{aligned}E_1&=2A(b_ib_j+b_jb_m+b_mb_i)/3; \\ E_2&=2A(c_ib_j+b_ic_j+c_jb_m+b_jc_m+c_mb_i+b_mc_i)/3; \\ E_3&=2A(c_ic_j+c_jc_m+c_mc_i)/3; \\ E_4&=b_ib_jb_m; \\ E_5&=c_ib_jb_m+c_jb_mb_i+c_mb_ib_j; \\ E_6&=c_ic_jb_m+c_jc_mb_i+c_mc_ib_j; \\ E_7&=c_ic_jc_m\end{aligned} \tag{10.49}$$

$$F^4=(b_m-b_j)/2$$
$$G^4=(c_m-c_j)/2 \tag{10.50}$$

10.4.2 单元劲度矩阵

三角形板单元的劲度矩阵$[KE]$为9×9方阵，

$$[KE]=\frac{1}{64A^5}[T]^T[C]^T[I][C][T] \tag{10.51}$$

式中$[C]$和$[T]$的形式同前，而矩阵$[I]$为

$$[I]=\frac{Et^3}{3(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu & & & & & \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & & 0 & & & \\ \nu & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 9I_1 & 3I_3 & 3\nu I_1 & 9\nu I_3 \\ & 0 & & 3I_3 & I_2+2(1-\nu)I_1 & (2-\nu)I_3 & 3\nu I_2 \\ & & & 3\nu I_1 & (2-\nu)I_2 & I_1+2(1-\nu)I_2 & 3I_3 \\ & & & 9\nu I_3 & 3\nu I_2 & 3I_3 & 9I_2 \end{bmatrix} \tag{10.52}$$

式中E，ν分别为基础材料的弹性模量和泊松比；t为基础板厚度。

$$I_1=(x_i^2+x_j^2+x_m^2)/12$$
$$I_2=(y_i^2+y_j^2+y_m^2)/12 \tag{10.52a}$$
$$I_3=(x_iy_i+x_jy_j+x_my_m)/12$$

在将各个单元劲度矩阵集合成总劲度矩阵$[KG]$，并把单元荷载列阵集合成总荷载列阵$\{P\}$以后，就可以写出不规则片筏基础的矩阵方程：

$$[KG]\{w\}=\{P\}-\{R\} \tag{10.53}$$

式中基础底面反力列向量可以用式(10.16)的方式来建立，于是有

$$([KG]+A\beta k[I])\{w\}=\{P\} \tag{10.54}$$

式中A是各结点i周围由各单元形心所围成的面积。

解出基础板的挠度和转角以后，代入式(10.42)便可求出片筏基础的内力分布。

10.4.3 子程序说明

1．子程序 ELESTF

建立三角形板单元劲度矩阵$[KE]$的子程序 ELESTF 可根据式(10.51)

$$[KE]=\frac{1}{64A^5}[T]^T[C]^T[I][C][T] \tag{10.51}$$

建立$[KE]$关键在于计算矩阵[I]、[C]、[T]和后二者的转置矩阵，然后相乘而得。

【功能】 建立三角形板单元劲度矩阵。

【说明】

1．调用子程序 CHO(K)，为每个单元形成结点编号；

2．调用子程序 CH2，形成各单元结点坐标，根据式(10.35)计算b、c值，同时计算单元面积s以及$A=2s/3$备用；

3．调用子程序 FORMC(C, CT)以建立矩阵$[C]$和$[C]^T$，根据式(10.45)；

4. 调用子程序 FORMAI(AI)以形成矩阵[I]，根据式(10.52)；

5. 调用子程序 MTMU，完成[I]*[C]，存放在[CB]中；

6. 语句 20，完成[CA]=[C]^T[I][C]，存放在[CA]中；

7. 调用子程序 FORMTR(T, TT)，建立矩阵[T]及其转置，根据式 (10.44a)；

8. 语句 30，用 [T]^T 前乘[CA]，存放在数组 [$KE1$] 中；

9. 语句 40，用[T]后乘 [$KE1$]，从而得到单元劲度矩阵[KE]。

```
1:*     SUBROUTINE ELESTF(KE,K,L,N)
2:      DIMENSION KE(9,9),C(6,7),
3:*     CT(6,7),T(6,9),TT(9,6),I(7,7)
4: c
5: c    ELEMENT STIFFNESS FOR TRIAN-
6: c    GULAR PLATE ELEMENT
7: c
8:      DO 10 NE=1,MBELEM
9:      CALL CHO(NE)
10:     CALL CH2
11:     CALL FORMC(C,CT)
12:     CALL FORMAI(AI)
13:     CALL MTMU(7,7,6,AI,C,CB)
14:     DO 20 K=1,6
15:     DO 20 N=1,6
16:     CA(K,N)=0.0
17:     DO 20 L=1,7
18: 20  CA(K,N)=CA(K,N)+CT(K,L)*CB(L,N)
19:     CALL FORMTR(T,TT)
20:     DO 30 K=1,9
21:     DO 30 N=1,6
22:     KE1(K,N)=0.0
23:     DO 30 L=1,6
24: 30  KE1(K,N)=KE1(K,N)+TT(K,L)*CA(L,N)
25:     DO 40 K=1,9
26:     DO 40 N=1,9
27:     KE(K,N)=0.0
28:     DO 40 L=1,6
29: 40  KE(K,N)=KE(K,N)+KE1(K,L)*
30:*    T(L,N)/(64.*S**5)
31: 10  CONTINUE
```

2. 子程序 FORMC(C, CT)

【功能】 建立矩阵[C]及其转置[C]^T。

【说明】

1. 语句 10–19，根据式(10.49)计算 E1 到 E7，存入 EE(7)中；

2. 语句 27–34，完成结点编号 i，j 和 m 的轮转；

3. 语句 35–36，根据式(10.50)，计算 F' 及 G'，存放在 FR 及 GR 中；

4. 调用子程序 XYL，以计算 x_i^l，y_i^l ($i=i$，j，m；$l=1, 2, \cdots, 7$)，分别存放在数组 XC 和 YC 中，式(10.48a, b)；

5. 语句 42 完成矩阵[C]的单数列；语句 44 完成矩阵[C]的双数列；

6. 调用子程序 TRNSPS，建立[C]的转置。

```
1:*     SUBROUTINE FORMC(C,CT)
2: c
3: c    FORM MATRIX C AND ITS
4: c    TRANSPOSE CT
5: c
6:      DIMENSION C(7,6),CT(6,7),EE(7),
7:*     XC(7),YC(7)
8:      COMMON/FOUND2/XNOT(6),BI,BJ,BM,
9:*     CI,CJ,CM,B(3),C(3),S,AO
10:     EE(1)=AO*(BI*BJ+BJ*BM+BM*BI)
11:     EE(2)=AO*(CI*BJ+CJ*BM+CM*BI
12:*    +BI*CJ+BJ*CM+BM*CI)
13:     EE(3)=AO*(CI*CJ+CJ*CM+CM*CI)
14:     EE(4)=BM*BJ*BM
15:     EE(5)=CI*BJ*BM+CJ*BM*BI
16:*    +CM*BI*BJ
17:     EE(6)=CI*CJ*BM+CJ*CM*BI
18:*    +CM*CI*BJ
19:     EE(7)=CI*CJ*CM
20:     A1=AO
21:     DO 530 N=1,3
22:     BB(N)=B(N)
23: 530 CONTINUE
24:     DO 535 N=1,3
25:     CC(N)=C(N)
26: 535 CONTINUE
27:     DO 520 K=1,3
28:     IF(K.EQ.1) THEN
29:     L=3
30:     ELSE
31:     L=K-1
32:     END IF
33:     N=K+1
34:     IF(K.EQ.3) N=1
35:     FR=(BB(L)-BB(N))/2.0
36:     GR=(CC(L)-CC(N))/2.0
37:     CALL XYL(XC,BB(K),CC(K),
38:*    BB(N),CC(N),A1)
```

```
      CALL XYL(YC,BB(K),CC(K),
     *BB(L),CC(L),A1)
      DO 525 KK=1,7
      C(KK,2*K-1)=XC(KK)*BB(N)
     *-YC(KK)*BB(L)+EE(KK)*FR
      C(KK,2*K)=XC(KK)*CC(N)
     *-YC(KK)*CC(L)+EE(KK)*GR
  525 CONTINUE
  520 CONTINUE
      CALL TRNSPS(7,6,C,CT)
      END
```

3. 子程序 FORMAI(AI)

【功能】 根据式(10.52)建立矩阵[I]；

【说明】

1. 计算公因子，存放在 IO 中；
2. 根据式(10.52a)计算 $I1$、$I2$ 及 $I3$；
3. 由于矩阵[I]的子阵具有对称性，先计算上三角，再完成下三角。
4. 子程序 FORMTR(T, TT)

【功能】 根据式(10.44a)建立矩阵[T]，及其转置 $[T]^T$。

【说明】 先建立第1、4、7列，再完成其它列，最后转置。

```
      SUBROUTINE FORMAI(AI)
c
c     FORM AI MATRIX
c
      REAL IO,I1,I2,I3
      DIMENSION AI(7,7)
      COMMON/CONST2/MNO(3),TO,EO,BMU,G
      COMMON/FOUND2/XI,XJ,XM,
     *YI,YJ,YM,BNO(12),S,AO
      CALL CLEAR2(7,7,AI)
      IO=TO**3*EO/3.0/(1-BMU*BMU)
      I1=(XI*XI+XJ*XJ+XM*XM)/12.0
      I2=(YI*YI+YJ*YJ+YM*YM)/12.0
      I3=(XI*YI+XJ*YJ+XM*YM)/12.0
      AI(1,1)=1.0
      AI(3,3)=1.0
      AI(4,4)=9.0*I1
      AI(2,2)=(1.0-BMU)/2.0
      AI(7,7)=9.0*I2
      AI(1,3)=BMU
      AI(4,5)=3.0*I3
      AI(5,5)=I2+2.0*(1.0-BMU)*I1
      AI(6,6)=I1+2.0*I2*(1.0-BMU)
      AI(4,6)=3.0*I1*BMU
      AI(4,7)=9.0*I3*BMU
      AI(5,6)=I3*(2.0-BMU)
      AI(6,7)=3.0*I3
      AI(5,7)=3.0*I2*BMU
      DO 540 K=1,7
      DO 540 N=1,7
      AI(K,N)=IO*AI(K,N)
      AI(N,K)=AI(K,N)
  540 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE FORMTR(T,TT)
c
c     FORM MATRIX T AND ITS
c     TRANSPOSE TT
c
      DIMENSION T(6,9),TT(9,6)
      COMMON/FOUND2/XNOT(12),B(3),
     *C(3),S,AON
      CALL CLEAR2(6,9,T)
      CALL CLEAR2(9,6,TT)
      T(1,1)=-C(1)/2.0/S
      T(2,1)=B(1)/2.0/S
      T(3,1)=T(1,1)
      T(4,1)=T(2,1)
      T(5,1)=T(1,1)
      T(6,1)=T(2,1)
      T(1,4)=-C(2)/2.0/S
      T(2,4)=B(2)/2.0/S
      T(3,4)=T(1,4)
      T(4,4)=T(2,4)
      T(5,4)=T(1,4)
      T(6,4)=T(2,4)
      T(1,7)=-C(3)/2.0/S
      T(2,7)=B(3)/2.0/S
      T(3,7)=T(1,7)
      T(4,7)=T(2,7)
      T(5,7)=T(1,7)
      T(6,7)=T(2,7)
      T(1,2)=1.0
      T(2,3)=1.0
      T(3,5)=1.0
      T(4,6)=1.0
      T(5,8)=1.0
      T(6,9)=1.0
      CALL TRNSPS(6,9,T,TT)
      END
```

10.5 箱形基础

箱形基础由顶板、底板和若干纵横隔墙组成。上部结构的柱子就放在纵横隔墙的交点

上。箱基具有很大的劲度和很好的整体性，因而能抵抗不均匀沉降。它广泛用作高层房屋的浅基础，也间或用作重力式采油平台、火力发电厂（如苏州望亭电厂，南京下关电厂）和人造卫星地面接收站（如上海莘庄地面接收站）的基础。

过去把箱基简化为等厚度板或作为均布反力作用下的倒置楼盖来设计。由于箱基既受到整体弯曲又受到局部弯曲，因此各个单元既在中面应力状态又在弯曲状态下工作。当箱基上的上部结构层数较少时，整体弯曲占优势；当上部结构的层数增多时，局部弯曲的比例逐步增大。

在本节中，详细分析箱基的工作状态，以便在弄清其形变和内力状态的前提下，作出简化的设计方法。

10.5.1 单元的形变和应力状态

用四结点的矩形板单元将箱基的顶板、底板和纵横隔墙离散。箱基是整个建筑物的组成部分，在荷载和反力共同作用下会产生整体弯曲：顶板受压，底板受拉，偶尔也观测到相反的情况，这是在浇筑箱基时，由于中间大，两端小的基坑底面回弹而引起的。这时各个单元处于中面应力状态（图 10.10a、b）。顶板和底板以纵横隔墙为支座，分别在楼面荷载和地基反力作用下产生局部弯曲；外墙在土压力和水压力作用下也是这样（图 10.10c、d）。

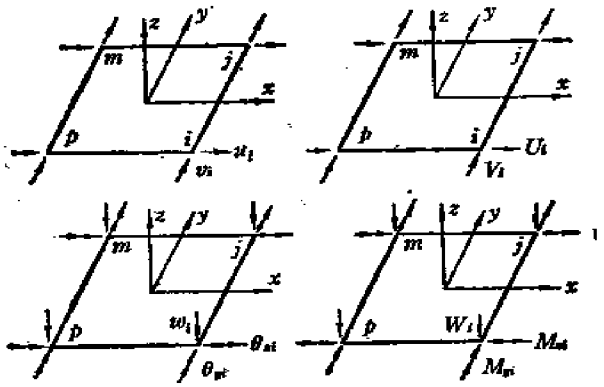


图 10.10 板单元的中面位移和应力状态以及弯曲位移和应力状态

箱基中不同方位的单元有不同的局部坐标（图 10.11）。单元结点用 $ijmp$ 编号，其几何尺寸为 $2a \times 2b \times t$。

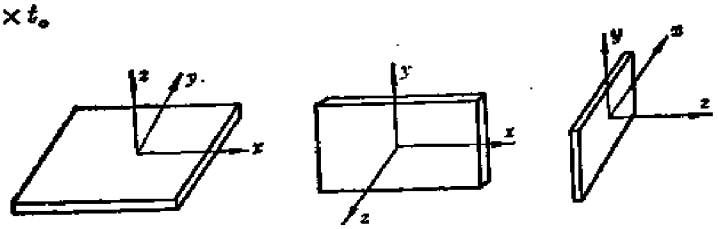


图 10.11 不同板单元的局部坐标

10.5.2 中面应力状态

板单元的形变和结点力均发生在板的中面内，因而经受拉伸或压缩。每个结点有二个自由度 u 和 v，而相应的结点力为 U 和 V。取 C^0 阶位移模式：

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \tag{10.55}$$

可以建立联系结点力 $\{F_p\}^e$ 与结点位移 $\{\delta_p\}^e$ 的单元劲度矩阵 $[KP]^e$：

$$\{F_p\}^e=[KP]^e\ \{\delta_p\}^e \tag{10.56}$$

式中 $\{F_p\}^e=[U_i\ \ V_i\ \ U_j\ \ V_j\ \ U_m\ \ V_m\ \ U_p\ \ V_p]^T$；

$\{\delta_p\}^e=[u_i\ \ v_i\ \ u_j\ \ v_j\ \ u_m\ \ v_m\ \ u_p\ \ v_p]^T$；

p 表示平面应力状态；

$$[KP]^e=\frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} A_1 & & & & & & & \\ A_2 & A_3 & & & \text{对} & & & \\ A_4 & A_5 & A_1 & & & & & \\ -A_5 & A_6 & -A_2 & A_3 & & & \text{称} & \\ A_7 & -A_2 & A_9 & A_5 & A_1 & & & \\ -A_2 & A_8 & -A_5 & A_{10} & A_2 & A_3 & & \\ A_9 & -A_5 & A_7 & A_2 & A_4 & A_5 & A_1 & \\ A_5 & A_{10} & A_2 & A_8 & -A_5 & A_9 & -A_2 & A_3 \end{bmatrix} \tag{10.57}$$

$$\begin{aligned} &A_1=2n_2+2m_1; && A_6=n_1-2m_2; && m_1=a(1-\nu)/(12b);\\ &A_2=(1+\nu)/8; && A_7=-n_2-m_1; && m_2=b(1-\nu)/(12a);\\ &A_3=2n_1+2m_2; && A_8=-n_1-m_2; && n_1=a/(6b);\\ &A_4=-2n_2+m_1; && A_9=n_2-2m_1; && n_2=b/(6a)\\ &A_5=(1-3\nu)/8; && A_{10}=-2n_1+m_1; \end{aligned}$$

10.5.3 弯曲状态

顶板和底板单元分别受到楼面荷载或地基反力作用，而外墙单元在土压力和水压力作用下，使单元受到挠曲变形。相应的单元劲度矩阵已经建立(式10.8)

$$\{F_B\}^e=\{KB\}^e\{\delta_B\}^e \tag{10.58}$$

式中结点力和结点位移分别为

$$\{F_B\}^e=[W_i\ M_{xi}\ M_{yi}\ W_j\ M_{xj}\ M_{yj}\ W_m\ M_{xm}\ M_{ym}\ W_p\ M_{xp}\ M_{yp}]^T \tag{10.59}$$

$$\{\delta_B\}^e=[w_i\ \theta_{xi}\ \theta_{yi}\ w_j\ \theta_{xj}\ \theta_{yj}\ w_m\ \theta_{xm}\ \theta_{ym}\ w_p\ \theta_{xp}\ \theta_{yp}]^T$$

而单元劲度矩阵

$$[KB]^e=\begin{bmatrix} KB_{ii} & KB_{ij} & KB_{im} & KB_{ip} \\ KB_{ji} & KB_{jj} & KB_{jm} & KB_{jp} \\ KB_{mi} & KB_{mj} & KB_{mm} & KB_{mp} \\ KB_{pi} & KB_{pj} & KB_{pm} & KB_{pp} \end{bmatrix} \tag{10.60}$$

10.5.4 两种形变状态的叠加

由于箱基中的各个单元处于中面应力和弯曲应力的共同作用下，必需将二者叠加。为了便于坐标变换矩阵的建立，再加上绕竖直轴 z 的转动自由度 θ_z。于是每个结点有六个运动自由度。单元劲度矩阵为：

$$
\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_i
\begin{bmatrix}
KP_{ii} & KP_{ij} & KP_{im} & KP_{ip} \\
KB_{ii} & KB_{ij} & KB_{im} & KB_{ip} \\
KP_{ji} & KP_{jj} & KP_{jm} & KP_{jp} \\
KB_{ji} & KB_{jj} & KB_{jm} & KB_{jp} \\
KP_{mi} & KP_{mj} & KP_{mm} & KP_{mp} \\
KB_{mi} & KB_{mj} & KB_{mm} & KB_{mp} \\
KP_{pi} & KP_{pj} & KP_{pm} & KP_{pp} \\
KB_{pi} & KB_{pj} & KB_{pm} & KB_{pp}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_i
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_j
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_m
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_p
\tag{10.61}
$$

或记作

$$
\{F'\}^e = [KE']^e \{\delta'\}^e \tag{10.61a}
$$

式中上面的一撇表示相对于局部坐标系。单元劲度矩阵是个由16个子阵组成的24阶方阵。

把整个箱基放在整体坐标系 XYZ 中，不同方位的单元均有各自的局部坐标，在集合成总劲度矩阵以前，应先进行坐标变换，以便把所有变量均统一到总坐标系中去。

结点 i 在局部坐标中的位移 $\{\delta'\}_i$ 与整体坐标系中的位移 $\{\delta\}_i$ 通过坐标变换矩阵 $[T]$ 相联系：

$$
\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cos xX & \cos xY & \cos xZ & 0 & 0 & 0 \\
\cos yX & \cos yY & \cos yZ & 0 & 0 & 0 \\
\cos zX & \cos zY & \cos zZ & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\
0 & 0 & 0 & \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\
0 & 0 & 0 & \cos zX & \cos zY & \cos zZ
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}
\tag{10.62}
$$

或记作

$$
\{\delta'\}_i = [T]\{\delta\}_i, \qquad i = i,\ j,\ m,\ p \tag{10.62a}
$$

在式(10.62)中，第一行的前三列表示整体坐标系中的位移分量 u，v，w 分别投影到局部坐标系的 x 轴上，并构成 u' 的组成部分。角位移分量不会产生线位移分量，所以后三列等于零。同理，线位移分量也不会产生角位移，所以下面三行的前三列等于零。

一个单元有四个结点 i, j, m 和 p, 于是有

$$\{\delta'\}^e=\begin{Bmatrix}\{\delta'\}_i\\ \{\delta'\}_j\\ \{\delta'\}_m\\ \{\delta'\}_p\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[T] & & & \\ & [T] & & 0\\ & & [T] & \\ & 0 & & [T]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\delta\}_i\\ \{\delta\}_j\\ \{\delta\}_m\\ \{\delta\}_p\end{Bmatrix} \tag{10.63}$$

或记作

$$\{\delta'\}^e=[L]\{\delta\}^e \tag{10.63a}$$

同理，总坐标系中的单元结点力 $\{F\}^e$ 与局部坐标系中的 $\{F'\}^e$ 也存在类似的关系，即

$$\{F'\}^e=[L]\{F\}^e \tag{10.64}$$

用式(10.61a)和(10.63a)代入上式，并注意到$[L]$是正交矩阵，于是有

$$\{F\}^e=[L]^T[KE'][L]\{\delta\}^e \tag{10.65}$$

或

$$\{F\}^e=[KE]\{\delta\}^e \tag{10.65a}$$

10.5.5 荷载列阵

作用在结点上的柱荷载和柱端力矩可直接集合到总荷载列阵中去。而分布荷载(反力、土压力和水压力)则应先化成静力等效的结点荷载。

单元受均布荷载 q 时，结点力为

$$\{P\}^e=\iint_A[N]^Tq\,dx\,dy \tag{10.66}$$

或

$$\{P\}^e=\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}W\\ T_x\\ T_y\end{Bmatrix}_i\\ \begin{Bmatrix}W\\ T_x\\ T_y\end{Bmatrix}_j\\ \begin{Bmatrix}W\\ T_x\\ T_y\end{Bmatrix}_m\\ \begin{Bmatrix}W\\ T_x\\ T_y\end{Bmatrix}_p\end{Bmatrix}=4qab\begin{Bmatrix}1/4\\ b/12\\ -a/12\\ 1/4\\ b/12\\ a/12\\ 1/4\\ -b/12\\ a/12\\ 1/4\\ -b/12\\ -a/12\end{Bmatrix} \tag{10.66a}$$

若有三角形分布荷载作用于单元上，则

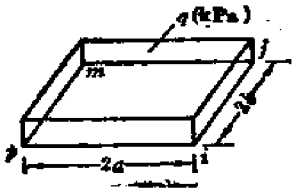


图 10.12 均布荷载下的结点荷载

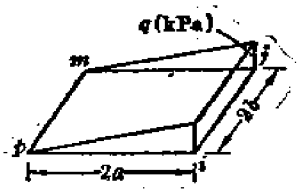


图 10.13 三角形荷载下的结点荷载

$$\{P\}^e = \iint [N]^T (xq/2a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{q}{2a}\iint [N]^T x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.67}$$

或

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}_i \\ \begin{Bmatrix} W \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}_j \\ \begin{Bmatrix} W \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}_m \\ \begin{Bmatrix} W \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}_p \end{Bmatrix} = 2qab \begin{Bmatrix} 7/20 \\ b/10 \\ -a/9 \\ 7/20 \\ b/10 \\ a/9 \\ 3/20 \\ -b/15 \\ a/18 \\ 3/20 \\ -b/15 \\ -a/18 \end{Bmatrix} \tag{10.67a}$$

10.5.6 总劲度矩阵

以图10.14所示的箱基为例，共有55个矩形板单元，40个结点。本例只用于数学目的。在设计中，每个板块应划分为更细的单元。

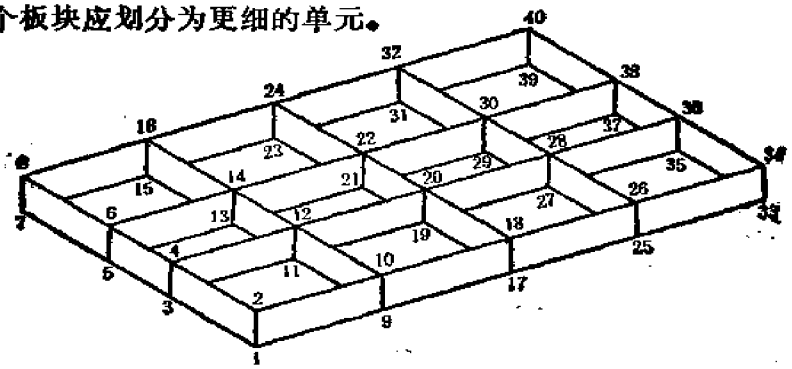


图 10.14 箱形基础的有限元划分

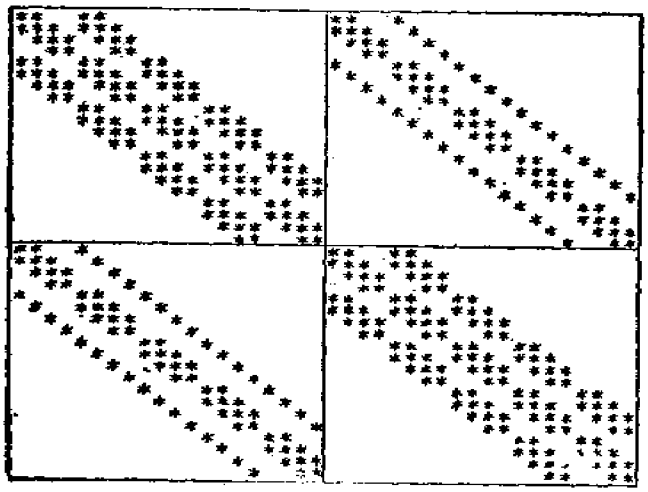


图 10.15 把箱形基础的总劲度矩阵分块

将所有单元劲度矩阵集合成总劲度矩阵，同时将单元荷载列阵集合成总荷载列阵（图10.15)。所有与地基接触的结点排列在一起(以 b 表示)，而内结点（以 i 表示）排列在一起。

于是得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b \\ P_i \end{Bmatrix} \tag{10.68}$$

从上式可得

$$\{\delta_i\} = K_{ii}^{-1}(P_i - K_{ib}\delta_b) \tag{10.69}$$

$$\{S_b\} = P_b - K_{bi}K_{ii}^{-1}P_i \tag{10.70}$$

$$(K_{bb} - K_{bi}K_{ii}^{-1}K_{ib})\delta_b = S_b \tag{10.71}$$

考虑基础底面反力 $\{R\}$ 以后，有

$$[K_b]\{\delta_b\} = \{S_b\} - \{R\} \tag{10.72}$$

式中 $[K_b] = K_{bb} - K_{bi}K_{ii}^{-1}K_{ib}$ 叫做边界劲度矩阵；$\{s_b\}$ 为边界荷载列向量。

为了表示地基反力 $\{R\}$，有许多计算地基的本构关系可供选择。为简单起见，可以用修正的基床系数法(10.3.5)，

$$([K_b] + A\beta k[I])\{\delta_b\} = \{S_b\} \tag{10.73}$$

这是箱基-土体系的平衡方程，其中已隐含了基础挠曲与地基沉降之间的连续性条件。求解式 (10.73)，得到基础底面各结点的位移，据以求底板的内力分布和反力分布；代入式(10.69)，可以求得所有内结点的位移分布和弯矩分布。

10.6 结构物-土相互作用

迄今为止，在分析高层房屋时，假设所有柱的柱脚不产生任何位移，并求出其形变和内力。接着把大小相等而方向相反的力系作用于基础上，分析其挠曲和弯矩分布。这种方法忽视了上部结构劲度对基础挠曲的制约作用以及基础结构在上部结构中引起的次应力。它夸大了基础的挠曲，同时降低了上部结构各构件的安全系数。

结构物-土相互作用分析视土与结构物为一整体。研究上部结构劲度对减小基础挠曲的影响以及基础挠曲对结构物的反馈作用。这种分析的关键问题在于如何定量地估计结构物的劲度对基础的贡献，以及用什么本构关系来计算土体位移。

我国建筑科学研究院、北京工业大学、同济大学、浙江大学、上海建筑设计院和上海民用建筑设计院对本课题进行了现场实测和理论研究工作，有的还进行了室内模型试验。建研院根据对我国许多高层房屋的反力实测资料进行统计分析，得出了反力分布系数供设计单位采用。这种反力系数是结构物劲度变化、土的变形特性、荷载分布和施工因素等的综合反映。实际上已考虑了结构物-土的相互作用。它反映了反力分布在不断调整以后的最终状态。根据所建议的反力系数所求得的基础挠曲接近于实测挠曲。上海建筑设计院和上海民用建筑设计院根据软土上高层建筑反力实测资料总结出反力分布系数(表 10.2 和10.3)，对基础设计有重要作用。北京工业大学等发现，随着房屋层数增多，平均沉降逐步加大，基础呈下凹挠曲。当建筑物有两翼配楼时，会出现上凹的挠曲。开始时的反力分布比较均匀，随着层数的加多，出现边缘反力集中，反力不均性加大。基础中的应力随建筑物的层数而增加，但均小于材料的容许应力。楼层刚度的形成滞后于楼层荷载的施加。浙江大学总结了

当结构物劲度增长时，对结构本身内力的影响较大，而对基础内力和差异沉降的影响较小；增大基础劲度，对减小结构内力和地基沉降差均有良好作用；不适当地加大基础厚度，对减小沉降差的作用甚微，但基础内力却急剧增大。同济大学进行了结构物-土相互作用的二维和三维分析，对结构物采用双重扩大子结构法或结构劲度直接凝聚法。还分析了由于地基固结而引起的结构物-土相互作用的时效。

10.6.1 结构劲度凝聚

用子结构方法把结构劲度进行凝聚，最后将凝聚的结构劲度加在基础上，以定量考虑结构物对基础挠曲的抑制作用。

从分析框架入手，用若干假想的水平切面把结构划分成若干由一个或几个楼层组成的子结构。基础作为子结构 $m-1$，而地基则作为子结构 m(图 10.16)。

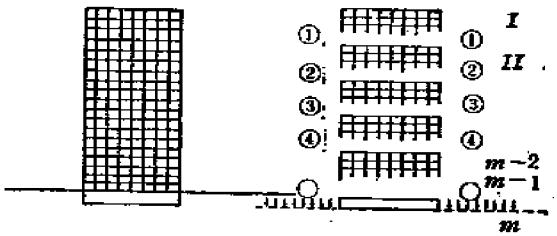


图 10.16 把结构物和地基划分为子结构

把每个子结构中位于假想水平切面上的结点称为边界结点(以 b 表示)，而所有不在边界上的结点统称为内结点(以 i 表示)。在平面问题条件下，每个结点有三个自由度，即 $\{\delta\}=\{u, v, \theta\}^T$，而三维结构，则有六个自由度。

首先为子结构 1 中的梁、柱单元建立相对于总坐标系的单元劲度矩阵与荷载列阵，然后集合成总劲度矩阵 $[K]_1$ 和总荷载列阵 $\{P\}_1$，于是有

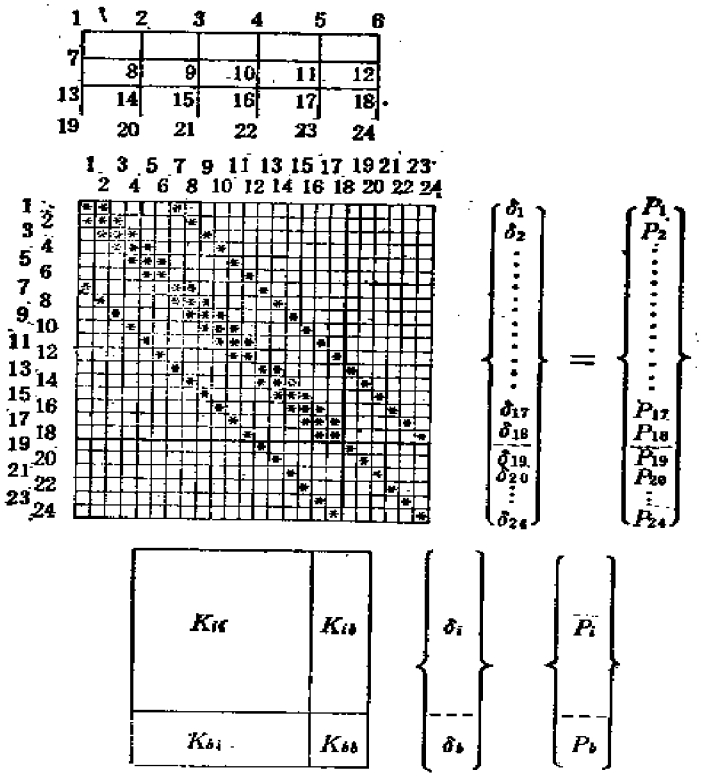


图 10.17 子结构劲度矩阵的分块

$$[K]_1\{\delta\}_1=\{P\}_1 \tag{10.74}$$

为了简单起见，暂时把下标1略去，并改写成分块形式：

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_i \\ P_b \end{Bmatrix} \tag{10.75}$$

式中 K_{ii} 是内部结点产生单位位移分量所引起的内结点力；而 K_{ib} 则由于边界结点产生单位位移分量在内结点引起的结点力，等等。

为了使推导不过于抽象，用图10.17来说明式(10.75)。很明显，分块矩阵具有对称性、带状和稀疏等特点。

通过运算，可以得到

内结点位移

$$\{\delta_i\}=K_{ii}^{-1}P_i-K_{ii}^{-1}K_{ib}\delta_b \tag{10.76}$$

边界上的平衡方程

$$(K_{bb}-K_{bi}K_{ii}^{-1}K_{ib})\delta_b=P_b-K_{bi}K_{ii}^{-1}P_i \tag{10.77}$$

或记作

$$[K_b]\{\delta_b\}=\{S_b\} \tag{10.77a}$$

式(10.77)表示先消除内部结点自由度 δ_i，待边界结点位移 δ_b 解出后，再求出 δ_i，进而解出子结构1的内力。该法能大大降低对计算机存贮量的要求。$[K_b]$ 称为边界劲度矩阵。$\{S_b\}$ 是修正的边界结点荷载，它表示内部结点劲度具有使边界结点荷载减小的趋势。

用同样方法建立子结构2的总劲度矩阵 $[K]_2$，并把上面求得的子结构1的边界劲度矩阵 $[K_b]_1$ 加到 $[K]_2$ 的相应结点上，并用式(10.77)和(10.77a)建立子结构2的边界劲度矩阵 $[K_b]_2$ 与荷载列向量 $\{S_b\}_2$。

这样的方法称为结构劲度凝聚，依次地把上面子结构的边界劲度和边界荷载列阵传递给下面子结构，直到把第 $m-2$ 个子结构的 $[K_b]_{m-2}$ 和 $\{S_b\}_{m-2}$ 传给基础时，就完成上部结构的劲度和荷载对基础的贡献。

劲度凝聚的过程可以用图10.18形象地表示。

基础也是个子结构，它的单元划分应更精细些，以把握其挠度和内力分布。基础没有内结点，只有边界结点。将各单元劲度矩阵集合成基础的总劲度矩阵 $[KG]$，于是建立考虑反力 $\{R\}$ 的平衡方程

$$([K_b]_{m-2}+[KG])\{\delta\}=\{S_b\}_{m-2}-\{R\} \tag{10.78}$$

为了求反力 $\{R\}$，有许多线性的或非线性的土本构关系可供选用（第三章）。为了说明问题，只采用式(10.15)中由实测而总结的反力系数 β，于是

$$([K_b]_{m-2}+[KG]+A\beta k[I])\{\delta\}=\{S_b\}_{m-2} \tag{10.79}$$

式中 $[K_b]_{m-2}$、$[KG]$ 和 $A\beta k$ 分别为结构物最下面一个子结构的边界劲度矩阵、基础的劲度矩阵和地基的劲度矩阵(已经增广)。该式反映了结构物、基础和土三者之间的相互影响、平衡条件、位移连续性条件和边界条件。

解出基础各结点的位移，其中一部份也就是最下面子结构的柱脚位移 $\{\delta_b\}_{m-2}$，通过回代，于是得到 $\{\delta_i\}_{m-2}$。它的一部份也就是子结构 $m-3$ 的边界位移 $\{\delta_b\}_{m-3}$，从而又求得 $\{\delta_i\}_{m-3}$。以此类推，通过自下而上的回代，可以得到所有子结构的结点位移。用这些位移分别代入基础和结构的单元劲度中去，便得到相应的内力和位移分布。

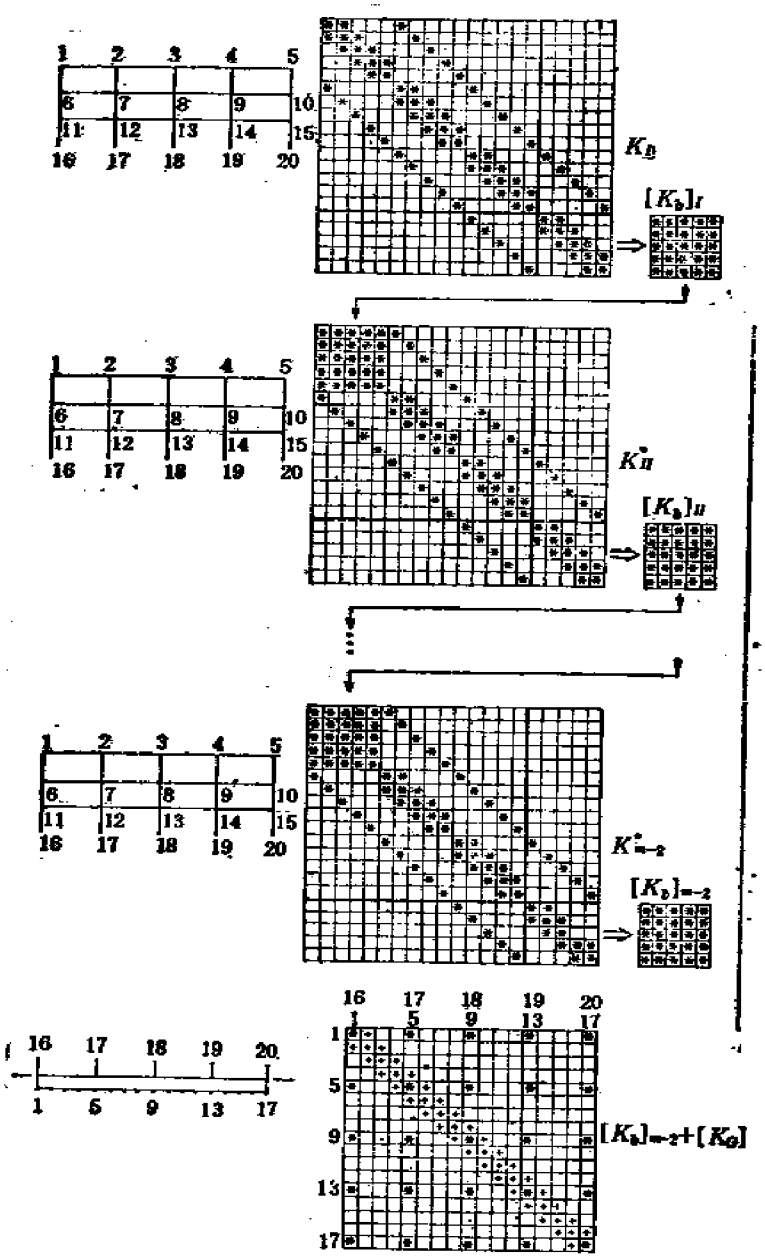


图 10.18 子结构劲度矩阵的凝聚

10.7 相互作用分析实例

分析一座 8 跨 15 层的平面框架-土的相互作用。结构物长度 32 m，层高 3 m。基础长 32 m，宽 3 m。地基为弹性半空间，$E_0=3.0$ MPa 泊松比 $\nu_0=0.33$。一个楼层作为一个子结构，以减少对 k_{ij} 求逆时的计算机时。

每个结点有三个自由度：u、v 和 θ。单元劲度矩阵的子阵为

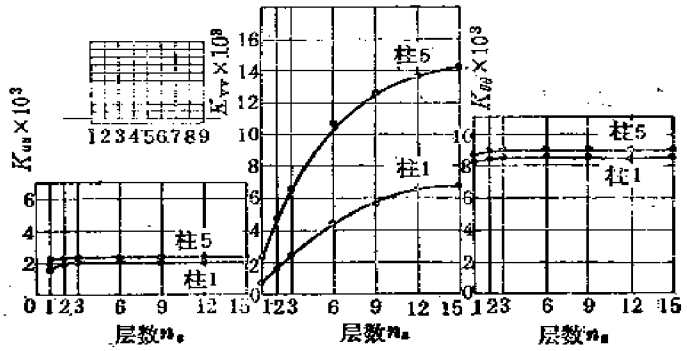


图 10.19 不同劲度系数随层数的变化

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & \text{对} & \\ k_{vu} & k_{vv} & \text{称} \\ k_{\theta u} & k_{\theta v} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{10.80}$$

其中 k_{uu}、k_{vv} 及 $k_{\theta\theta}$ 分别为单元的抗压、抗剪和抗弯劲度系数。分析表明，只有结构下面几个楼层的劲度对减少基础挠曲起作用，而且每个楼层的贡献也不相同。从图 10.19 *b* 及 *c* 可以看出，当层数 n_s 分别为 2 或 3 时，抗压劲度 k_{uu} 和抗弯劲度 $k_{\theta\theta}$ 即不再增长；只有抗剪劲度 k_{vv} 有明显的重要性。即使如此，当 $n_s=14$ 时，它对减小基础挠曲的作用亦趋于停止。就 k_{vv} 来说，每个楼层对基础的贡献也不相等(表 10.4)。

表 10.4 不同楼层中 k_{vv} 所占的百分比

层 数	1	2	3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15
$\frac{\Delta k_{vv}}{k_{vv}}$%	21.8	16.6	12.7	8.9	5.0	2.5	1

设计人员经常略去梁柱构件的拉伸和压缩而只考虑挠曲变形。通过相互作用分析，前者占有一定的重要性。内柱和边柱，尤其是底层柱，有不同程度的拉伸和压缩，前者导致卸载，而后者产生加载。从图 10.20 中可以看出，加载或卸载随柱子的位置和层数 n_s 而变化。当采用分层总和法计算地基沉降时，基础呈盆形挠曲，边柱加载而内柱卸载；当采用基床系数假说分析地基变形时，一切正好相反。从相互作用得知，将产生柱荷载重分布。

与不考虑相互作用的分析结果对比，基础的相对挠曲有很大的不同。在图 10.21 中，曲

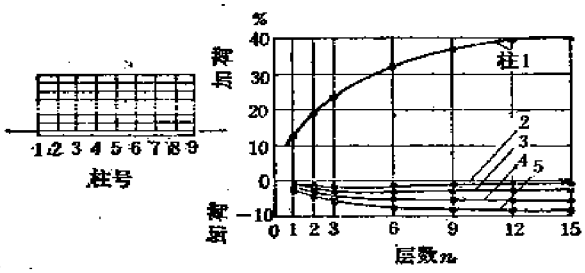


图 10.20 不同位置柱子的加载或卸载

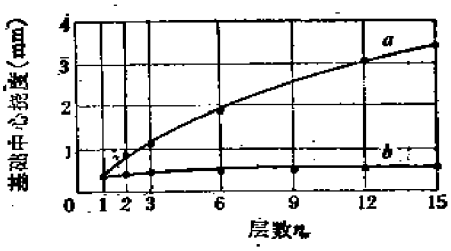


图 10.21 基础中点的挠度
a—未计入相互作用；*b*—计入相互作用

线 a 表示不考虑相互作用时的挠曲；曲线 b 则表示由于结构的劲度参与工作，抑制了相对挠曲的发展。

结构物劲度约束了基础的挠曲，也就减小了基础的弯矩。图 10.22(a) 表示不考虑，而图 10.22(b) 表示考虑相互作用时的基础弯矩分布。十分明显，考虑相互作用将导致经济的基础设计。对比上述两组弯矩分布曲线还可以看出，只是当层数 n_s 很小时，才可以不考虑相互作用。不管考虑还是不考虑相互作用，对剪力分布的影响不大。

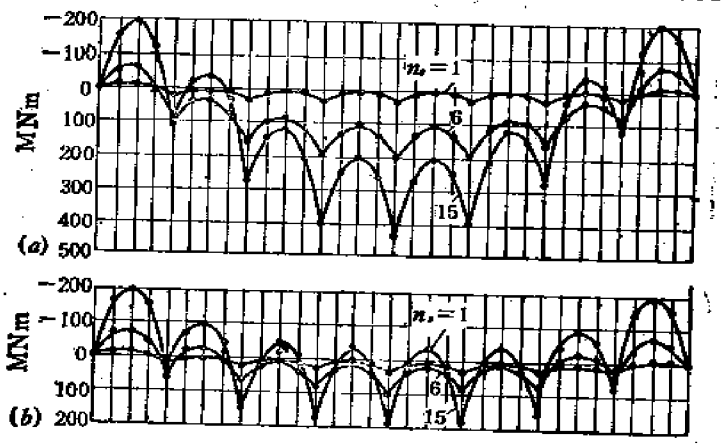


图 10.22 基础弯矩分布图

(a) 不考虑相互作用；(b) 考虑相互作用

随着建筑物层数 n_s 的增加，不但基础的挠曲曲线产生变化，而且各个楼层的挠曲曲线，相邻柱间的差异沉降和柱脚的转

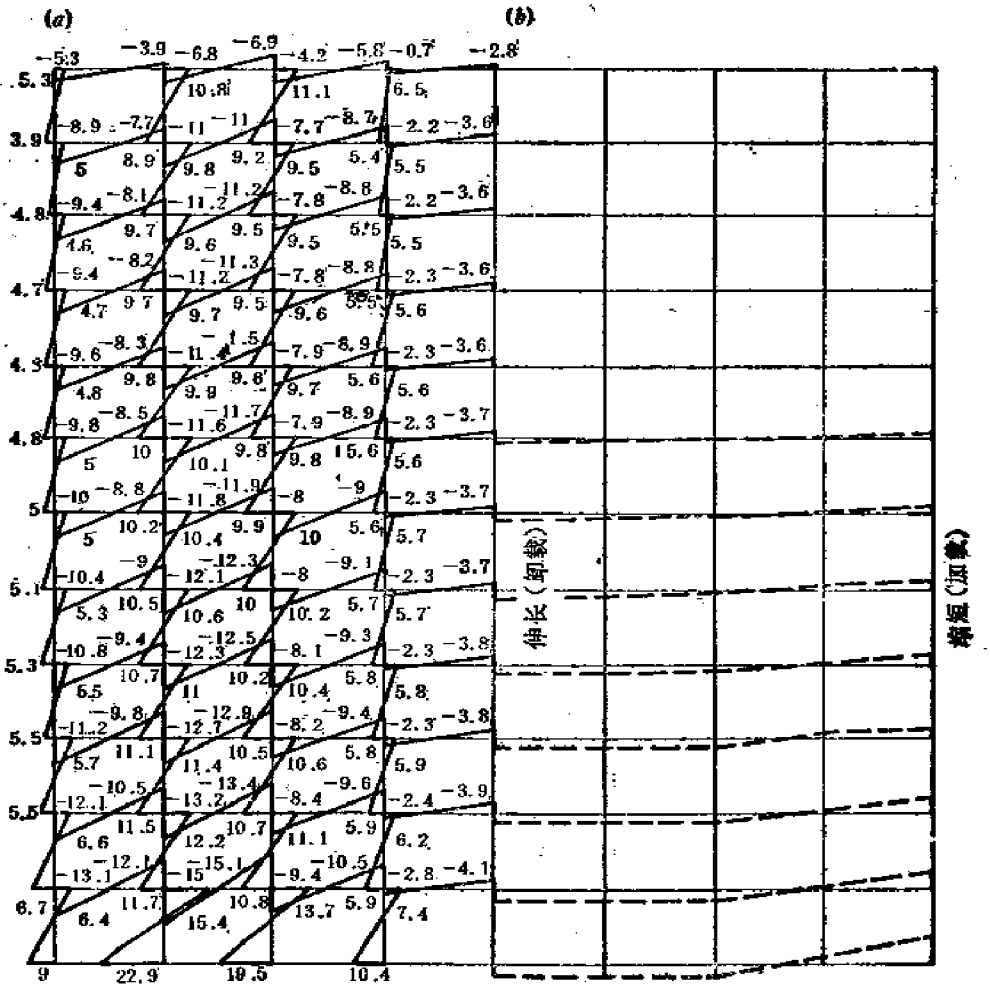


图 10.23 结构物不同楼层因基础挠曲而产生的附加弯矩(a)和变形的曲线(b)

角也不相同。图10.23表示在一定土质条件以及荷载条件下，上部结构因构件轴向变形，差异沉降和转角而产生的附加弯矩和楼层挠曲曲线(为醒目起见，已将挠曲值放大100倍)。

至此，我们发现：(1) 上部结构的不同劲度组成部分对基础挠曲的抑制作用是不同的。每层的贡献也不一样，而是随着层次的加多而迅速减少；(2) 不应当把建筑物全部楼层的劲度引入相互作用分析中去；(3) 由于考虑相互作用，不同楼层，尤其是最下面一、二个楼层的柱荷载会产生重分布。不考虑这种重分布，将使一些柱子的实际安全系数降低；(4) 基础的挠曲和弯矩大大减少。目前的基础设计有很大的浪费，它有很大的潜力可挖；(5) 上部结构中的构件因基础挠曲而产生次应力，其中以底层柱为最大。

参 考 文 献

1. 徐芝伦等，弹性力学中的有限单元法，水利出版社。
2. 罗恩，关于弹性地基上厚板的弯曲，土木工程学报，1981年第4期。
3. 辛金琨，L形空间剪力墙-土的共同作用，岩土工程学报，1983年第二期。
4. 朱百里、曹名葆、魏道垛，框架-土的共同作用，同济大学学报，1983年第二期。
5. 朱百里、曹名葆，结构物-土的相互作用(德文)，建筑力学，1983年第3期，柏林。
6. 就祖恩、张季容，框架-筏基-土共同作用，岩土工程学报，1984年第6期。
7. 范文田，文克尔地基梁纵横弯曲的初值方程，土木工程学报，1984年第2期。
8. 朱百里，箱基设计，孙更生、郑大同主编软土地基与地下工程，第十三章第二节，中国建筑工业出版社，1987年7月。
9. 叶予政，孙家乐，高层建筑箱基与上部结构的共同作用机理，北京工业大学学报，1984年4期。
10. 建筑科学研究院地基研究所，上部结构刚度对箱基整体弯曲的影响，1973，7。
11. 黎文芳等，大型箱基变形计算，岩土工程学报，1985年第3期。
12. 冯辛能，大型贮油罐环梁基础内力分析，土木工程学报，1986年第2期。
13. 刘开国等，高层框架箱基计算的半解析半残数法，岩土工程学报，1987年第6期。
14. 杨克己等，基础-桩-土共同作用的性状与承载力研究，岩土工程学报，1988年第1期。
15. 倪新华，结构物-土相互作用的时效，同济大学硕士研究生论文，1986。
16. 章华，不规则片筏基础-结构物相互作用的三维分析，同济大学硕士研究生论文，1988。
17. 朱晓平，箱形基础-结构物相互作用的三维分析，同济大学硕士研究生论文，1988

第十一章　桩基础的计算与分析

11.1　概述

随着计算机的广泛应用，桩基础的计算分析获得很大发展。作为房屋建筑下的桩基础，其主要功能是把上部结构荷载以竖向形式向地基传递。目前传统的设计方法是，建筑物荷载全部由桩支承，在按照规范提供的经验公式或桩的静载荷试验基础上定出单桩承载力后，算出桩数。桩位布置时兼顾建筑物荷载分布的不均匀性，作适当调整，以便使每根桩的承载力得到充分发挥。桩基础的沉降量按"等代基础法"计算，即把桩与桩间土看成是一个整体基础，桩尖为荷载的作用平面，然后用分层总和法算出桩基础的沉降量。对于受荷的长桩桩基础，由于很大部分荷载由桩侧摩阻力承受，而在桩尖处，实际发挥的压力不大。这与"等代基础法"认为全部荷载都传到桩尖处的观点不尽相同，以致于实测沉降量小于计算值。此外，现行桩基础计算中不考虑桩和基础板的荷载分担作用；但某些以摩擦支承为主的短桩基础，因可能产生较大沉降而使基础板分担部分荷载。为此，把上部结构、桩基础与土三者进行整体的共同作用分析已受到技术人员所注意。

对于桥梁、港湾工程以及海上石油平台等受较大水平向荷载的工程，研究侧向荷载下桩基的受力性状，显得十分重要。目前，在国内常用的有"m"法和"c"值法等弹性分析方法；而在石油部门采用的是 p-y 曲线法。这些方法都是把桩作为一根梁，并以 Winkler 地基梁的计算理论为依据；所不同的是，在水平荷载下地基土的力与位移之间的模式取法不同而已。不少学者很注重地基土计算模式的研究，如 Matlock(1970)、Reese(1975)、Scott(1980)、O'Neill(1983)、周铭(1985)等。至于群桩分析方面，除上述模式外，还与桩顶的嵌固状况、桩的间距、承台着地接触程度、桩的破坏标准等因素有关。Focht(1973)、O'Neill(1977)等先后在 p-y 曲线法的基础上，引进弹性理论概念，以克服 p-y 曲线法不能考虑桩与桩之间共同作用效应的缺陷。

打桩时，锤击能量克服土对桩的阻力而把桩击入土中。对于大直径、长度长的桩，按惯用的动力打桩公式(工程新闻公式、Hiley 公式等)预测桩的承载力等问题已不能适应。其原因是，它们把打桩过程看成是两个绝对刚体自由碰撞问题，认为锤击能量瞬间就传递到桩底。但实际上打桩的能量是以一种应力波的方式向下传递，所以用波动方程能给打桩提供较合理分析。Smith 提出一维波动方程，并用它来分析打桩时锤-桩-土系统的受力状况，他对计算参数作了分析和建议，从而使波动方程获得广泛应用。

11.2　竖直荷载下桩基础的受力分析

11.2.1　竖向荷载下单桩受力的性状

在实际工程中，桩基通常是由一群桩所组成。而群桩分析的理论很大程度取决于单桩的受力性状。因而许多学者对单桩工作机理进行了研究，并提出许多预估的方法。目前，大体上可归纳为四种方法，即：荷载传递法；弹性理论法；剪切位移法；有限单元法。

1．荷载传递法

荷载传递法首先是由 Seed 和 Reese 在 1955 年提出。此后，Kezdi(1957)、佐滕悟(1965)、Coyle 和 Reese(1966)、Holloway(1975)以及 Vijayvergiya(1977)等相继在此基础上有所发展。这些方法的基本概念是把桩视作由许多弹性单元组成，每一单元与土体之间(包括桩尖)都用非线性弹簧联系，如图 11.1 所示。这些非线性弹簧表示桩侧摩阻力(或桩尖阻力)与剪切位移(或桩尖位移)之间的关系，通常统称为荷载传递函数或 t–z 曲线。

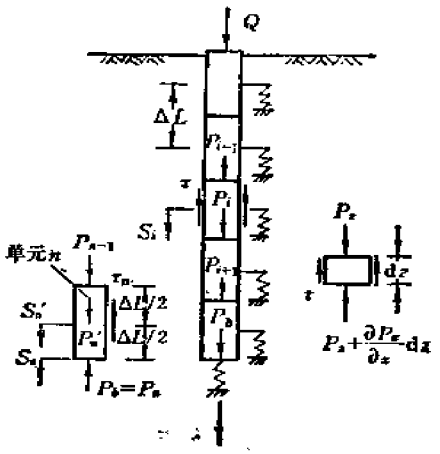


图 11.1　荷载传递法的计算图式

在桩上取一单元体，由单元体的静力平衡条件可得：

$$\frac{\partial P_z}{\partial z}=-U\tau_z \tag{11.1}$$

式中 U——桩截面周长，τ_z——桩侧壁摩阻力。考虑到单元的弹性应变量随深度 z 值的增加而减小，于是有

$$P_z=-AE_p\frac{\partial s}{\partial z} \tag{11.2}$$

对式(11.2)求导，并与式(11.1)联合，则有

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\frac{U}{AE_p}\tau_z \tag{11.3}$$

式(11.3)是传递函数法的基本微分方程，桩身的竖向位移 s 的求解取决于桩土之间的传递函数 τ_z–s 曲线(即 t–z 曲线)。

Vijayvergiya(1977)对桩侧、桩底分别提出相应的传递函数表达式：

桩侧传递函数，如图 11.2(a) 所示。

$$f=f_{max}\left(2\cdot\sqrt{\frac{z}{z_{cs}}}-\frac{z}{z_{cs}}\right) \tag{11.4}$$

其中

$$f_{max}=\lambda(\bar{\sigma}_m+2c_m)\quad\text{(粘土)}$$
$$f_{max}=K\bar{\sigma}_V\operatorname{tg}\delta\quad\text{(砂土)}$$

式中　z——桩单元的位移；

f——位移为 z 时，桩侧的摩阻力；

z_{cs}——桩侧摩阻力达到 f_{max} 时的桩单元的临界位移值，在粘土或砂土中，$z_{cs}=0.51\sim0.76$ cm；

λ——无量纲摩阻力系数，从图 11.2(b) 查得；

$\bar{\sigma}_m$——地表至桩尖范围内土的竖向有效应力的平均值；

c_m——桩身范围内土的不排水抗剪强度平均值；

K——土的侧压力系数；

$\bar{\sigma}_V$——土的竖向有效应力；

δ——桩间土的摩擦角。

桩尖传递函数，如图 11.2(c) 所示。

$$q=q_{max}(z/z_{cb})^{1/3} \tag{11.5}$$

式中　z——桩尖位移值；

q——位移为 z 时，桩尖的阻力；

z_{ob}——桩尖阻力达到 q_{max} 时的临界位移值；$z_{ob}=(0.04\sim0.06)B$，B 为桩径或宽度；

q_{max}——桩尖最大阻力，可按下式计算：

$$q_{max}=N_c\cdot c \qquad (粘土)$$

$$q_{max}=N_q\cdot\bar{\sigma}_V \qquad (砂土)$$

式中 N_c、N_q——分别为承载力系数；

c——桩尖粘土的不排水抗剪强度；

$\bar{\sigma}_V$——桩尖处土的竖向有效应力。

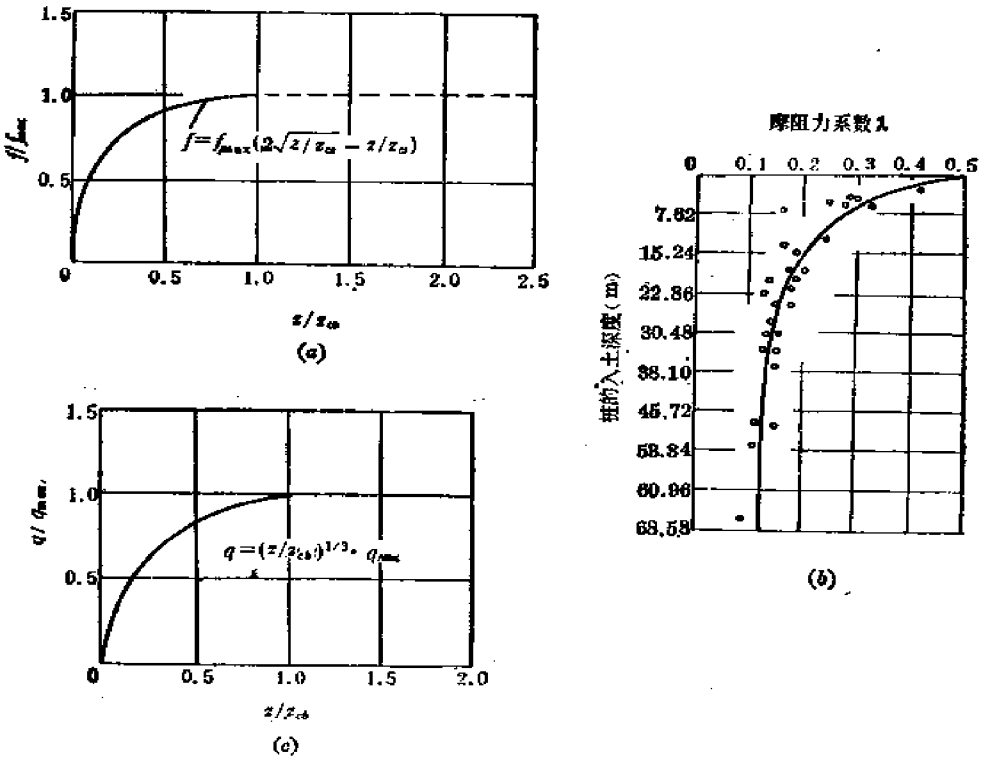


图 11.2 桩侧和桩尖的传递函数

一旦桩土间的传递函数确定后，就可求得在竖向荷载下桩侧摩阻力、桩身轴力分布以及桩身各截面处的位移。求解方法通常采用变形协调法和矩阵位移法。

(1) 变形协调法

该法是在离散成许多单元的桩的底部，假设有某一位移值，然后根据桩身的轴向变形与桩侧土变形相协调的关系，可逐段地向上递推而求出桩段各点(包括桩顶)处的相应轴力、桩侧阻力。若桩底假设不同的位移值，于是就可获得一组相应的轴力、位移以及桩侧和桩底的阻力。具体计算步骤可见文献[1]。

(2) 矩阵位移法

矩阵位移法实质上是杆件系统的有限单元法。对已经离散了的每个桩单元（图 11.3），可建立轴力 P 和位移 s 之间的关系。

若桩顶上作用一个竖向力 Q，桩段划分的长度不一，分别以 Δl_1、Δl_2、…示之，则对整根桩可写出分段点的力和位移方程组：

$$[K_P]\{S\} = \{Q\} - \{R\} \tag{11.6}$$

式中 $\{R\}$——土作用在桩段结点上的集中摩阻力(kg 或 t)列向量，其值为

$$\pi \cdot d\left[\Delta l_1\tau_1\ \Delta l_2\tau_2 \cdots \Delta l_n\tau_n\ \frac{d_b^2}{4d}\ p_b\right]^T$$

(参见图 11.4)，也可写成 $[\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot s_1\ \operatorname{tg}\alpha_2 s_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_n \cdot s_n\ \operatorname{tg}\beta \cdot s_b]^T$；

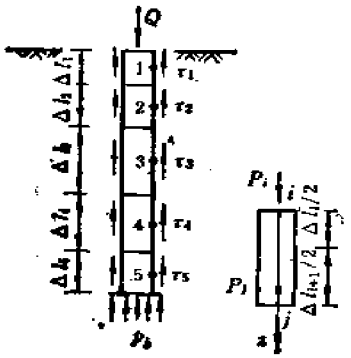


图 11.3　单桩矩阵位移法的计算图式

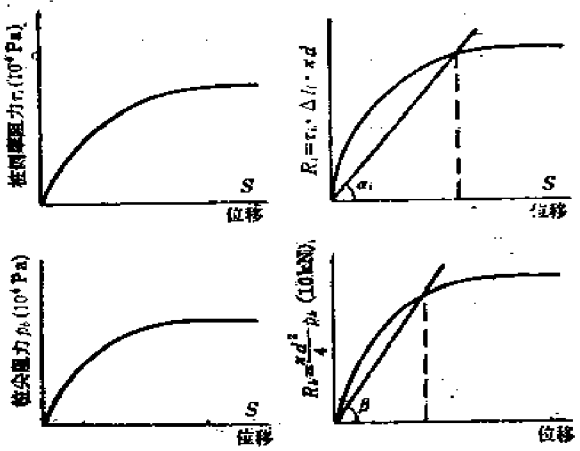


图 11.4　桩侧摩阻力、桩尖阻力与位移的关系曲线

$[K_P]$——桩的总刚度矩阵；d、d_b——分别为桩身、桩底直径；

$\{S\}$——桩身各结点位移列向量，其值为$[s_1\ s_2 \cdots s_n\ s_b]^T$；

$\{Q\}$——外荷载列向量$[Q\ 0\ 0 \cdots 0]^T$。

上式也可写成：

$$([K_P] + [K_s])\{S\} = \{Q\} \tag{11.7}$$

式中$[K_s]$——土的刚度矩阵，即由 $\operatorname{tg}\alpha(i)$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 组成的对角阵。

由于传递函数呈非线性特性，可用迭代法计算式 (11.7)，其步骤如下：

1) 根据已知的传递函数曲线，假定各结点的初始刚度 $(\operatorname{tg}\alpha_i)_0$ 和 $(\operatorname{tg}\beta)_0$（即假定各结点初始位移 $\{S\}_0$）；

2) 按式(11.7)算出相应的位移 $\{S\}_1$；

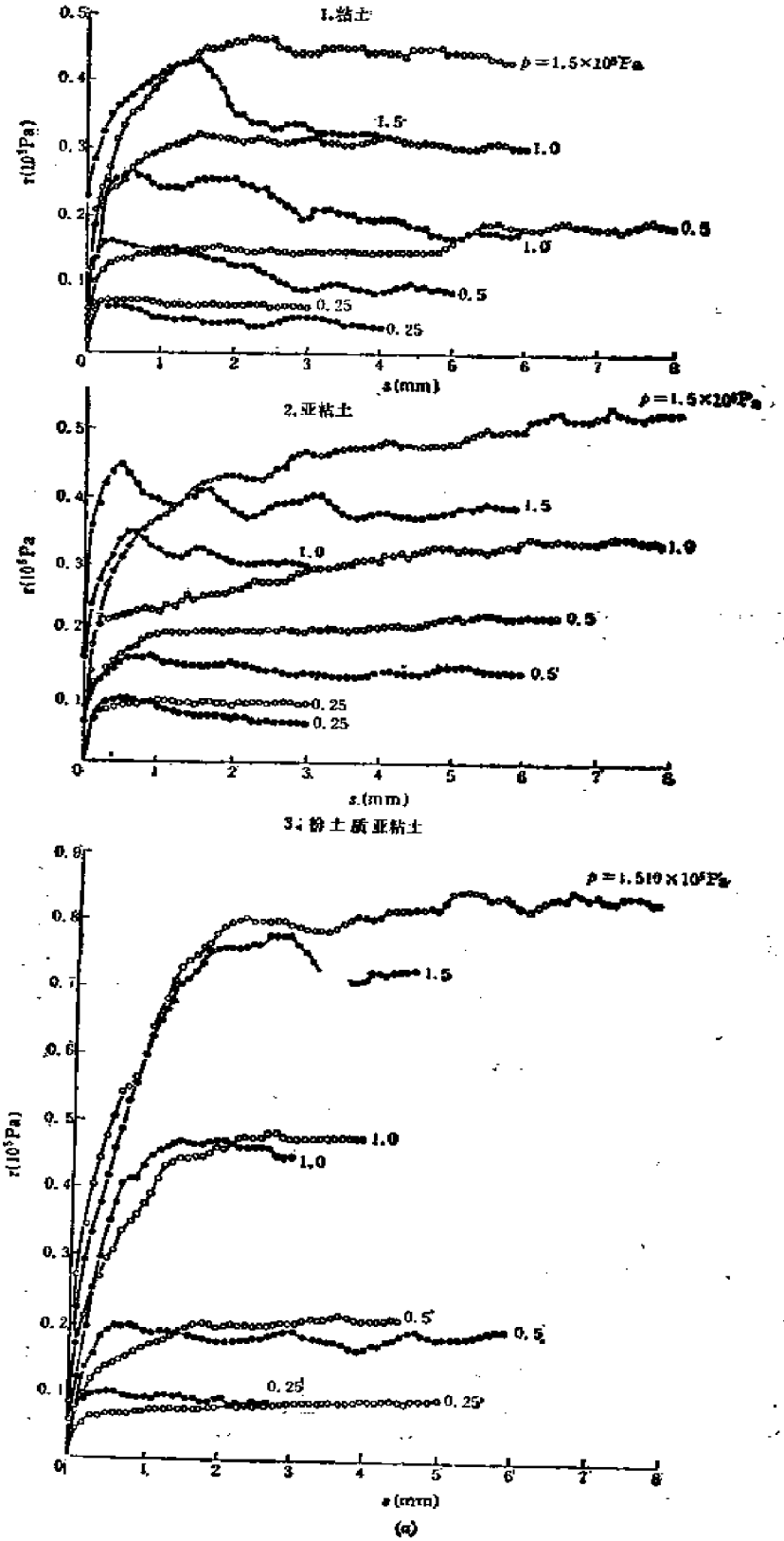
3) 若 $\{S\}_1$ 与 $\{S\}_0$ 的差值超过容许值，则根据 $\{S\}_1$ 和 $\{R\}_1$ 从图 11.4 求出 $\{\operatorname{tg}\alpha_i\}_1$ 和 $(\operatorname{tg}\beta)_1$，并代入式(11.7)算出第二次迭代计算所得的位移 $\{S\}_2$；

4) 重复上述计算过程，直到前后两次计算所得位移的差值小于容许误差为止；

5) 将最后求得的位移值 $\{S\}$，代入式 (11.6) 后，可求出各结点处的轴力 P 和摩阻力 τ。

从上述计算可见，荷载传递法分析单桩的性状，其关键在于正确确定荷载的传递曲线。

近年来，国内对桩、土间的传递函数作了探讨。文献[10]通过室内剪切试验，测得不同法向压力下、钢和混凝土材料分别与土之间的摩阻力 τ 与剪切位移 s 的关系曲线，用以描述桩、土间的传递函数。结果表明，τ-s 曲线呈非线性关系，且与法向压力 p 大小有关(见图 11.5(a)～(c) 和表 11.1)。从图可见，混凝土表面摩阻力达到峰值 τ_P 时的位移 s_u 值约为 2～3 mm；而对钢材，则为 1～1.5 mm。一般 s_u 值随法向压力的增高而增大。试验结果与


1.粘土
p=1.5×10⁶Pa
1.5
1.0
0.5
0.25
τ(10⁵Pa)
s(mm)
2.亚粘土
p=1.5×10⁶Pa
1.5
1.0
0.5
0.25
τ(10⁵Pa)
s(mm)
3.砂土质亚粘土
p=1.510×10⁶Pa
1.5
1.0
0.5
0.25
τ(10⁵Pa)
s(mm)

(a)

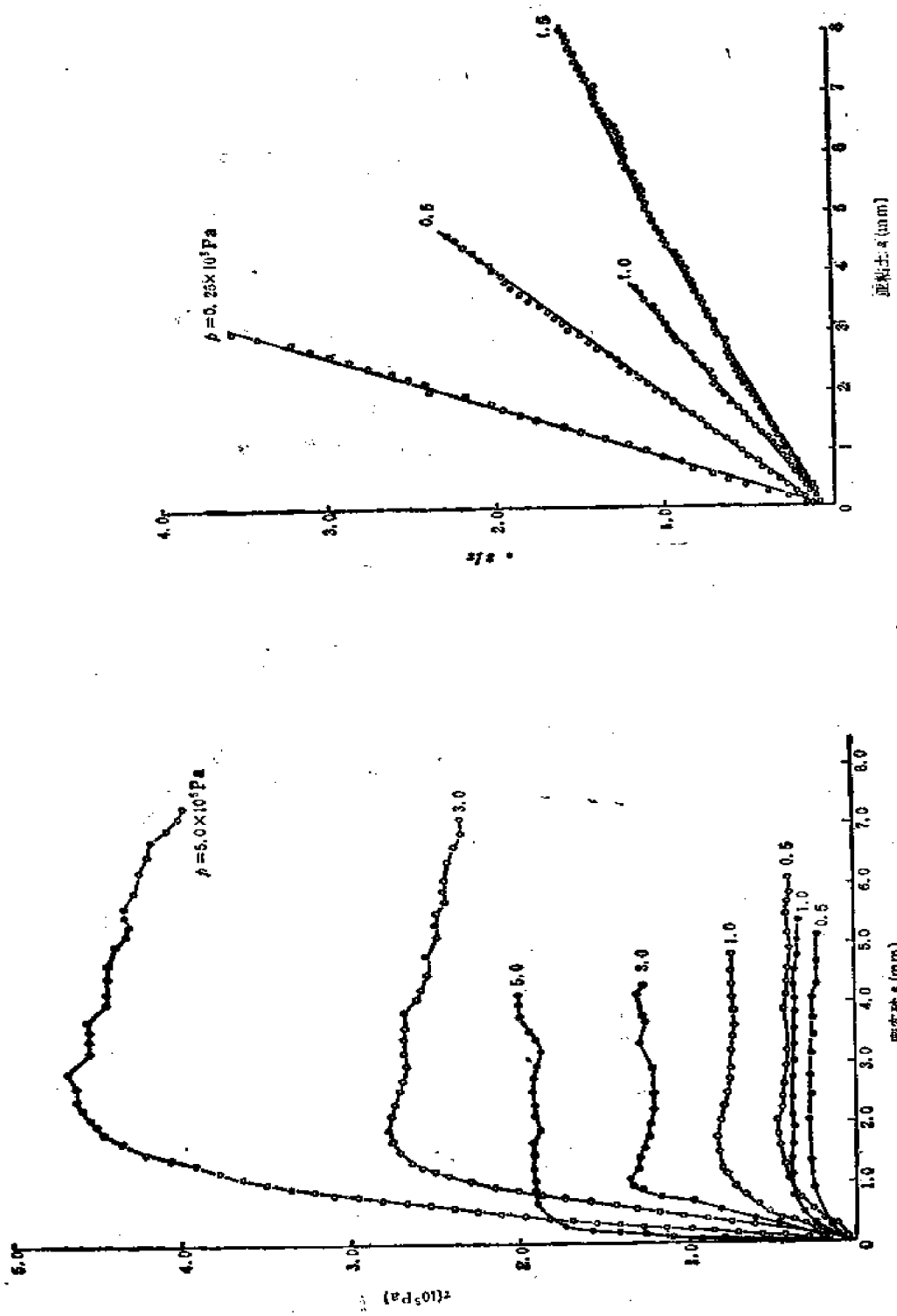


图 11.5 τ-s 及 $\frac{s}{\tau}$-s 曲线

(a) 混凝土(钢)—软黏土的 τ-s 曲线(空心圆点表示混凝土材料,黑圆点表示钢材)

(b) 混凝土(钢)—密砂的 τ-s 曲线(空心圆点表示混凝土材料,黑圆点表示钢材)

(c) 亚黏土 $\frac{s}{\tau}$-s 关系(混凝土-亚黏土)

s/τ-s 坐标系表示，有明显的直线关系，这说明 τ-s 结果符合双曲线方程，即 $\tau=\dfrac{s}{a+bs}$。这一结果与 Gardner(1975) 所获的关系式相同。τ_u 为摩阻力的极限值，其值为 $1/b$。

表 11.1 土与不同材料之间的摩阻力

法向压力(10^5 Pa)		0.25		1.0		3.0		5.0	
摩阻力(10^5 Pa)		τ_u	τ_P	τ_u	τ_P	τ_u	τ_P	τ_u	τ_P
砂(中密)	钢	0.238	0.212	0.358	0.350	1.308	1.091	—	—
	混凝土	0.562	0.430	1.058	0.860	3.153	2.430	—	—
砂(密实)	钢	0.312	0.283	0.445	0.429	1.500	1.257	2.18	2.15
	混凝土	0.707	0.500	1.132	0.830	3.280	2.610	6.24	4.67
法向压力(10^5Pa)		0.25(固结)		0.5 (固结)		1.0 (固结)		1.5 (固结)	
摩阻力(10^5Pa)		τ_u	τ_P	τ_u	τ_P	τ_u	τ_P	τ_u	τ_P
粘 土	钢	0.063	0.073	0.143	0.163	0.250	0.255	0.500	0.434
	混凝土	0.069	0.076	0.152	0.158	0.310	0.320	0.460	0.463
亚粘土	钢	0.102	0.092	0.145	0.155	0.313	0.314	0.365	0.434
	混凝土	0.086	0.091	0.201	0.191	0.325	0.313	0.475	0.434
粉土质亚粘土	钢	0.085	0.099	0.187	0.201	0.500	0.467	0.833	0.774
	混凝土	0.086	0.079	0.220	0.198	0.510	0.479	0.800	0.796

众所周知，桩的静载试验既费工又昂贵，因而近年来有人通过桩、土间传递函数的研究来分析和估算桩的承载力，以减少桩的静载试验工作量。文献[11]介绍华南地区在试桩时，通过预埋在桩内的电测元件，测定桩身各量测截面的应变，从而算出桩侧摩阻力、桩尖阻力随位移变化的关系。实测到的荷载传递曲线可近似地用双曲线方程来描述，但为实用起见，可将 τ-s 曲线简化为弹性-全塑模型，桩尖 P_s-s_b 曲线则简化为弹性-硬化模型（如图 11.6），并用五个参数 λ、s_u、K_1、K_2 和 s_{bu} 来表示(表 11.2)。按该模型计算求得的桩顶处的 P-s 曲线与实测的试桩结果较好吻合(图 11.7)。

文献[5]根据上海和我国沿海软土地区大量试桩与静力触探的对比资料，发现触探探头阻力 q_c(10^5Pa) 与软土地区各类土的 f_{max}（最大桩侧摩阻力）、q_{max}（最大桩尖阻力）有较好的关系：

$$\left.\begin{aligned} &f_{max}=q_c/20 && \text{(淤泥质粘土、亚粘土)}\\ &f_{max}=q_c/50\ (f_{max}\geqslant 100\,\text{kPa}) && \text{(轻亚粘土、粉砂)}\\ &f_{max}=0.25+0.025q_c\ \ (f_{max}\geqslant 100\,\text{kPa}) && \text{(软塑、硬塑的粘土、亚粘土)} \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

$$q_{max}=(q_{cb1}+q_{cb2})/2 \tag{11.9}$$

式中 q_c——触探探头阻力，以 10^5Pa 表示；

q_{cb1}——桩尖以上 $(3.75\sim8.0)d$ 范围内探头阻力的平均值(10^5Pa)；

q_{cb2}——桩尖以下 $(1.0\sim2.75)d$ 范围内探头阻力的平均值(10^5Pa)。而传递系数建议用抛物线方程表示，即：

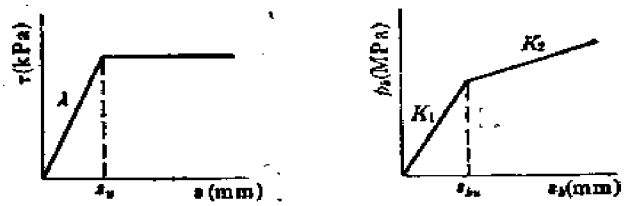


图 11.6　荷载传递的双折线表示

p(kN)	s_s(mm)		s_b(mm)	
	实值	计算	实值	计算
400	1.24	2.01	0.42	1.08
600	1.77	3.00	0.43	1.64
800	2.31	3.99	0.51	2.18
1000	3.01	5.00	0.77	2.73
1200	3.88	6.01	1.19	3.28
1400	4.82	7.00	1.68	3.82
1600	5.87	8.02	2.23	4.38
1800	7.19	9.21	3.09	5.07
2000	9.12	10.39	4.30	5.75
2200	12.04	12.11	6.90	6.91
2400	48.51	60.47	42.88	53.61

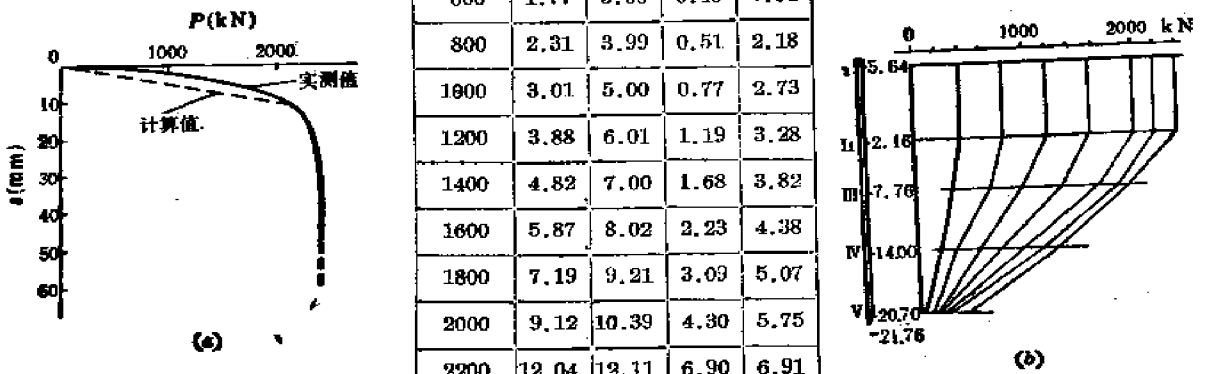


图 11.7　桩的实测与计算的 P-s 曲线(a)；　桩轴向力实测值分布图(b)

表 11.2　弹性-全塑模型的五个参数 λ、s_u、K_1、K_2、s_{bu}

土　　名	λ(kPa/mm)	s_u(mm)	土　　名	K_1(MPa/mm)	K_2(MPa/mm)	s_{bu}(mm)
湛江淤泥、淤泥混砂	500	6	湛江砂加粘土	16	1.5	7
湛江淤泥(上层)	800	7	广州淤泥混砂夹贝壳	5	0.6	8
湛江淤泥(下层)	900	7	广州强风化岩	80	4	4
广州淤泥混砂夹贝壳	900	8	广州风化岩	130	16	7
广州中密、中、粗砂	1200	7	汕头粗、砾砂	120	8	5
汕头灰绿色淤泥(表层)	500	8	注：$1t/m^2=9.8\ kPa=9.8\times10^{-3}\ MPa$			
汕头灰绿色淤泥(底层)	700	8				

$$f = f_{max}\cdot\sqrt{z/z_{cs}} \tag{11.10}$$

$$q = q_{max}\cdot\sqrt{z/z_{cb}} \tag{11.11}$$

式中其它符号与式(11.4)、(11.5)说明相同。通过与软土地区16根(桩长18～27 m)实测试桩资料进行对比，结果表明用建议的传递函数计算所得的桩顶 P-s 曲线与实测值较为接近，见表11.3。

表 11.3 桩顶变形计算值与实测值的比较

	$a=s_{计}/s_{实测}$																$\bar{a}$
试桩号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	—
$Q=0.25P_u$	1.33	0.58	1.14	0.92	1.31	0.50	1.04	0.72	0.69	0.88	1.08	0.83	1.04	1.00	1.22	1.00	0.96
$Q=0.5P_u$	1.07	0.53	0.97	0.92	1.07	0.54	0.97	0.87	0.84	1.00	1.24	0.79	0.99	0.83	1.14	0.88	0.92
$Q=0.75P_u$	0.98	0.47	0.89	0.87	0.82	0.45	0.68	0.92	0.86	0.95	1.07	0.66	0.89	0.66	0.85	0.56	0.79

注：Q—桩顶上的荷载；P_u—桩的极限荷载；$s_{计}$—按建议的传递函数曲线计算到的桩顶变形值；$s_{实测}$—由试桩得到的桩顶变形实测值；$\bar{a}$—比值 a 的算术平均值

虽然荷载传递法获得广泛的重视，但它的缺点是，任意点桩的位移只与该点的剪应力有关，而与桩身上其它点的应力无关，因而没有考虑土体连续性。

2. 弹性理论法

弹性理论法的基本假定是，桩被插入在一个理想匀质的、各向同性的弹性半空间体内，其弹性模量 E_s 和泊松比 ν_s 不因桩的存在而变化；桩的周边粗糙而桩底平滑。由于桩与土之间保持弹性接触，因此具有桩身位移等于毗邻土位移的相容条件。在计算中，认为桩与土的径向变形甚小，可忽略不计，而只考虑桩在竖向荷载下的竖向变形。

把受荷的桩以及桩周围的土分成若干小段，现分别取桩周围土体（图 11.8*b*）、桩身（图11.8*c*）作为脱离体进行分析。

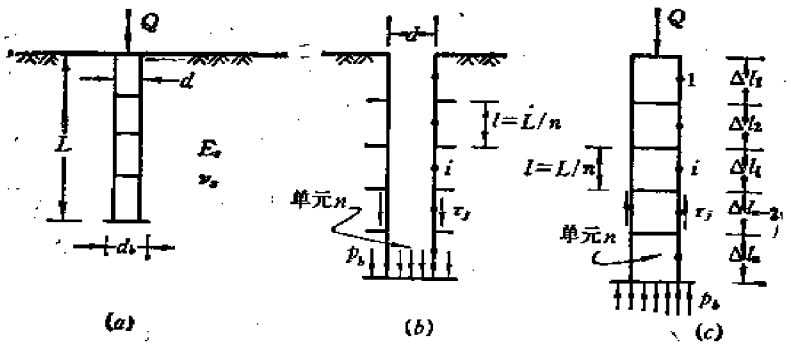


图 11.8 弹性理论法的计算图式

(1) 土的位移方程(按图 11.8*b* 建立)

由 j 单元处的摩阻力 τ_j 对桩段点 i 所引起的竖向位移 s_{ij} 为：

$$s_{ij}=I'_{ij}\cdot\tau_j=\frac{d}{E_s}I_{ij}\cdot\tau_j \tag{11.12}$$

式中 I'_{ij}——单元 j 处单位摩阻力（$\tau_j=1\ \mathrm{kN/m^2}=1\mathrm{kPa}$）对桩段 i 点所产生的竖向位移量，或称为竖向位移影响系数，可按附录中式(11.96)计算。

于是所有 n 个单元的桩侧、桩底阻力对 i 点所产生的位移：

$$s_i=\frac{d}{E_s}\left(\sum_{j=1}^{n}I_{ij}\cdot\tau_j+\frac{d_b}{d}I_{ib}\cdot p_b\right) \tag{11.13}$$

同理，可写出所有单元对桩底所产生的位移量为：

$$s_b=\frac{d}{E_s}\left(\sum_{j=1}^{n} I_{bj}\cdot\tau_j+\frac{d_b}{d}I_{bb}\cdot p_b\right) \tag{11.14}$$

式中 I_{ib}、I_{bj}、I_{bb}——分别为竖向位移影响系数，可按式(11.99)、(11.98)、(11.102)计算。这样，土的位移方程可方便地写出：

$$\{S'\}=\frac{d}{E_s}[I_s]\{p\} \tag{11.15}$$

式中 $\{S'\}$——土的位移列矢量，$\{S'\}=[s_1 s_2\cdots s_n s_b]^T$；

$\{p\}$——桩周阻力(包括桩侧和桩底)的列向量，$\{p\}=[\tau_1\ \tau_2\cdots\tau_n\ p_b]^T$；

$[I_s]$——土的竖向位移柔度矩阵，即

$$[I_s]=\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12}\cdots\cdots I_{1n} & \frac{d_b}{d}I_{1b} \\ I_{21} & I_{22}\cdots\cdots I_{2n} & \frac{d_b}{d}I_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{n1} & I_{n2}\cdots\cdots I_{nn} & \frac{d_b}{d}I_{nb} \\ I_{b1} & I_{b2}\cdots\cdots I_{bn} & \frac{d_b}{d}I_{bb} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

(2) 桩身位移方程(按图 11.8c 建立)

把桩身的微分方程式(11.3)改写成为：

$$\tau_z=\frac{AE_P}{U}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\frac{d\cdot E_p}{4}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{11.16}$$

并用有限差分形式，写出点 2 到 $n-1$ 的表达式，即

$$\tau_i=\frac{d\cdot E_P}{4}\left(\frac{s_{i-1}-2s_i+s_{i+1}}{l^2}\right)(i=2,3,\cdots,n-1) \tag{11.17}$$

对于桩段点 1，写出差分表达式时，会引入虚结点位移 s_0，为此，要利用桩顶处应变的边界条件 $\partial s/\partial z=-Q\Big/\left(\frac{\pi d^2}{4}\cdot E_P\right)$，于是 s_0 的表达式

$$s_0=\frac{4Q\cdot l}{\pi d^2\cdot E_P}+s_1$$

把上式代入式(11.17)，消去 s_0，则点 1 的差分表达式为

$$\tau_1=\frac{d\cdot E_P}{4l^2}(-s_1+s_2)+\frac{Q}{\pi dl} \tag{11.18}$$

同理，利用非等间距的差分公式以及使用高阶级数的差分展开式，于是点 n 和桩底(b 点)的差分表达式：

$$\tau_n=\frac{d\cdot E_P}{4l^2}(-0.2s_{n-2}+2s_{n-1}-5s_n+3.2s_b) \tag{11.19}$$

$$p_b=\frac{E_P}{4l}(-1.33s_{n-1}+12s_n-10.67s_b) \tag{11.20}$$

于是，整根桩的位移方程为：

$$\{p\}=\frac{d\cdot E_P}{4l^2}[I_P]\{S''\}+\{Y\} \tag{11.21}$$

式中

$$\{Y\}=\left[\frac{Q}{\pi d\cdot l}0\ 0\cdots 0\right]^T;$$

$\{S''\}$——桩身位移列向量；

$[I_p]$——桩身系数矩阵，其值为

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots & -0.2 & 2 & -5 & 3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots & 0 & -\frac{4}{3}f & 12f & -\frac{32}{3}f \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

其中 $f=l/d$

(3) 单桩的差分方程

把桩土交界面处毗连点的位移相容条件 $\{S'\}=\{S''\}$ 代入式(11.21)，便可获得单桩的差分方程：

$$\left([I]-\frac{d^2\cdot E_p}{4l^2\cdot E_s}[I_p][I_s]\right)\{p\}=\{Y\} \tag{11.22}$$

式中 $[I]$——单位阵；其它符号说明同前。

解方程组(式11.22)，求出 $\{p\}$，即获得桩侧摩阻力 τ 和桩底阻力 p_0；再利用式(11.15)和式(11.2)分别求出桩段的位移 $\{S'\}$ 和轴力 P_x。

图 11.9 给出均质土中不同比值 $K(=E_p/E_s)$ 情况下的桩侧摩阻力 τ 的分布情况；对于 K 值大的不可压缩桩，τ 沿桩身的分布比较均匀，且与土的泊松比 ν_s 值关系不大。

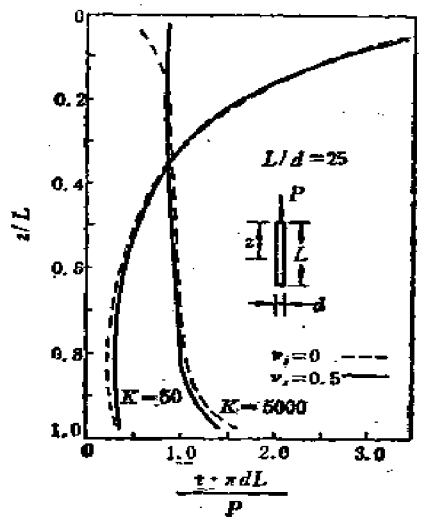


图 11.9 摩阻力沿桩身方向的分布

(4) 弹性理论法的若干改进

计算方法改进

值得指出，用方程式(11.22)求解时，桩的分段长度必须相同，因为建立式(11.7)时，为了简便起见，采用了等间距的差分形式，若采用矩阵位移法，可求解非均质土中分段长度不等情况下的桩。

先按图 11.3 和式(11.6)建立桩身位移方程，得

$$[K_p]\{S''\}=\{Q\}-\{R\} \tag{11.23}$$

改写土的位移方程式 (11.15)，得

$$\{S'\}=\frac{d}{E_s}[I_s][F]\{R\} \tag{11.24}$$

式中 $[F]$——系数矩阵，其值为：

$$[F]=\frac{1}{\pi d}\begin{bmatrix}\frac{1}{\Delta l_1} & & & 0\\ & \frac{1}{\Delta l_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\Delta l_n}\\ 0 & & & \frac{4d}{d_b^2}\end{bmatrix}$$

根据变形相容条件$\{S'\}=\{S''\}$，把上式代入式(11.23)后得：

$$\left([K_P]\cdot\frac{d}{E_s}[I_s][F]+[I]\right)\{R\}=\{Q\} \tag{11.25}$$

解上式求得桩段各点的集中摩阻力$\{R\}$后，就不难获得$\tau_1、\tau_2\cdots\tau_n、p_b$值以及位移$\{S''\}$。

应当指出，桩顶荷载Q并不是作用在桩段结点1处(图11.3)，为了使式(11.25)符合实际情况，在分段时，应尽量使Δl_i长度缩小。

桩-土间的滑移

众所周知，桩土之间的摩阻力是有限的，当桩上荷载足够大时，桩土间摩阻力得到充分地发挥，以致于桩土间产生滑移而丧失支承能力。对此，方便的做法是先按式(11.25)计算，然后检查所求出的各结点的摩阻力$(\tau_i=R_i/(\pi d\cdot\Delta l_i))$，是否超过某一指定的极限值$\tau_u$；若$\tau_i>\tau_u$，则在式(11.25)等式左边的矩阵中第$i$行的主对角元素充以一个大数(如$10^{16}$)，而在相应的右端项$\{Q\}$中第$i$行充以$\tau_u\cdot\pi d\cdot\Delta l_i\times10^{16}$的数，再作一轮计算，直到计算得的摩阻力均小于$\tau_u$为止。

非均质土的考虑

为了把在均质土中已有的分析公式应用到非均质土的情况，Poulos近似地假定土体内的应力与原均质体中的分布情况相同，而计算土位移时所用到土的模量与该点所在位置有关。于是i点土的位移计算式变成

$$s_i=d\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I_{ij}}{E_{si}}\tau_j+\frac{d_b}{d\cdot E_{si}}I_{ib}\cdot p_b\right) \tag{11.26}$$

桩身范围内土的位移方程：

$$\{S'\}=d\left[\frac{I_s}{E_s}\right]\{p\} \tag{11.27}$$

式中符号见式(11.15)说明。由于桩的位移方程式(11.23)保持不变，则按照位移相容条件，联合式(11.27)和式(11.23)后便可求得桩身各结点的轴力、位移和摩阻力。Ponlos曾经对支承在较硬土层中的桩进行分析，结果表明：桩尖土层模量E_b愈大，则轴力P_s的传递作用就愈不明显(图11.10)。

对于桩尖以上有若干土层的情况(图11.11)，Poulos建议也可取加权平均模量E_{av}来代替，即

$$E_{av}=\frac{1}{L}\cdot\sum_{i=1}^{n}E_ih_i \tag{11.28}$$

式中 $E_i、h_i$——分别是土层i的模量和厚度；

n——桩身长度L范围内的土层个数。

虽然上述处理方法是近似的，但在实用上已足够精确，除非在桩身范围内土的模量有过大的变化。

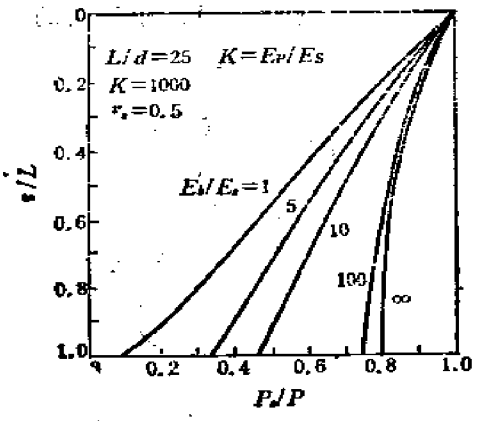


图 11.10 桩支承在较硬土层时桩身轴力随深度的分布

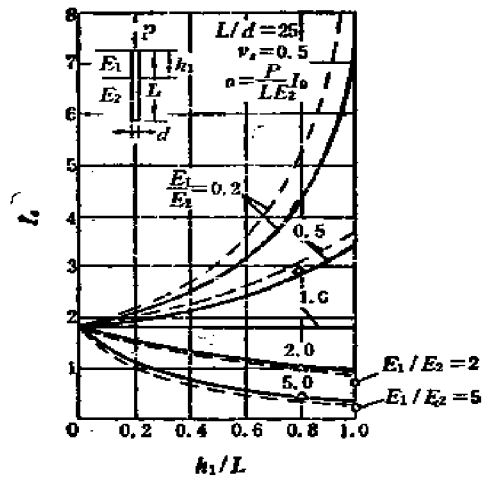


图 11.11 层状土中桩的沉降量

实线用式(11.27)求解，虚线用式(11.28)求解，ρ—桩顶位移，○—端承桩情况，△—有限元求解结果

非均质土处理的另一条途径是，先用 Mindlin 应力公式积分后求得计算点 i 处的竖向应力 σ_{zi}，然后运用熟知的分层总和法公式计算该点的位移量(不考虑土的侧胀)。该方法基于下述假设：

1) 地基土非线性性质只对土体的位移有较大影响，而对土中应力，特别是对竖向应力影响不大；

2) 考虑到桩基分析中，计算点离地面较深，而目前勘察部门一般只提供压缩模量，很少提供土的弹性模量；

3) 分层总和法计算变形公式有较长的使用历史，并积累着与实测变形对比的资料。

采用这一途径进行单桩分析，只需对前述土的位移方程式(11.24)中的竖向位移影响系数 I_{ij}、I_{sj}、I_{ib}、I_{bb} 作适当修改，而式(11.23)和式(11.25)依旧不变。

有限深度的近似处理

前面土的位移柔度矩阵$[I_s]$中的元素(见式 11.15)仅适用于无限深的土体。对于有限厚度H的土层，层内任一点的竖向位移影响系数，可近似地按下式计算：

$$I_{ij(H)} = I_{ij(\infty)} - I_{Hj(\infty)} \tag{11.29}$$

式中 $I_{ij(\infty)}$——在无限土体介质中，单元 j 上单位摩阻力引起 i 点处的竖向位移影响系数；

$I_{Hj(\infty)}$——在无限土体介质中，单元 j 上单位摩阻力对地表下H深度处点 i' 的竖向位移影响系数(i' 在 i 点的正下方)。

综上可见，弹性理论法的优点是考虑了实际土体的连续性。就这点而言，它可考虑桩与桩之间相互影响的群桩分析，比传递函数法要合理些。但用弹性理论法时，计算土的竖向位移柔度矩阵$[I_s]$较为费时，另外，如何正确选择土的两个重要指标 E_s、ν_s 值还有待进一步解决。

3. 剪切位移法

本方法是把桩身和桩尖变形分别计算。对于桩身部分，由于桩上荷载的作用使周围土

体发生剪切变形，而剪应力又通过桩侧周围连续环形土单位向四周传播，如图 11.13 所示。其结果在桩尖水平面处产生如形状 A_1B_1 那样的变形(见图 11.12)。而桩底部分，则按一般弹性理论方法计算其变形，如 A_2B_2 形状。然后考虑两个变形相容条件，求解桩的轴力、位移和摩阻力等。

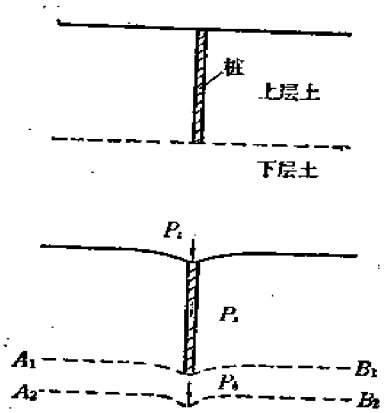


图 11.12 上层和下层土各自的变形形状

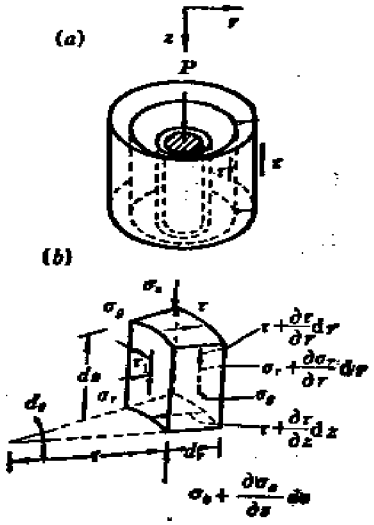


图 11.13 桩身的变形模型(a)及土单元的应力(b)

(1) 桩侧土的位移方程

受荷桩身周围土的变形可理想地视作为同心的圆柱体（图 11.13a）。这一假定的正确性已被 Cooke(1974) 桩的试验结果所证实。此后，Frank(1974, 1975) 和 Baguelin 等人(1975)用有限元分析也证实这一假定的合理性。

从圆柱体内取一微分体(图 11.13b)，根据弹性理论可写出竖向平衡微分方程式：

$$\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}\cdot r)+r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \tag{11.30}$$

由于桩受荷后，桩身附近处的剪应力 τ 的增加远大于竖向应力 σ_z，因而略去 $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ 项后，方程式近似地变为：

$$\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz}\cdot r)=0 \tag{11.31}$$

用分离变量法可求得该方程的解为：

$$\tau_{rz}=\frac{\tau_0 r_0}{r} \tag{11.32}$$

式中 τ_0、r_0——分别表示桩侧土表面处的剪应力和桩的半径。

由弹性理论几何方程，剪切变形表达式为

$$\gamma=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}^{*} \tag{11.33}$$

* 略去轴向应变和径向应变。

再根据轴对称课题的物理方程，则有：

$$\gamma=\frac{\tau}{G_s} \tag{11.34}$$

把式(11.32)、(11.34)代入式 (11.33)，略去 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 项，则得

$$\partial w=\frac{\tau}{G_s}\partial r=\frac{\tau_0 r_0}{G_s}\cdot\frac{\partial r}{r} \tag{11.35}$$

两边积分后求得地表下任一深度 z 处水平面上的竖向位移：

$$\left.\begin{aligned} w(z,r)&=\int\partial w=\frac{\tau_0 r_0}{G_s}\int_{r_0}^{r_m}\frac{\partial r}{r}=\frac{\tau_0 r_0}{G_s}\ln\left(\frac{r_m}{r}\right) && (r_0\leqslant r\leqslant r_m)\\ w(z,r)&=0 && (r>r_m)\end{aligned}\right\} \tag{11.36}$$

式中 u、w——分别为土的径向和竖向位移；

G_s——桩身范围内土的剪切模量；

r——离桩轴线的水平距离；

r_m——剪切变形可忽略的范围（离桩轴线的水平距离），Randolph(1978) 建议可取 $2.5L(1-\nu_s)$，L 为桩长。

图11.14中，

$$w(r)=\frac{\tau_0 r_0}{G_s}\ln\left(\frac{r_m}{r}\right)$$

或

$$w(r)=w_s-w_1(r)=w_s-\frac{\tau_0 r_0}{G_s}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

(2) 桩底土的位移方程

由于桩尖犹如一个刚性压块，Randolph(1979) 建议可用 Boussinesq 公式求解，即

$$w_b=\frac{(1-\nu_b^2)}{E_b}\omega_m\cdot d\cdot p_b \tag{11.37}$$

对于刚性压块，ω 取 0.79，于是

$$w_b=\frac{P_b(1-\nu_b)}{4r_0G_b} \tag{11.38}$$

式中 ν_b、G_b——分别指桩底标高以下土的泊松比和剪切模量。

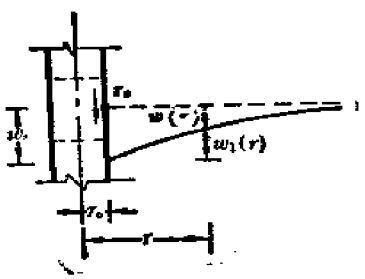
(3) 可压缩性桩的解析表达式

由于桩身位移 s 和土的位移 w 相等，故桩身位移方程式(11.3)又可写成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{k}{AE_p}w=0 \tag{11.39}$$

式中

$$k=2\pi G_s/\ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right)$$



■ 11.14 某一深度处，桩侧外竖向位移(w)随水平径向距离(r)的变化

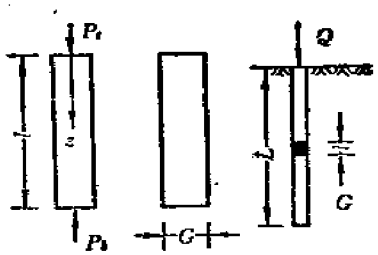


图 11.15 计算图式

上式为常系数齐次线性微分方程，其通解为：

$$w = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z} \tag{11.40}$$

式中 c_1、c_2——待定常数；$r_1 = \sqrt{\dfrac{k}{AE_p}}$，$r_2 = -\sqrt{\dfrac{k}{AE_p}}$

而桩身轴力方程式(11.2)可写成：

$$P_z = -AE_p \frac{\partial w}{\partial z} = -AE_p(c_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 z} - c_2 \cdot r_1 \cdot e^{-r_1 z}) \tag{11.41}$$

合并式(11.40)、(11.41)得：

$$\begin{Bmatrix} w_z \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{r_1 z} & e^{r_2 z} \\ -AE_p \cdot r_1 \cdot e^{r_1 z} & AE_p \cdot r_1 \cdot e^{r_2 z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \tag{11.42}$$

或简写成

$$\begin{Bmatrix} w_z \\ P_z \end{Bmatrix} = [T(z)] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

若讨论长度为 l 的桩段，如图 11.15 所示。可分别写出该段顶部和底部处的位移和轴力方程：

顶部：

$$\begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix}_t = [T(z_t)] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (z_t = z)$$

底部：

$$\begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix}_B = [T(z_B)] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (z_B = z + l)$$

消去 c_1、c_2：

$$\begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix}_t = [T(z_t)][T(z_B)]^{-1} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix}_B = [T] \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix}_B \tag{11.43}$$

式中 $[T]$——变换矩阵，其值为：

$$[T] = \begin{bmatrix} t_1 & \dfrac{1}{AE_p} t_2 \\ AE_p\, t_3 & t_4 \end{bmatrix} \quad \text{(均质土情况)}$$

$$t_1 = \frac{[\exp(\eta_2) \cdot \exp(-\eta_1) + \exp(-\eta_2) \cdot \exp(\eta_1)]}{2}$$

$$t_2 = \frac{-[\exp(\eta_2) \cdot \exp(-\eta_1) - \exp(-\eta_2) \cdot \exp(\eta_1)]}{2r_1}$$

$$t_3 = \frac{-r_1[\exp(\eta_2) \cdot \exp(-\eta_1) - \exp(-\eta_2) \cdot \exp(\eta_1)]}{2}$$

$$t_4 = \frac{[\exp(\eta_2) \cdot \exp(-\eta_1) + \exp(-\eta_2) \cdot \exp(\eta_1)]}{2}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{k}{AE_p}\right)^{1/2} \cdot z_B, \quad \eta_2 = \left(\frac{k}{AE_p}\right)^{1/2} \cdot z_t$$

由式(11.43)可见，在均质土(剪切模量不随深度变化)情况中，如果已知桩段底部(或桩段顶部)的位移和轴力，就可通过变换矩阵求得该桩段顶部(或底部)的位移和轴力。这样，就不需要或减少对桩身的离散程度，以节省计算时间。

【例 11.1】 一根长 15.24 m、直径 30 cm 的桩沉入土中，桩的 $AE_p = 24.11 \times 10^6$N，均质土的剪切模量 $G = 47.9 \times 10^5$Pa，泊松比 $\nu = 0.5$。

$$r_m = 2.5L(1-\nu)\cdot 0.5 = 2.5\times 15.24\times 0.5^2 = 9.525\ \text{m}$$

$$k = 2\pi G/\ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right) = 2\pi\cdot 47.9\times 10^5/\ln\left(\frac{9.525}{0.15}\right) = 72.5\times 10^5\ \text{Pa}$$

$$\eta_1 = \left(\frac{kl^2}{AE_p}\right)^{1/2} = \left(\frac{72.5\times 10^5\times 15.24^2}{24.11\times 10^8}\right)^{1/2} = 0.837$$

$$t_1 = 1.3713,\ t_2 = 17.108,\ t_3 = 0.052,\ t_4 = 1.3713$$

设桩底的轴力 $P_b = 1$ N，则

$$w_b = \frac{P_b(1-\nu)}{4r_0G} = \frac{1\times 0.5}{4\times 0.15\times 47.9\times 10^5} = 0.174\times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$w_t = 0.238\times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$P_t = 23.19\ \text{N}$$

$$\text{桩顶处的柔度} = \frac{w_t}{P_t} = 0.0102\times 10^{-6}\ \text{m/N}$$

若桩上的作用荷载为已知值时，则代入上式即可得到相应的桩顶位移。

图 11.16 和 11.17 及表 11.4 反映了刚性桩 ($G \ll E_p$) 和可压缩性桩用剪切位移法与弹性理论法的计算结果有较好的吻合。

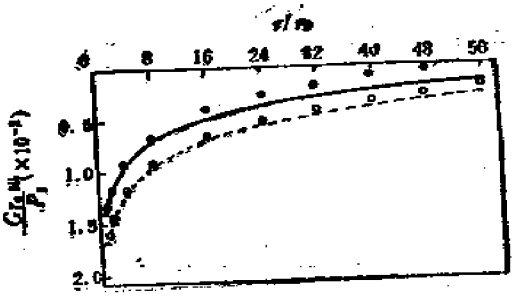


图 11.16 刚性桩桩身中点水平面上的变形曲线

图中，$\frac{L}{r_0}=40$，均质土；实线、虚线（或黑点、圆圈点）分别表示 $\nu=0.5$ 和 $\nu=0.0$ 时，用弹性理论法（或用公式(11.43)）计算的结果

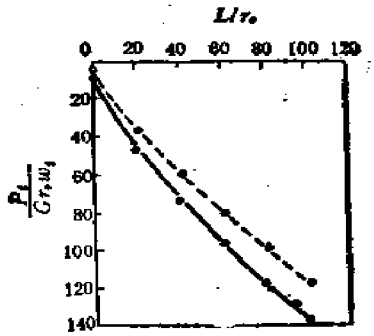


图 11.17 不同细长比下，刚性桩的荷载与沉降之比值

图中，实线、虚线（或黑点、圆圈点）分别表示 $\nu=0.5$ 和 $\nu=0.0$ 时，用弹性理论法（或用公式(11.43)）计算的结果

表 11.4 弹性理论法与剪切位移法的计算结果比较

长细比	计算内容	计算方法	$\lambda=E_p/G_s$				
			10^5	10^4	3×10^3	10^3	3×10^2
$L/r_0=40$	w_t/w_b	弹性理论法	1.00	1.05	1.12	1.49	2.66
		公式 (11.43)	1.00	1.04	1.13	1.42	2.61
	$P_t/G_sr_0w_t$	弹性理论法	67.8	65.7	61.3	52.0	36.8
		公式 (11.43)	68.0	66.0	61.6	52.3	36.0
$L/r_0=80$	w_t/w_b	弹性理论法	1.00	1.16	1.54	2.68	6.75
		公式 (11.43)	1.00	1.14	1.48	2.66	9.92
	$P_t/G_sr_0w_t$	弹性理论法	112.7	102.2	85.2	61.6	38.0
		公式 (11.43)	111.5	101.6	84.9	60.4	35.0

注：土的泊松比 $\nu=0.4$

11.2.2 竖向荷载下群桩受力的性状

群桩的受力特性要求考虑桩-土-桩之间(有时还要包括上部结构物、筏基础的影响)的共同作用。近些年来,国内外对群桩的工作性状进行了广泛研究并发表许多著作[1,6,7]。从一般弹性分析进入非线性分析,同时还计及桩周土的固结效应、承台板底面压力对桩基础承载力的分担作用、土在打桩过程中的挤密效应以及桩基承载力与打桩流程关系等。应当指出,影响桩基础受力特性的因素甚多,如土的性质、桩的间距、桩长、桩的布置以及上部结构物的刚度等。因此,要寻求某一种方法能把这系列因素都考虑进去是有困难的,也正因为这样,所以目前对群桩受力分析的研究方法较多,正处于方兴未艾。有限单元法是个较好的方法,但对群桩作一个完全三维分析,需要很大的计算机容量,费钱又费时。这里,就几种流行的分析方法介绍于下:

1. 弹性理论法

群桩基础的计算是基于单根桩分析的基础上,以弹性理论的应力叠加原理,把在弹性介质中二根桩的分析结果,通过引入一个"共同作用系数",而扩展到一组群桩中去。

(1) 二根桩的共同作用分析——共同作用系数 α

现考虑弹性介质中二根截面和所受荷载都相同的桩。同单根桩一样,把桩分成若干小段,如图 11.18。

按照单根桩的分析公式 (11.22) 或 (11.25),求得单根桩上各桩段上的轴力和位移后,把单根桩桩顶位移 w_t 和桩顶荷载 P_t 取出;或用下式表示它们之间关系:

$$w_t = \frac{P_t}{E_s d} I = \rho \cdot P_t \tag{11.44}$$

式中 I——影响系数,它与 d_b/d、L/d、E_p/E_s、H/L、ν_s 等因素有关(H 为土层的厚度,其它符号同前);$I = I_0 \cdot R_h \cdot R_b \cdot R_\nu$ (可从图 11.19~11.22 查得)。

ρ——单根桩在桩顶单位荷载作用下的桩顶位移。

这样,对于二根桩的情况,不难写出:

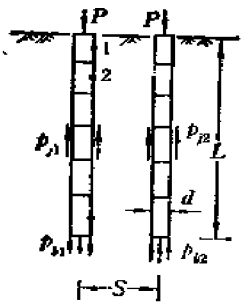


图 11.18 两根桩情况下弹性理论法的分析

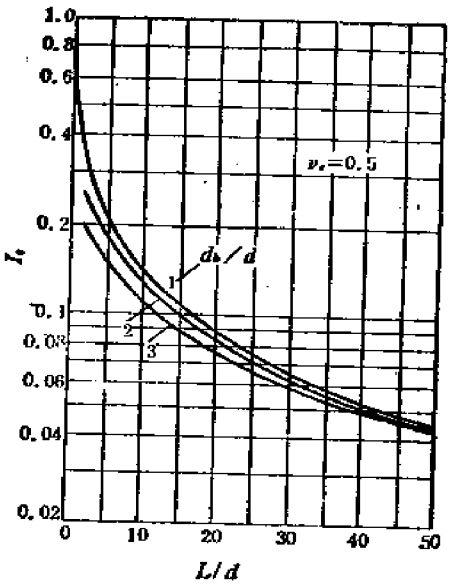


图 11.19 系数 I_0 值 当 $L/d=100$ 时,$I_0=0.0254$ $(d_b/d=1\sim3)$

$$\begin{Bmatrix} w_{t_1} \\ w_{t_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_s d}[I^1 + I^2]\begin{Bmatrix} P_{t_1} \\ P_{t_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_{t_1} \\ P_{t_2} \end{Bmatrix} \tag{11.45}$$

式中，$[I^1 + I^2]$——位移影响矩阵，其中元素 $I^1_{ij} + I^2_{ij}$ 分别表示第一根和第二根桩上第 j 单元上的剪应力对第一根(或第二根)桩上第 i 单元的位移影响系数。

上述分析结果，可方便地用一个"共同作用系数"来表示：

$$\alpha_{ij} = \frac{\text{由第 } j \text{ 根桩上的单位荷载对第 } i \text{ 根桩所产生的附加沉降量}}{\text{第 } i \text{ 根桩上的单位荷载对第 } i \text{ 根桩所产生的沉降量}}$$

$$= f\left(\frac{s}{d}、\frac{E_P}{E_s}、\frac{L}{d}、\nu_s\right)$$

式中 s——表示两桩的中心距离。α_P 值如图 11.23 所示。

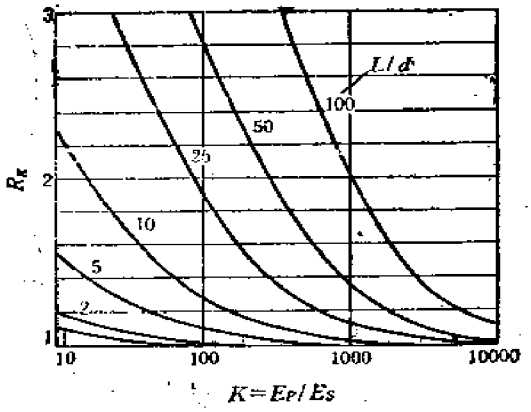


图 11.20 系数 R_k 值

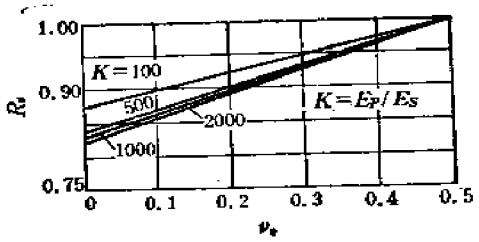


图 11.21 系数 R_ν 值

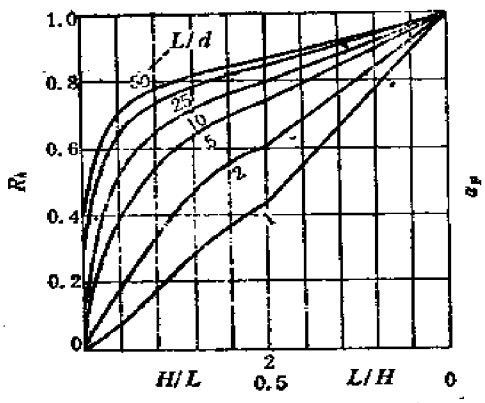


图 11.22 系数 R_h 值

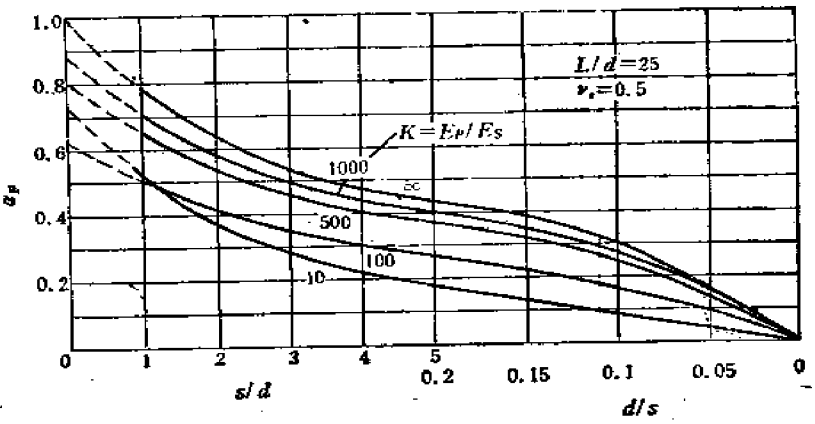


图 11.23 系数 α_P 值

这样，当由四根桩所构成的一个方形桩群时，桩群的位移量为：

$$w_G = (1 + 2\alpha_1 + \alpha_2)\rho P_1$$

式中 P_1——在每根桩上的荷载；

α_1——与间距 s/d 有关的共同作用系数；

α_2——与间距 $\sqrt{2}\,s/d$ 有关的共同作用系数。

对于由 n 根相同的桩的桩群，则其中任一根桩 k 的沉降量为：

$$w_k = \rho \cdot P_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\rho \cdot P_j \cdot \alpha_{kj}) \tag{11.46}$$

式中 α_{kj}——与桩 k 和桩 j 间距有关的共同作用系数，并且是对桩 j 的几何尺寸而言的。

对桩群中所有的桩，写出式(11.46)，便得到 n 个位移方程式。另有竖向荷载平衡条件，可得：

$$P_C = \sum_{j=1}^{n} P_j \tag{11.47}$$

式中 P_C——作用在桩群上的总荷载。

于是，根据桩顶上承台板的特性(刚性的或有限刚度的)，写出桩顶平面处的变形协调条件，就可解出作用在各根桩顶上的荷载和位移。

【例11.2】 六根0.3 m直径、7.5 m长的钢筋混凝土桩插入中密状态的粘土中(图11.24)。桩与土的弹性模量之比 $E_p/E_s = 2000$。桩1、3、4、6属于类型 A，桩2、5属于类型 B。按图11.23可查得共同作用系数 α 列表如下：

桩号 j	桩号1(类型 A)		桩号2(类型 B)	
	s/d	α_{1j}	s/d	α_{2j}
1	0	—	5	0.42
2	5	0.42	0	—
3	10	0.27	5	0.42
4	5	0.42	7.07	0.35
5	7.07	0.35	5	0.42
6	11.2	0.25	7.07	0.35

由单根桩试验测得：在0.5 MN荷载作用下，桩顶变形量为1.52 cm；于是，对类型 A 的桩的变形量按式(11.46)：

$$w_A = \rho[P_A(0.27 + 0.42 + 0.25) + P_B(0.42 + 0.35) + P_A]$$

同理，
$$w_B = \rho[P_A(0.42 + 0.42 + 0.35 + 0.35) + P_B \cdot 0.42 + P_B]$$

由静力平衡条件得
$$4P_A + 2P_B = 3 \text{ MN}$$

若承台为刚性板，则有 $w_A = w_B = w$。用矩阵写出上述方程($\rho = 3.04$ cm/MN)：

$$\begin{bmatrix} 1.94\rho & 0.77\rho & -1 \\ 1.54\rho & 1.42\rho & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

解方程组后得到：

$$P_A = 0.574 \text{ MN}, \quad P_B = 0.352 \text{ MN}, \quad w = 4.21 \text{ cm}$$

从例11.2可见，在相同桩顶荷载下，群桩的沉降量要比单根桩的情况为大；这是由于考虑了桩土之间的相互作用以及由于桩尖应力重叠的结果。

应当指出，图11.23中 α_F 的曲线是指桩在半无限弹性体中的情况；对于有限可压缩土层的情况、大直径桩尖以及土的不同泊松比等情况，需要对 α_F 值进行修正，考虑如下：

$$\alpha = \alpha_F \cdot N_h \qquad \text{(有限可压缩土层情况)} \tag{11.48}$$

$$\alpha = \alpha_F \cdot N_{db} \qquad (d_b/d > 1 \text{ 情况，当 } d_b/d = 1 \text{ 时，} N_{db} = 1) \tag{11.49}$$

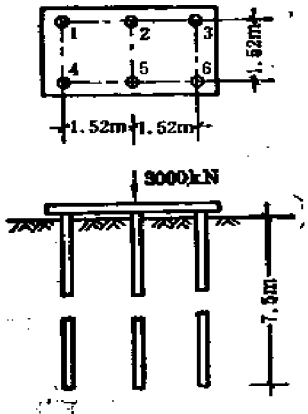


图 11.24 例 11.2 图

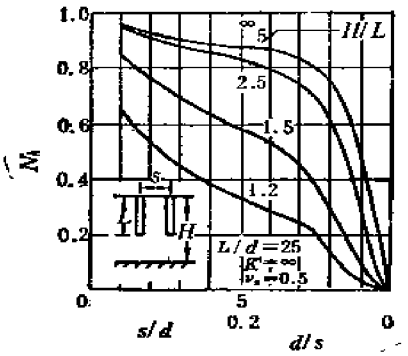


图 11.25 系数 N_h 值

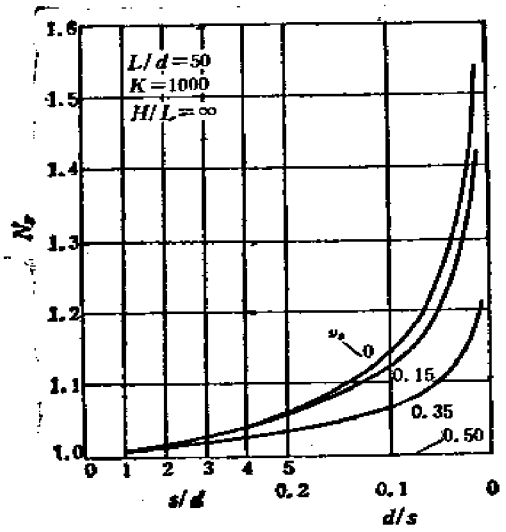


图 11.26 系数 N_p 值

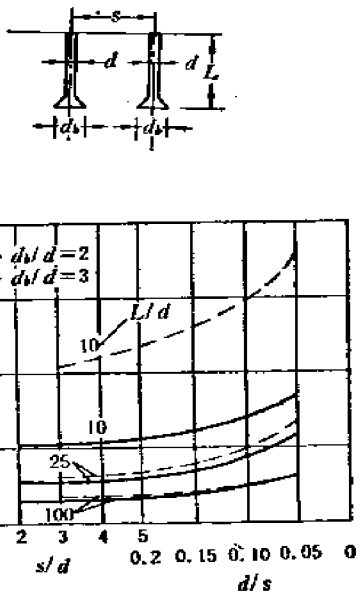


图 11.27 系数 N_{ch} 值

$$\alpha = \alpha_{0.5} \cdot N_\nu \qquad (\nu \neq 0.5 \text{ 的情况}) \tag{11.50}$$

系数 N_h、N_{ch}、N_ν 见图 11.25, 11.26, 11.27 所示。

从上可见，群桩受力分析的要点是，先建立在桩顶处(包括土)的桩顶荷载与其位移之间的关系式；然后，根据竖向静力平衡条件以及桩顶标高处桩顶(包括土)位移与基础板位移的协调条件，求解实际作用在桩顶上的荷载和位移值。

(2) 桩、筏基础的共同作用分析

与前面一样，先考察带有圆形帽板的二根桩，如图 11.28 所示。帽板的直径 d_c，并分成 v 个圆环，圆环下的竖向压力 p_{ch} 认为是均匀分布。于是按图 11.28 右图和式 (11.13) (11.14)，可写出桩 1 上桩段 i 处的位移计算式，即：

$$w_i = \frac{d}{E_c}\left(\sum_{j=1}^{n}(I_{ij}^1 + I_{ij}^2)p_j + (I_{ib}^1 + I_{ib}^2)p_b + \sum_{k=1}^{v}(I_{ik}^1 + I_{ik}^2)p_{ch}\right) \tag{11.51}$$

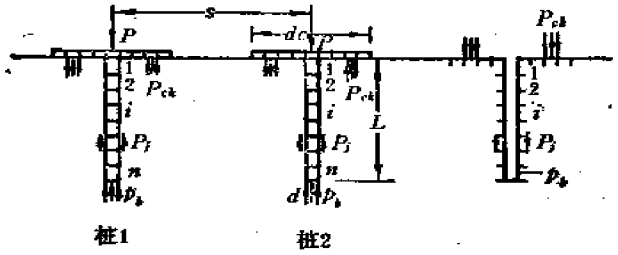


图 11.28　桩、筏基础的计算图式

式中 I_{ij}^1、I_{ij}^2——分别是桩1、桩2上第 j 单元处的剪应力对 i 点所引起的位移；

I_{ib}^1、I_{ib}^2——分别是桩1、桩2底面压力对 i 点所产生的位移；

I_{ik}^1、I_{ik}^2——分别是桩帽第 k 环板下压力对 i 点所产生的竖向位移，可用 Boussinesq 公式求解。

这样，就可列出 $(n+v+1)$ 个方程式(用矩阵表示，类似于式 11.46)。为了把上述两根桩的结果推广到一组 m 根桩的情况中，这里也引用一个"共同作用系数 α_r"，其含义是：

$$\alpha_r = \frac{\text{单位荷载作用下的邻近桩对讨论的这根桩所产生的附加变形}}{\text{讨论桩本身在单位荷载下所产生的变形}} = f\left(\frac{s}{d},\ \frac{L}{d},\ \frac{d_0}{d},\ \nu_s\right)$$

其数值如图 11.29 所示。

于是，利用叠加原理，可写出第 i 根桩顶产生的沉降量：

$$w_i = \bar{\rho}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \alpha_{ri,j}\bar{P}_j + \bar{P}_i\right) \tag{11.52}$$

式中 $\bar{P}_i$、$\bar{P}_j$——分别是作用在有帽板 i、j 桩上的荷载；

$\alpha_{ri,j}$——帽板桩 i、j 之间的共同作用系数；

$\bar{\rho}$——单位荷载下单根有帽板桩的变形，$\bar{\rho} = R_a \cdot \rho$；

ρ——单位荷载下单根无帽板桩的变形；

R_a——考虑桩帽的影响系数，见图 11.30。

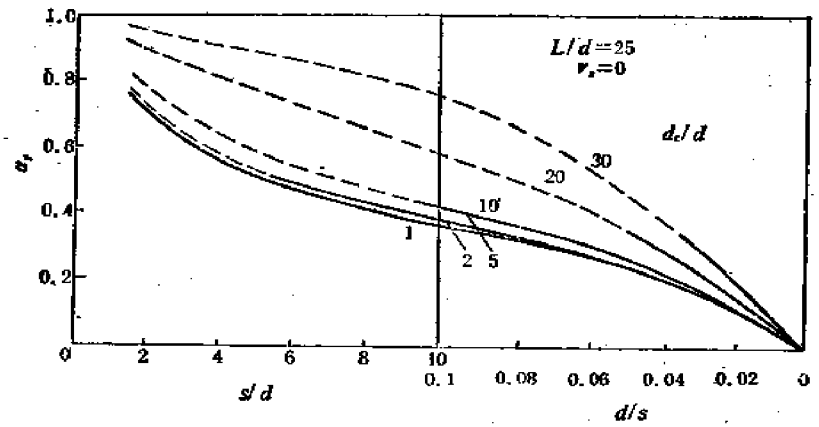


图 11.29　系数 α_r 值

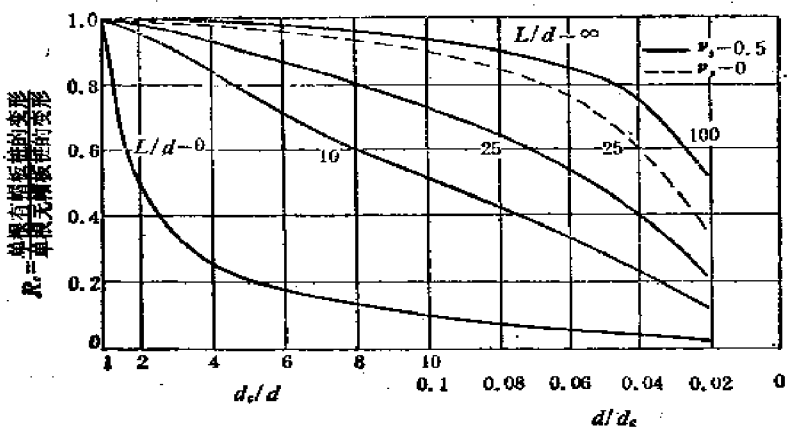


图 11.30 系数 R_s 值

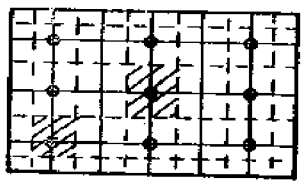


图 11.31 筏板基础划分的网格图

式(11.52)给出桩顶荷载与位移的 m 个方程；对于图 11.31 所示的矩形筏板，利用式(10.9)可以写出

$$[K_R]\{S\} = \{P\} - \{R\} \tag{11.53}$$

式中 $\{P\}$——作用板面结点上的已知荷载；

$[K_R]$——筏板的刚度矩阵，因为每个结点有三个自由度 θ_{xi}、θ_{yi}、w_{zi}；如图 11.31 中有 35 个结点，故矩阵大小为 105×105；

$\{R\}$——筏板与桩、土接触面之间的接触压力 $[00R_100R_2\cdots]^T$；

$\{S\}$——筏板的结点位移 $[\theta_{x1}\theta_{y1}w_{z1}\theta_{x2}\theta_{y2}w_{z2}\cdots]^T$

整个接触面积上 n 个结点中，有 m 个结点为桩(图 11.31 中 $n=35$，$m=9$)。那么，由 m 个结点的桩、$(n-m)$ 个结点面积 A_j 上的接触压力 $\bar{P}_j$、P_j 对结点 i 所产生变形表达式为：

有桩结点处的 m 个变形表达式：

$$w_i = \left[\bar{\rho}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} a_{ij}\bar{P}_j + \bar{P}_i\right)\right] + \left[\sum_{j=m+1}^{n}\eta_{ij}\cdot P_j/A_j\right] \tag{11.54}$$

无桩结点处的 $(n-m)$ 个变形表达式：

$$w_i = \left[\sum_{j=1}^{m}\bar{\eta}_{ij}\cdot\bar{P}_j\right] + \left[\sum_{j=m+1}^{n}\eta_{ij}\cdot P_j/A_j\right] \tag{11.55}$$

式中 η_{ij}——第 j 结点处单位均布荷载对结点 i 所产生变形量，用 Boussinesq 公式计算；

$\bar{\eta}_{ij}$——单位荷载作用下，第 j 根单根桩对 i 结点所产生的变形量；

其它符号同前说明。于是，按照板底接触面上的变形协调条件 $\{S\}=\{w\}$，即把由式(11.54)和(11.55)联合而成的 n 个表达式代入式(11.53)中，解出未知的接触压力 $\{R\}$(包括桩顶作用力和土反力)。再代入式(11.53)求出板面结点上的位移 $\{S\}$。

(3) 上部结构与桩、筏基础的共同作用分析

设有如图 11.32 所示的上部结构，则上部结构的位移 $\{U\}$ 和荷载 $\{P\}$ 的平衡方程式为

$$\{P\} = [K_{st}]\{U\} \tag{11.56}$$

式中 $[K_{st}]$——上部结构的刚度矩阵。

用分块形式把上式写成：

$$\begin{Bmatrix} P_s \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s \\ U_b \end{Bmatrix} \tag{11.57}$$

式中 $\{U_b\}$——指上部结构与筏基接触点的位移列向量。

展开式(11.57)后为：

$$\{P_s\} = [K_{ss}]\{U_s\} + [K_{sb}]\{U_b\} \tag{11.58}$$

$$\{P_b\} = [K_{bs}]\{U_s\} + [K_{bb}]\{U_b\} \tag{11.59}$$

式(11.58)移项后，得

$$\{U_s\} = [K_{ss}]^{-1}(\{P_s\} - [K_{sb}]\{U_b\}) \tag{11.60}$$

上式代入式 (11.59)，得

$$\{P_b\} - [K_{bs}][K_{ss}]^{-1}\{P_s\} = ([K_{bb}] - [K_{bs}][K_{ss}]^{-1}[K_{sb}])\{U_b\} \tag{11.61}$$

或简写成

$$\{S_B\} = [K'_B]\{U_b\} \tag{11.62}$$

式中 $\{S_B\}$——上部结构通过凝聚后为等效的边界荷载列向量；

$[K'_B]$——上部结构凝聚后的等效边界刚度，即图 11.32 中的 K_b。

把 $\{S_B\}$ 和 $[K'_B]$ 叠加到桩、筏基础上，于是即得到上部结构与桩筏基础共同作用的方程式，即修改式(11.53)后为：

$$([K'_B] + [K_B])\{S\} = \{S_B\} - \{R\} \tag{11.63}$$

把式(11.54)、(11.55) 代入上式，先后求出 $\{R\}$、$\{S\}$。把上部结构与筏板面相接触点的位移 $\{U_b\}$ 从 $\{S\}$ 中取出，代入式(11.60)就可求得整个上部结构的结点位移 $\{U_s\}$。

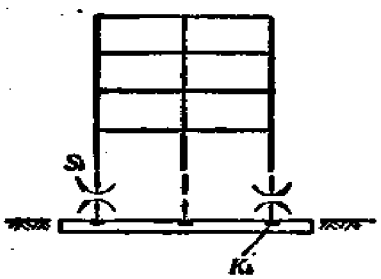


图 11.32 在柱底处的凝聚荷载 S_b 和凝聚刚度 K_b

2. 剪切位移法

与弹性理论法一样，从两根桩情况着手分析，然后扩展到群桩的分析。为减少计算的工作量，在桩长方向采用解析方法，从而建立群桩桩顶的柔度矩阵。按前述方法便可与筏桩基础耦合而求出外荷载作用下桩顶压力、位移等未知数。

(1) 两根桩的共同作用分析——刚度系数 k^* 值

考虑如图 11.33 所示的两根桩情况，在某一深度 z 处 1、2 两点的位移，根据图 11.14 可写成

$$w_1 = w_s(1) + [w_s(2) - w_1(1, 2)] \tag{11.64}$$

$$w_2 = [w_s(1) - w_1(2, 1)] + w_s(2) \tag{11.65}$$

式中 $w_s(1)$——在单根桩情况下，由点 1 的剪应力而引起在该处的位移；

$[w_s(2) - w_1(1, 2)]$——在两根桩情况下，由于点 2 处的剪应力引起邻近桩第 1 点处的位移量。

上式可用矩阵形式表示：

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{22} + f_{12} \\ f_{11} + f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \tag{11.66}$$

或

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{-1}{(f_{12}f_{11} + f_{22}f_{21} + f_{12}f_{21})} \begin{bmatrix} f_{22} & -(f_{22} + f_{21}) \\ -(f_{11} + f_{21}) & f_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \tag{11.67}$$

由于两根桩的尺寸、所受荷载都相同，则有如下关系：

$$f_{11}=f_{22}=f; \qquad f_{12}=f_{21}=\Delta f;$$
$$w_1=w_2=w; \qquad p_1=p_2=p_0$$

于是上式写成：

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}=\frac{-1}{(2f\cdot\Delta f+\Delta f^2)}\begin{bmatrix} f & -(f+\Delta f) \\ -(f+\Delta f) & f \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \tag{11.68a}$$

或

$$p=\left[\frac{-f}{2f\cdot\Delta f+\Delta f^2}+\frac{(f+\Delta f)}{2f\cdot\Delta f+\Delta f^2}\right]w=\frac{1}{2f+\Delta f}w=k^*w \tag{11.68b}$$

式中 $f=\frac{1}{2\pi G}\ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right)$；$\Delta f\approx\frac{-1}{2\pi G}\ln\left(\frac{s}{r_0}\right)$；$s$ 为两桩中心距；

$$p_1=2\pi r_0\tau_1; \qquad p_2=2\pi r_0\tau_2; \qquad k^0=1/f_0$$

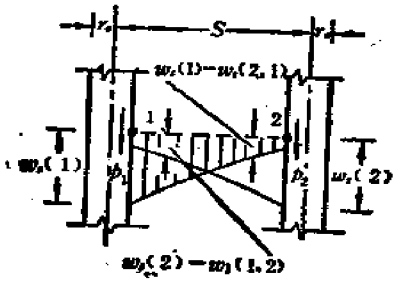


图 11.33 两根桩情况下，剪切位移法的分析

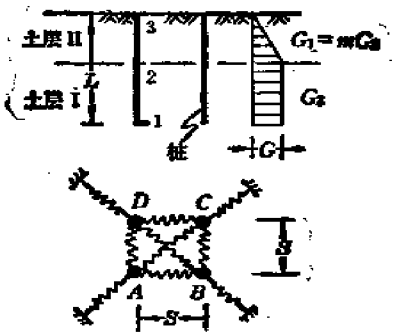


图 11.34 群桩的剪切位移法的分析

应当指出，k^* 的物理意义是指在两根相同尺寸桩的情况下，桩侧土的刚度；而 k^0 是单根桩时桩侧土的刚度。

(2) 群桩桩顶柔度矩阵的建立

对图 11.34 所示的四根桩群，由于桩侧土具有剪切刚度 G，桩土之间的共同作用可理想地作为一组连接桩身且与固定点相连的水平弹簧，而桩侧土的阻力仅仅与该土阻力所作用水平标高处的桩身位移有关。因此，这种理想化的概念与传统的 Winkler 模型相同，有的文献中把它称为“Winkler 模型”。

由于土层性质不同，剪切模量 G 随深度的变化规律也不同，于是把桩在竖向划分成若干段，并依次进行编号：点 1、2、3…。群桩桩顶柔度矩阵可按下述步骤计算：

(a) 按单根桩的情况考虑

设桩底处的轴力 $P_0=P_1=1$，则按式(11.38)可求得桩底处的位移为：

$$w_0=w_1=\frac{1-\nu}{4r_0G} \tag{11.69}$$

利用式 (11.43) 求出第 I 桩段顶部 (点 2) 的柔度 w_2/P_2。同理，再算出桩顶处的柔度 $F_{11}=w_1/P_1=w_3/P_3$。式中字母“F”记作桩顶处的柔度；图 11.34 四根桩截面尺寸相同，则 $F^{AA}=F^{BB}=F^{CC}=F^{DD}=F_{11}$。在执行第 I 段计算时，算式(11.43)中用到的 k 为 $k^0=1/f$。

(b) 按两根桩(如考虑 A、B 桩)的情况，则由于 B 桩的存在，在 A 桩底部所产生的位移为：

$$w_0^A=\frac{P_0^A(1-\nu)}{4r_0G}+\frac{P_0^B(1-\nu)}{2\pi G\cdot s} \tag{11.70}$$

式中 s——A、B 两桩的中心距。

于是，利用式(11.43)计算 A 桩中第 1 桩段顶点(点 2)的柔度为 w_2^A/P_2^A。应该指出，由于 A、B 两桩存在着相互作用，因此算式中的 k 值，此刻应该用 k^* 代入。类似步骤(a)，最后可求得桩 A 桩顶的柔度 F^*。从式(11.68b)可见 $F^*=F^{AA}+F^{AB}$，即：$F^{AB}=F^*-F^{AA}$

(c) 再考虑 A、C 桩情况，同上述步骤便可得到

$$F^{AC}=F^*-F^{AA}\quad(\text{计算 }F^*\text{ 时，桩距为 }s\cdot\sqrt{2})$$

于是，可建立由桩尖压力所引起的柔度矩阵$[F']$；再按文献[18]计算桩顶单位荷载下，各桩侧摩阻力(P_i-P_b，P_b 按式(11.43)计算，此刻 $w_t=F_{11}$，$P_t=1$) 引起各桩尖下土层的变形量，得$[F'']$。桩顶的柔度矩阵 $[F]$：

$$\{w_t\}=([F']+[F''])\{P_t\}=[F]\{P_t\} \tag{11.71}$$

式中 $\{w_t\}$——桩顶位移的列向量$[w_t^A w_t^B\cdots]^T$；

$\{P_t\}$——桩顶荷载的列向量 $[P_t^A P_t^B\cdots]^T$。

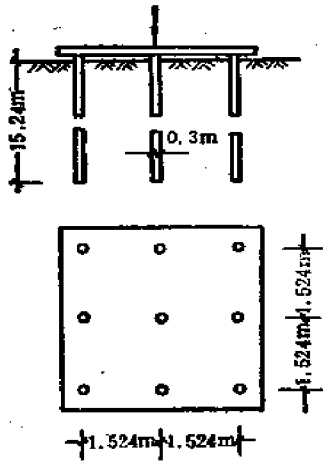


图 11.35 例 11.3 图

从上可见，剪切位移法求解的优点(与弹性理论法相比)是，由于在竖向引进一个变换矩阵$[T]$，能考虑层状地基土的情况。对于均质土，它毋需对桩进行离散，大大减少计算 工作量。在群桩计算中，它不依赖于许多系数(如"共同作用系数 α_r"、"单根桩在单位荷载下的桩顶位移 ρ" 等)图表，便于数值计算。同时在计算中也很容易考虑群桩中桩对变形的遮拦 (或屏障) 等作用。按此法所得的单桩分析结果(见图 11.16, 11.17; 表 11.4)与弹性理论法、有限单元法的结果颇为吻合。

【例 11.3】 如图 11.35 所示的群桩基础，桩径 30 cm，长度 $L=15.24$ m，桩的 $AE_p=24.11\times10^8$ N，土的 $G=47.9\times10^5P_a$，$\nu=0.5$，计算群桩桩顶柔度矩阵。

按例 11.1 计算单根桩桩顶的柔度，然后计算群桩桩顶柔度矩阵，如下表所示。

桩 号	1	2	5	3	6	9
间距 s (m)		1.524	2.155	3.048	3.408	4.310
$k^*(k^0)$ (Pa)	(72.50×10^5)	50.39×10^5	53.50×10^5	57.00×10^5	58.25×10^5	61.02×10^5
$\eta_1=\left(\frac{kL^2}{AE_p}\right)^{1/2}$	0.837	0.697	0.718	0.741	0.749	0.767
$F^*(F_{11})$ (m/N)	(1.004×10^{-8})	1.349×10^{-8}	1.288×10^{-8}	1.219×10^{-8}	1.199×10^{-8}	1.192×10^{-8}
F^*-F_{11} (m/N)	—	0.345×10^{-8}	0.284×10^{-8}	0.215×10^{-8}	0.195×10^{-8}	0.188×10^{-8}

（续）

桩　　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[F']=1.004\times10^{-9}$ (m/N)	1								
	0.344	1							
	0.214	0.344	1						
	0.344	0.282	0.194	1					
	0.282	0.344	0.282	0.344	1				
	0.194	0.282	0.344	0.214	0.344	1			
	0.214	0.194	0.187	0.344	0.282	0.194	1		
	0.194	0.214	0.194	0.282	0.344	0.282	0.344	1	
	0.187	0.194	0.214	0.194	0.282	0.344	0.214	0.344	1

$[F]$求逆后便可得到群桩桩顶的刚度矩阵，于是参照前述方法，式(11.53)、(11.63)就可进行上部结构与桩筏基础的共同作用分析。

3．有限单元法分析结果简介

有限单元法广泛地用于包括桩基的各类建筑物的设计计算中。它是十分有力的工具，从原则上说，它在计算中能同时考虑影响桩性能的许多因素，如土的非线性、固结时间效应以及动力效应等(虽然目前尚未能考虑进来)；但是，由于种种原因，在桩基，尤其是在群桩分析中采用甚少，其原因是桩基分析涉及到的因素多，比较复杂。另一方面是要求庞大的计算机容量，费用昂贵。可是，用有限单元法分析群桩共同作用的主要机理，并以它作为原则指导实际工程以及探索和校核工程的实用简化计算方法，有着重要的实际意义。这里，不打算涉及有限单元法本身的原理和解题过程，因为这些内容在许多教材中已有过叙述，而仅反映有限元分析桩基础的一些结果。

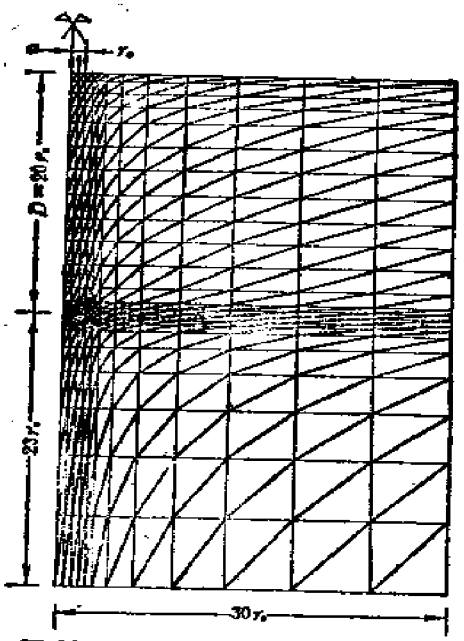


图 11.36　单桩有限元分析的网格图

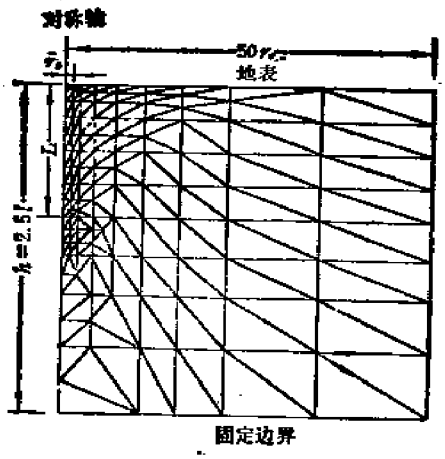


图 11.37　单桩有限元分析的网格图

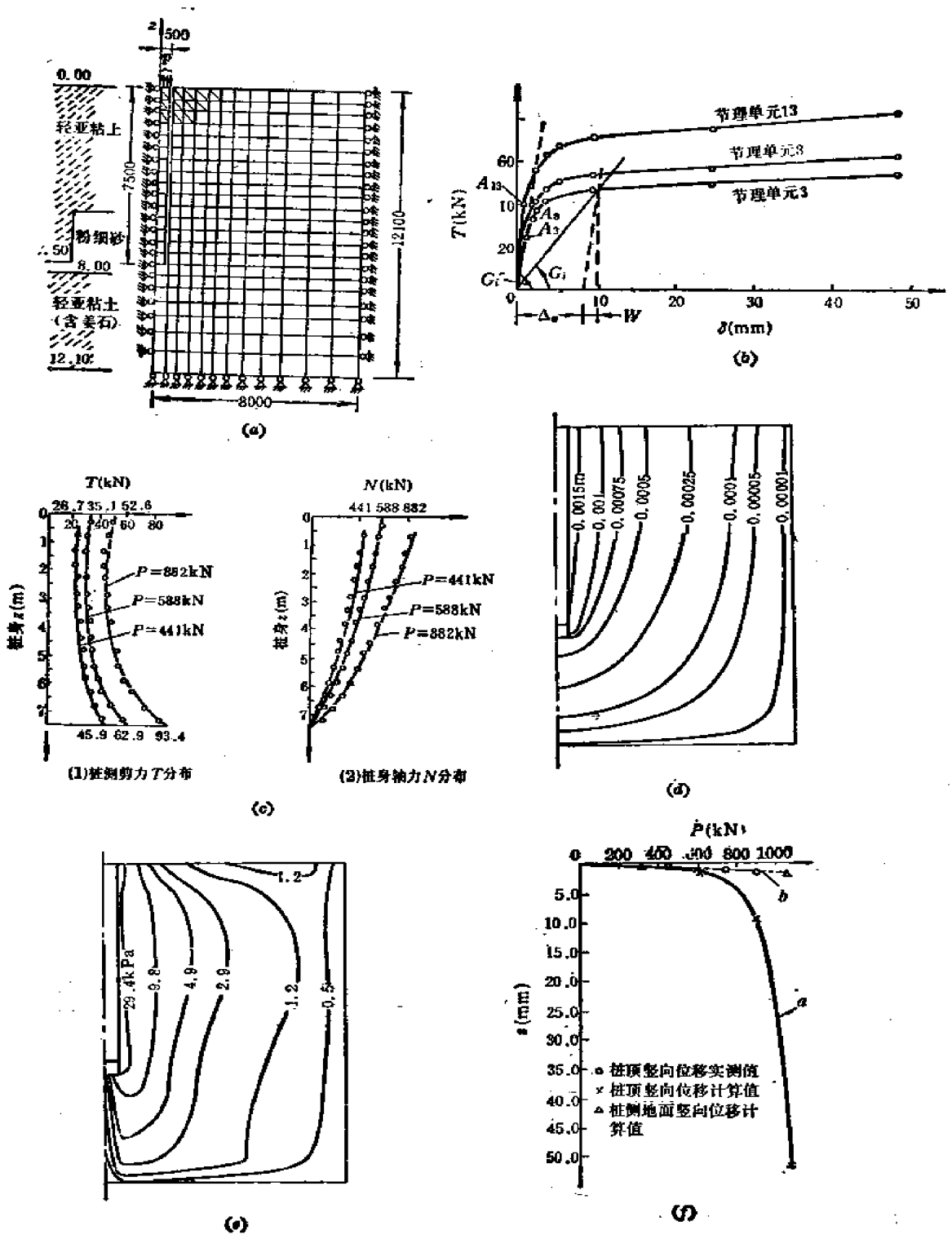


图 11.38

计算网格及边界条件(*a*)；节理单元剪力T与位移δ曲线(*b*)；
桩侧剪力及桩身轴力分布(*c*)；$P=882$ kN 时竖向位移等值线(*d*)；
$P=882$ kN 时最大剪应力等值线(*e*)；桩顶及地面计算 P-S 曲线(*f*)

在桩基分析中，较多的还是在单桩分析计算方面。由于几何形状和变形对称于桩的垂直轴线等特点，因而可简化为二维计算问题。网格大小和边界取法不一，如图 11.36、11.37 所示。若按图 11.36 形式，则边界可选用全部固定或者边界上仅有法向位移(滑动边界)的二种图式，其结果差值<5%。对竖向受荷的桩，其法向应力 σ_r 与桩附近垂直剪应力 τ_{rz} 相比，增加极少，其主要限于 $r=2r_0$ 的范围内；也就是说，在此区域内的土不因桩的受荷而产生径向移动。这些结果清楚地表明了在桩轴附近、处于支配地位的位移模式为纯剪切的垂直向同心圆柱体(图 11.13)。

$$EJ\frac{d^4x}{dz^4}-C_z\cdot b\cdot x=0 \tag{11.72}$$

式中 C_z——水平向地基反力系数(kN/m³)，通过各种试验方法求得；

b——桩的直径或宽度。

目前，我国采用的地基系数的几种不同分布形式如图 11.40 所示。地基系数 C_z 与深度 z 的一般表达式为：

$$C_z=C_t\left(\frac{z}{t}\right)^n \tag{11.73}$$

式中 C_z、C_t——分别为深度 z 和第一位移零点处($z=t$) 的地基系数；

n——随土的类别而变的一个指数。

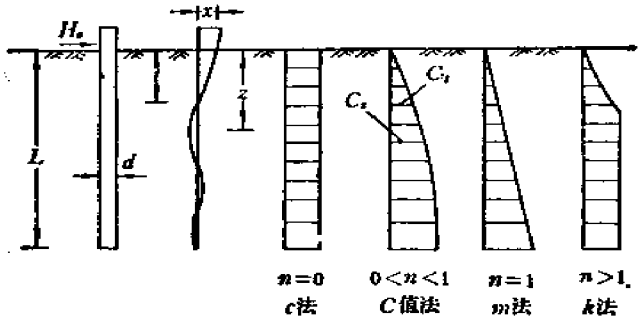


图 11.40 水平向地基系数随深度的变化

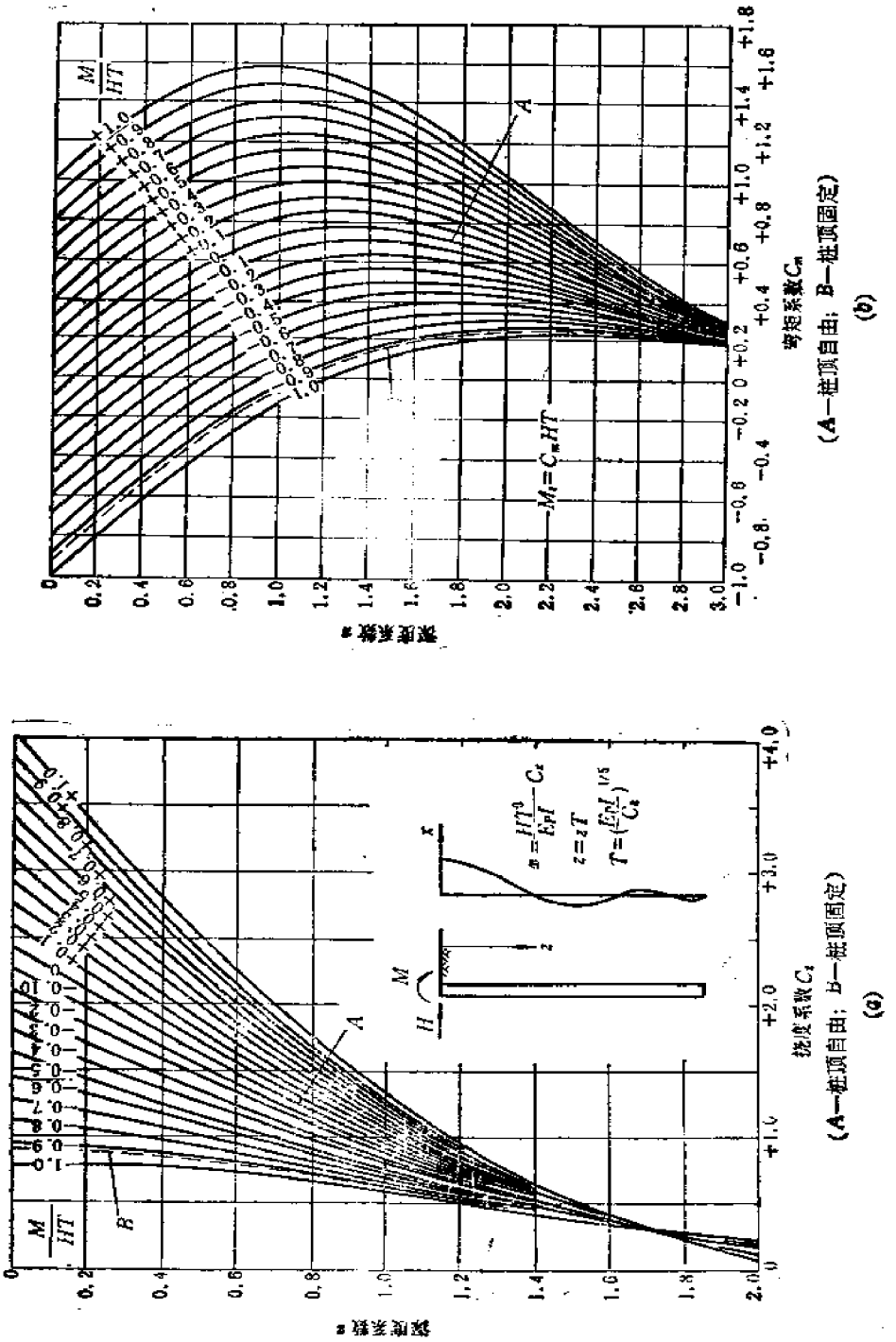
假定 $C_z=mz$，则由此假定而进行桩的内力计算方法，通常称作为 "m" 法；若假定 C_z 随深度呈抛物线型增加，即 $C_z=C\cdot z^{0.5}$，则由此而得的为 "C" 值法。系数 m 和 C 值可按下表选用。

表 11.5 系数 m 和 C 值

土 的 类 别	m(10kN/m⁴)	c(10 kN/m³·⁵)
流塑性粘土 $I_L\geqslant 1$ 淤泥	300—500	200—600
软塑性粘土 $1>I_L\geqslant 0.5$	500—1000	700—1100
硬塑性粘土 $0.5>I_L>0$ 细砂、中砂	1000—2000	1300—2300
坚硬、半坚硬粘性土 $I_L<0$ 粗砂	2000—3000	2000—7000
砾砂、角砾砂、圆砾砂碎石、卵石	3000—8000	5000—10000

应该指出，图 11.40 中的几种地基系数虽随深度 z 变化，但与水平向 x 的位移大小无关，因此它们仍属于线性计算范畴。微分方程式(11.72)只有在 C_z 分布形式简单的情况下才有解析表达式。当 C_z 为常数时，则可用图 11.41 求得不同深度 z 处的水平位移 x 和弯矩 M_z。当 C_z 沿 z 方向分布复杂时，可用数值法(如差分法、矩阵位移法等)求解。

把一根桩分成 n 段（每段长度不一），并在各分段结点上施加一个刚度为 C_z 的水平弹簧，以反映周围土的影响。现以矩阵位移法($n=3$)为例说明求解过程(图 11.42)。由于每个结点有二个自由度(水平位移 u 和转角 θ)，它的矩阵方程为：



(A—桩顶自由；B—桩顶固定)

(b)

(A—桩顶自由；B—桩顶固定)

(a)

■ 11.41 不同深度处的弯矩系数 C_m 和挠度系数 C_x

$$[K_P]\{u\} = \{P\} - \{R\} \tag{11.74}$$

式中 $\{u\}$——结点位移列向量 $[S_{x1}\quad \theta_1\quad S_{x2}\quad \theta_2\cdots]^T_{(2n+2)\times 1}$

$\{P\}$——作用在结点上的荷载列向量 $[H_0\quad M_0\quad 0\quad 0\cdots]^T_{(2n+2)\times 1}$

$[K_P]$——桩的总刚度矩阵 $(2n+2)\times(2n+2)$，是由各桩段单元刚度矩阵 $[K^e]$（见式(10.1)）集合而成；

$\{R\}$——弹簧反力列向量，它与弹簧的水平位移 S_x 有如下关系：$R_1 = C_{x1}\cdot\dfrac{\Delta l_1}{2}b\cdot S_{x1}$；

$$R_2 = C_{x2}\cdot\frac{\Delta l_1+\Delta l_2}{2}\cdot b\cdot S_{x2};\cdots;\quad R_n = C_{xn}\cdot\frac{\Delta l_n+\Delta l_{n-1}}{2}\,b\cdot S_{xn}。$$

其中 $C_{xi} = mz_i$（表示按“m”法计算），或 $C_{xi} = C\cdot z_i^{0.5}$（表示按“$C$”值法计算）。

把 $R_i \sim S_{xi}$ 的关系式代入式(11.74)，解出 $\{u\}$ 或 $\{R\}$，再利用静力平衡条件，解得桩身内各点弯矩值。

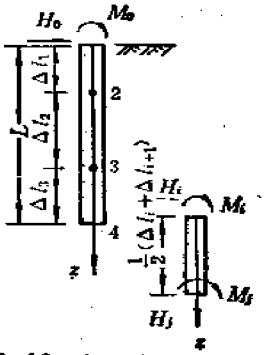


图 11.42　矩阵位移法的分析图式

2. p-y 曲线法

现场原形观测和室内试验表明，水平荷载作用下土的水平位移与其荷载呈非线性关系，也称此为 p-y 曲线。对于软粘土、硬粘土以及砂土，都已分别建立了标准的 p-y 曲线（见文献[9]）。这里仅就软粘土的 p-y 曲线作一介绍。

Matlock 和 Ingram (1970) 通过在湖泊和海洋软粘土中所做两根足尺桩的静载试验，提出如图 11.43 所示的 p-y 曲线，并已被美国石油协会准则(API-RP 2A)所采纳。

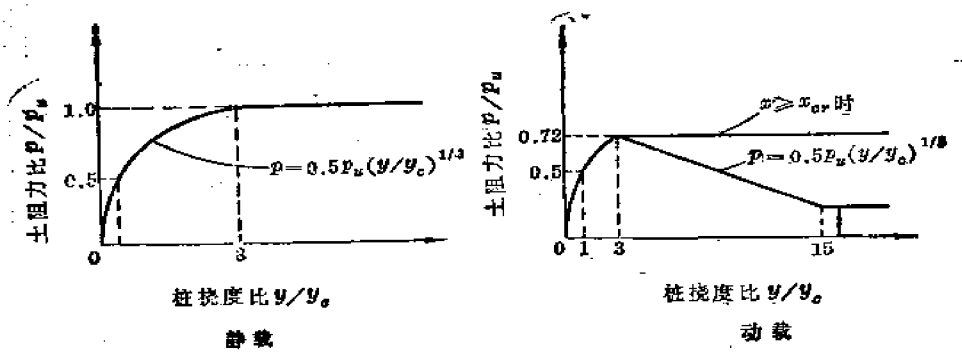


图 11.43　软粘土的 p-y 曲线

土的极限阻力 p_u 为：

$$p_u = N_P\cdot c_u\cdot d \tag{11.75}$$

$$N_P = 3+\frac{\gamma' z}{c_u}+J\,\frac{z}{d}\quad (z\leqslant z_r\ \text{且}\ N_P\not>9)$$

式中 γ'——浸水容重；

c_u——土的不排水抗剪强度；

d——桩的直径；

J——经验系数，$J=0.5$（软粘土）。

而

而
$$z_r=\frac{6d}{\frac{\gamma' d}{c_u}+J}$$

$$p=0.5p_u\left(\frac{y}{y_c}\right)^{0.33} \tag{11.76a}$$

$$y_c=2.5\varepsilon_{50}\cdot d \tag{11.76b}$$

式中 p——土的侧向阻力(单位：力/长度)；

ε_{50}——在三轴不排水剪切试验中，在最大偏差应力一半时所对应的轴向应变。

对于循环荷载，土的极限阻力取$0.72p_u$计。

近年来，有些学者根据足尺桩试验实测到的数据反算地基土的 p-y 曲线[15]；也有的把软粘土与硬粘土的 p-y 曲线合并成一条能考虑桩刚度效应的新的 p-y 曲线[16]。一旦 p-y 曲线确定后，则用割线刚度迭代法解式(11.74)$\left(\text{此刻，地基系数 } C_s=\frac{p}{y\cdot d}\right)$，具体方法与式(11.6)类同。

3．弹性理论法

图11.42表示一根插在弹性介质中的桩。它被看作是宽为 d、长为 L 的一根矩形竖直狭条，E_pI 表示桩的抗弯刚度。在半无限弹性体内部，由一个水平集中力 P 所引起的水平位移 u 已被 Mindlin 所解得；于是，j 点处矩形面积(图 11.44)上均布水平荷载在桩与土接触面上点 i 处所引起的水平位移 $s_{ij}=s(0,y,z)$ 可通过积分求得：

$$\begin{aligned}s_{ij}=s(0,y,z)=\iint u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{P}{16\pi G(1-\nu)}\Bigg[\Bigg[(3-4\nu)\cdot\Big\{(z-c)\lg\Big[(y-m)\\+\sqrt{(y-m)^2+(z-c)^2}\Big]+(y-m)\lg\Big[(z-c)+\sqrt{(y-m)^2+(z-c)^2}\Big]\Big\}\\+(z-c)\lg\Big[(y-m)+\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}\Big]\\-(y-m)\lg\Big[(z+c)+\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}\Big]-\frac{2z^2\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}}{(y-m)(z+c)}\\-4(1-\nu)(1-2\nu)\Big\{(z+c)\lg\Big[(y-m)+\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}\Big]\\+\frac{(y-m)}{2}\lg\Big[(z+c)+\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}\Big]\\-\frac{(z+c)}{2(y-m)}\sqrt{(y-m)^2+(z+c)^2}+\frac{(z+c)^2}{2(y-m)}\Big\}\Bigg]_{c=a_2}^{c=a_1}\Bigg]_{m=-\frac{b}{2}}^{m=+\frac{b}{2}}=I_{ij}P\end{aligned} \tag{11.77}$$

对于$(n+1)$的点，可写出类似于上式的$(n+1)$个方程式，即：

$$\{S_x\}=[I_s]\{R\} \tag{11.78}$$

根据变形协调条件，即式(11.74)中的$\{u\}=\{S_x\}$，于是上式代入后便得到：

$$([I]+[K_P][I_s])\{R\}=\{P\} \tag{11.79}$$

式中 $[I]$——单位矩阵。

求解上式，得桩与土接触面上的压力$\{R\}$，再利用式(11.77)求出桩身各点位移$\{S_x\}$。

Poulos 曾经指出，用弹性理论法求解侧向受荷桩课题时，会出现桩侧表面与土分离(即土承受拉应力)或者在土面上的压应力远超过土的屈服应力等不合理情况。对于式(11.79)类型的方程(以接触压力为未知数)，要处理计算中的这类问题，较为方便。在第一轮计算

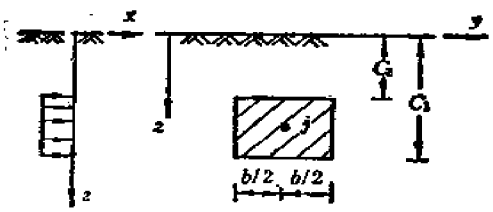


图 11.44　水平荷载作用下，弹性体内的水平位移计算

后，先判别一下是否出现上述情况；有的话，需要在该结点的相应行作如下修改：

$$R/(U\cdot\Delta l)=\sigma_a \quad \text{（当计算的应力高于容许应力 } \sigma_a \text{ 时）}$$

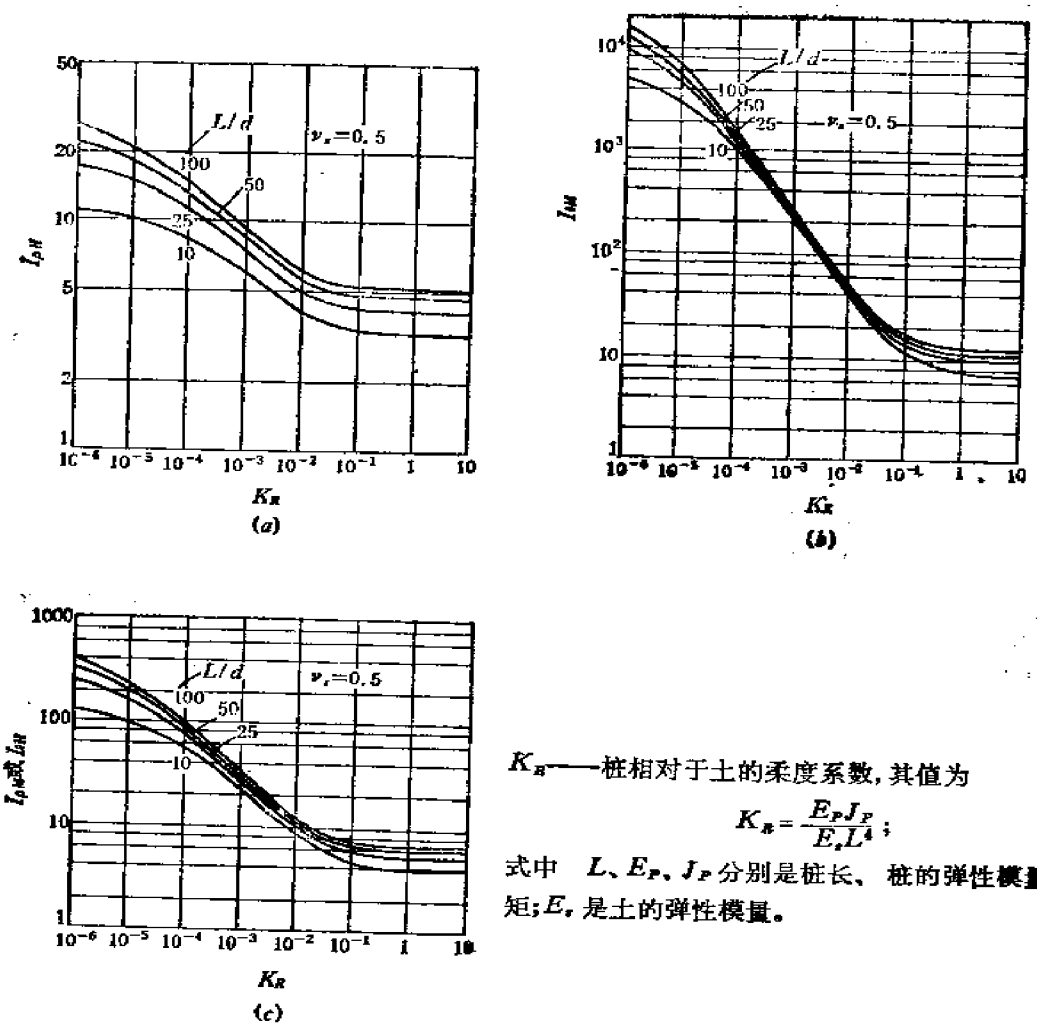
或

$$R/(U\cdot\Delta l)=0 \quad \text{（当计算的应力小于零时）}$$

式中　U——桩截面的周长；

Δl——桩段长度。

然后再作下一轮计算，如此进行直到满足条件为止。



K_R——桩相对于土的柔度系数，其值为

$$K_R=\frac{E_P J_P}{E_s L^4};$$

式中　L、E_P、J_P 分别是桩长、桩的弹性模量和惯性矩；E_s 是土的弹性模量。

图 11.45　系数 $I_{\rho H}$、$I_{\rho M}$、$I_{\theta H}$ 和 $I_{\theta M}$ 值(桩顶为自由端情况)

如果计算结果只要给出地面桩顶处的位移和转角(桩顶为自由端)，则可按下式计算：

$$S_{xt}=I_{\rho H}\left(\frac{H}{E_sL}\right)+I_{\rho M}\left(\frac{M}{E_sL^2}\right) \tag{11.80}$$

$$\theta_t=I_{\theta H}\left(\frac{H}{E_sL^2}\right)+I_{\theta M}\left(\frac{M}{E_sL^3}\right) \tag{11.81}$$

式中 H、M——作用在桩顶处的水平荷载和弯矩(桩长 L)；

$I_{\rho H}$、$I_{\rho M}$——水平荷载和弯矩分别在桩顶处所引起的水平位移（土的弹性模量 E_s=常数)；见图 11.45a、c。

$I_{\theta H}$、$I_{\theta M}$——水平荷载和弯矩分别在桩顶处所引起的转角（E_s为常数时，$I_{\theta H}=I_{\rho M}$)，见图 11.45b、c。

11.3.2 侧向荷载下群桩受力分析

分析方法与竖向荷载下群桩分析法相类似。先要了解基础板的刚度以及群桩桩顶处力和位移的关系(即群桩桩顶处刚度矩阵)；然后利用桩顶处的变形协调条件，便可求得未知的位移和力。

为了说明方便起见，取四根桩 ($n=4$) 的刚性承台的群桩基础进行讨论。结构的坐标系以及位移的正方向规定在图 11.46 中。在承台底面处切开桩与承台板的联系，而以未知力 $[H_{x1}\ H_{y1}\ N_{z1}\ M_{x1}\ M_{y1}\ H_{x2}\ H_{y2}\cdots]^T$ 来替代。每根桩有五个未知数，所以有 20 个未知数。另外，承台板受力后有五个位移值，即线位移 u_B、v_B、w_B 和角位移 α_x、α_y。因此，在桩顶处共有 25 个未知数。

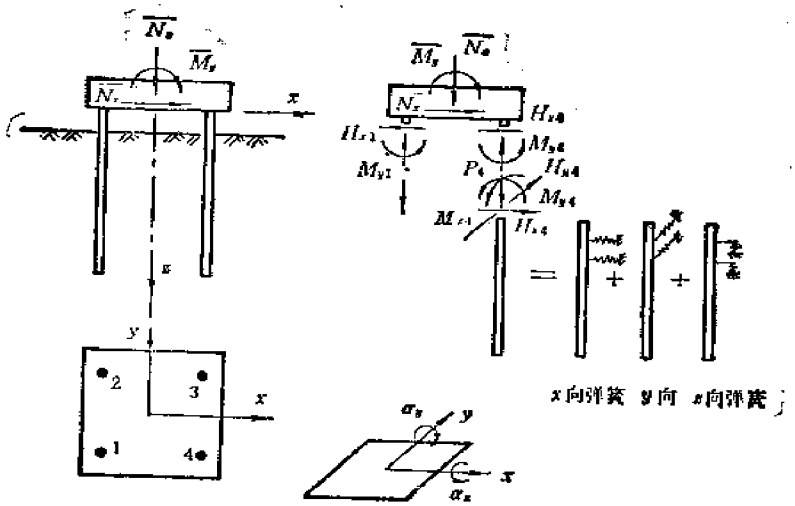


图 11.46 群桩分析的图式

取刚性承台板为脱离体，列出静力平衡方程为：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X=0,\quad &-\left(\sum_{i=1}^{4}H_{xi}\right)+\bar{N}_x=0\\ \Sigma Y=0,\quad &-\left(\sum_{i=1}^{4}H_{yi}\right)+\bar{N}_y=0\\ \Sigma Z=0,\quad &-\left(\sum_{i=1}^{4}P_i\right)+\bar{N}_z=0\end{aligned}\right\} \tag{11.82}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum M_x=0,\quad -\left(\sum_{i=1}^{4}P_iy_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{4}M_{xi}\right)+\overline{M}_x=0\\ \sum M_y=0,\quad -\left(\sum_{i=1}^{4}P_ix_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{4}M_{yi}\right)+\overline{M}_y=0\end{aligned}\right\}$$

式中 x_i、y_i——第 i 根桩桩顶分别离 y、x 轴的距离。

由于刚性基础板有 5 个未知位移，对每一根桩可写出 5 个变形协调方程，若是第 i 根桩，则有：

$$\left.\begin{aligned}&\text{垂直位移 } w_i=w_B+\alpha_x\cdot y_i+\alpha_y\cdot x_i;\\ &\text{水平位移 } u_i=u_B,\ v_i=v_B;\\ &\text{角位移}\quad \theta_{xi}=\alpha_x,\ \theta_{yi}=\alpha_y\end{aligned}\right\}\tag{11.83}$$

此时，未知数与方程组个数相同。若每根桩身分成 m 个结点，则四根桩又有 $m\times4\times5$ 个方程，连同基础承台板一起列出方程组后，就可求得桩顶(包括桩身)的内力。由于在桩身各结点的竖直和水平方向上土具有非线性的应力与应变关系，所以计算中要采用迭代法求解。如果每一轮计算结束后，再采用弹性理论方法，计算各桩之间的相互影响所引起的变形量，并与原变形叠加一起作为下一轮计算前确定土的刚度之用，这种做法就是 Focht(1973) 的求解思路。

文献[17]指出，由于群桩中桩与桩之间的相互影响，产生土中应力重叠现象，致使水平承载力降低，文献中提出了可供选择的承载力修正公式。

11.4 打桩动力分析——波动方程法

11.4.1 一维波动方程的建立

S. Venant 在 1865 年研究了自由支承的弹性杆件的一端受到撞击后，应力波在杆件内的传播规律，并提出一维波动方程。1931 年 D. V. Isaac 用它来分析打桩时锤-桩-土系统的受力状况，并在古典的波动方程中引进反映桩周土阻力的参数项 R'，即：

$$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\pm R'\tag{11.84}$$

式中 w——桩内某截面沿 z 轴向的位移；

c——应力波在桩内的传播速度；

t——时间；

R'——反映桩周土阻力的参数项。

由于实际打桩条件多变复杂，因此对上式直接积分求解是很困难的，难以推广使用。直到五十年代 Smith 提出把锤-桩-土系统理想化为分离的单元模型，把一次锤击过程分割为许多时间间隔，分析在每一个时间间隔内各单元体的运动过程，运用迭代逐步逼近方法，求得打桩中所需要的计算结果。Smith 还对打桩时锤-桩-土系统的模拟形式和计算参数作了分析和建议，从而使波动方程能用来分析实际打桩问题。

如图 11.47 所示的桩中取出一微分桩段 $\mathrm{d}z$，在打桩瞬间作用在该桩段上的力有轴力 F 和 $F-\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z$、桩周阻力 R 以及波动过程中桩重产生的惯性力 $\frac{W}{g}\cdot a$。

由微分桩段竖向力之和为零的条件，可得：

$$F-\left(F-\frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\pm R-\frac{W}{g}a=0 \tag{11.85}$$

式中 w——微分桩段的重量；

a——微分桩段的加速度；

g——重力加速度。

由于 $\frac{\partial F}{\partial z}=AE\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$、$a=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$；代入式(11.85)后，得：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{AE}{W/g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\cdot\mathrm{d}z\pm\frac{g}{W}R \tag{11.86}$$

设杆件的密度为 ρ，即 $\rho=\frac{W}{g\cdot A\mathrm{d}z}$，代入式(11.86)后，即得到考虑土阻力时的一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\pm\frac{g}{W}R \quad 或 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\pm R' \tag{11.84}$$

式中 R——桩侧阻力；

c——弹性应力波在杆内的传播速度，$c=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$；

E——杆的弹性模量。

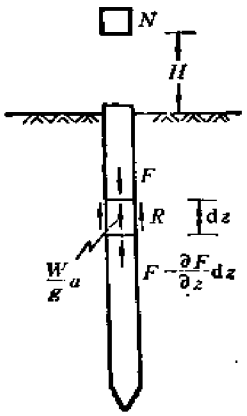


图 11.47 一维波动方程的建立

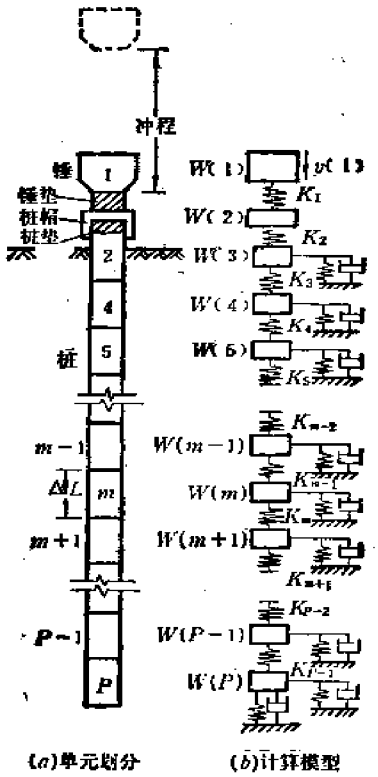


图 11.48 Smith 法计算模型

11.4.2 波动方程的分离单元解

由于直接求解微分方程式(11.84)的困难性，Smith 提出用分离单元法求解，其基本思想是，把整个锤-桩-土系统理想化为许多分离单元，如图 11.48 所示。桩锤、垫层、桩帽以及

桩身的刚度均用无质量的弹簧来模拟，各部分的重量则由刚性的单元来表示。桩周土的弹、塑、粘性的静、动阻力也分别用弹簧、摩擦键和缓冲壶的组合模型表示。因此，桩锤对桩的一次锤击过程，可以转化为各分离单元的运动问题来分析。

计算时仅对一次锤击过程进行分析，锤击产生的弹性应力波在桩中的传播受到桩周土阻尼作用而作变速运动。在分析时，把一次锤击的时间分成许多极短的时间间隔(一般采用1/3000~1/4000秒)，在每一个时间段 Δt 内，弹性应力波仅在一个单元内运动，还来不及传播到下一个单元，因此，在这个时间段内，应力波在一个单元内可近似地看成是等速运动，而在下一个时间段，速度再发生变化。因此，从总体上看，弹性应力波是以变速运动在桩内传播，但就某一时间段以及某一单元体而言，作匀速运动来处理，可使求解得以简化。

锤击应力波的传播可用图11.49加以描述。当锤击开始时，$k=0(t=k\cdot\Delta t)$，锤以初速 $v_{1,0}$ (脚标前一个数字表示单元号，后一数字表示第 k 个时间段)与锤垫接触。

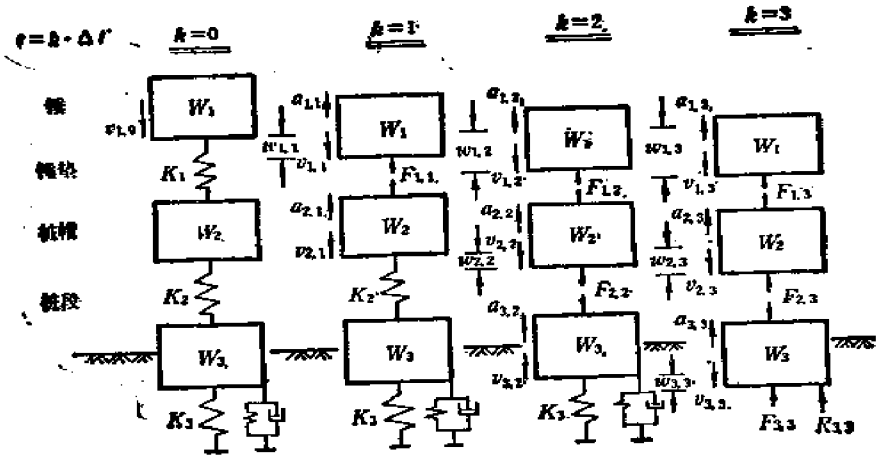


图 11.49 应力波传播的过程

当 $k=1$ 时，应力波只影响第一个单元，锤 w_1 以匀速度 $v_{1,0}$ 向下运动，产生位移 $w_{1,1}$ 为：

$$w_{1,1}=v_{1,0}\cdot\Delta t$$

锤垫弹簧 K_1 产生的压缩量 $\Delta w_{1,1}=w_{1,1}-w_{2,1}$(此刻 $w_{2,1}=0$)；弹簧 K_1 产生的锤垫力 $F_{1,1}=K_1\cdot\Delta w_{1,1}$。力分别作用在单元 w_1 和 w_2 上，使它们分别产生加速度为：

$$a_{1,1}=-F_{1,1}\cdot g/W_1;\qquad a_{2,1}=F_{1,1}\cdot g/W_2$$

在这一时间间隔末，单元 w_1、w_2 的速度将变化为：

$$v_{1,1}=v_{1,0}+a_{1,1}\cdot\Delta t;\quad v_{2,1}=a_{2,1}\cdot\Delta t$$

此时，第一时间间隔($k=1$)各单元的运动到此结束。

同理，可分别求得 $k=2$、$k=3$ 时间间隔各单元的位移、压缩量、弹簧力和作用在单元上的合力、加速度以及速度。计算结果如表11.6所示。在桩段 W_3 处，侧面有土阻力 R_3，则其值可根据位移 $w_{3,3}$ 计算(见后面公式11.93)。

依次计算以后各时间段 $k=4$，5，… 时各单元的运动情况，于是应力波逐渐向桩尖传播。如此循环重复进行计算，直到出现下列情况为止：

1. 桩尖贯入度(即桩尖单元的位移)已达到最大值，不再增加；
2. 各单元体的速度 $v_{m,k}$ 均已等于零(或负值)；

表 11.6 不同时间段的计算结果

k 时间段	单元位移	弹簧压缩量	弹簧作用力
k=2	$w_{1,2}=w_{1,1}+v_{1,1}\cdot\Delta t$ $w_{2,2}=v_{2,1}\cdot\Delta t$	$\Delta w_{1,2}=w_{1,2}-w_{2,2}$ $\Delta w_{2,2}=w_{2,2}$	$F_{1,2}=k_1\cdot\Delta w_{1,2}$ $F_{2,2}=k_2\cdot\Delta w_{2,2}$
k=3	$w_{1,3}=w_{1,2}+v_{1,2}\cdot\Delta t$ $w_{2,3}=w_{2,2}+v_{2,2}\cdot\Delta t$ $w_{3,3}=w_{3,2}+v_{3,2}\cdot\Delta t$	$\Delta w_{1,3}=w_{1,3}-w_{2,3}$ $\Delta w_{2,3}=w_{2,3}-w_{3,3}$ $\Delta w_{3,3}=w_{3,3}$	$F_{1,3}=k_1\cdot\Delta w_{1,3}$ $F_{2,3}=k_2\cdot\Delta w_{2,3}$ $F_{3,3}=k_3\cdot\Delta w_{3,3}$

k 时间段	单元的合力	单元加速度	k 时段末，单元速度
k=2	$z_{1,2}=-F_{1,2}$ $z_{2,2}=F_{1,2}-F_{2,2}$ $z_{3,2}=F_{2,2}$	$a_{1,2}=z_{1,2}\cdot g/W_1$ $a_{2,2}=z_{2,2}\cdot g/W_2$ $a_{3,2}=z_{3,2}\cdot g/W_3$	$v_{1,2}=v_{1,1}+a_{1,2}\cdot\Delta t$ $v_{2,2}=v_{2,1}+a_{2,2}\cdot\Delta t$ $v_{3,2}=a_{3,2}\cdot\Delta t$
k=3	$z_{1,3}=-F_{1,3}$ $z_{2,3}=F_{1,3}-F_{2,3}$ $z_{3,3}=F_{2,3}-F_{3,3}-R_3$ $z_{4,3}=F_{3,3}$	$a_{1,3}=z_{1,3}\cdot g/W_1$ $a_{2,3}=z_{2,3}\cdot g/W_2$ $a_{3,3}=z_{3,3}\cdot g/W_3$ $a_{4,3}=z_{4,3}\cdot g/W_4$	$v_{1,3}=v_{1,2}+a_{1,3}\cdot\Delta t$ $v_{2,3}=v_{2,2}+a_{2,3}\cdot\Delta t$ $v_{3,3}=v_{3,2}+a_{3,3}\cdot\Delta t$ $v_{4,3}=a_{4,3}\cdot\Delta t$

3．重复迭代计算次数已达到规定次数。

通过上述计算，可以了解到一次锤击过程中，桩产生的贯入度大小，桩身各断面上的作用力，并由此求得桩身各断面上的打桩应力大小、桩周边上的土阻力（它们之和即为桩的承载力）等。

波动方程分离单元解的基本公式

通过上述锤击应力波的传播过程，不难建立用分离单元解的基本公式。现讨论图 11.50 中某一时段 k、桩身上任一单元 m 的运动情况，其基本方程式为：

单元体 m 的位移　$w_{m,k}=w_{m,k-1}+v_{m,k-1}\cdot\Delta t$

弹簧 m 压缩量　$\Delta w_{m,k}=w_{m,k}-w_{m+1,k}$

弹簧作用力　$F_{m,k}=K_m\cdot\Delta w_{m,k}$

单元 m 上的合力　$Z_{m,k}=F_{m-1,k}-F_{m,k}-R_{m,k}$

单元 m 的加速度　$a_{m,k}=Z_{m,k}\cdot g/W_m$

单元 m 的速度　$v_{m,k}=v_{m,k-1}+a_{m,k}\cdot\Delta t$

(11.87)

式中 K_m——桩的弹簧系数，等于 $AE/\Delta l$；

W_m——桩段 m 的重量；

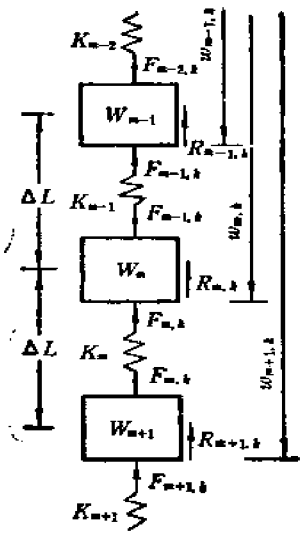


图 11.50 某一时间段 k，桩身上任一单元 m 的运动情况

$R_{m,k}$——桩段m处的土阻力，按式(11.93)计算。

式(11.84)可写成差分形式：

$$\frac{w_{m,k-1}-2w_{m,k}+w_{m,k+1}}{\Delta t^2}=\frac{E}{\rho}\left[\frac{w_{m-1,k}-2w_{m,k}+w_{m+1,k}}{\Delta L^2}\right]-\frac{g}{W_m}R_{m,k} \tag{11.88}$$

根据$\rho=W_m/(gA\Delta L)$和$K_m=AE/\Delta L$的条件，则上式可写成：

$$w_{m,k+1}=2w_{m,k}-w_{m,k-1}+\frac{g\cdot\Delta t^2}{W_m}\{K_{m-1}\cdot[w_{m-1,k}-w_{m,k}]-K_m\cdot[w_{m,k}-w_{m+1,k}]-R_{m,k}\} \tag{11.89}$$

上式是计算桩身各点位移的公式，而式(11.87)是波动方程分离单元解的基本方程式。计算工作从输入已知的桩锤速度$v_{1,0}$开始，其它各单元的位移、轴力、速度都为零。对各单元及连续的时间间隔进行反复计算，直到满足上述三个条件之一为止。

11.4.3 计算参数的确定

用波动方程分析时，除了桩、锤的几何尺寸和重量要已知外，还需给出其它计算参数。现将其中主要参数的确定，叙述如下：

桩锤的锤击速度$v_{1,0}$

根据桩锤下落时的功能原理可得：

$$v=\sqrt{2gH\eta} \tag{11.90}$$

式中 H——锤的落距；　　g——重力加速度；

v——锤的速度；　　η——桩锤效率系数。

v和η值可在锤击时，用高速摄影手段实测锤的落距、下落时间计算求得。在渤海石油平台钢管桩工程中，曾实测到MB-70柴油锤的效率系数$\eta=0.92\sim1.0$，落距$H=2.05\sim2.92$m，锤击速度$v=6.3\sim7.5$ m/s。在无实测条件时，可按Bowles(1974)提出的η值表(表11.7)取用

表11.7 桩锤效率系数η

锤的类型	桩锤效率系数η
单动蒸汽(或空气)锤	0.75～0.85
双动蒸汽(或空气)锤	0.70～0.80
柴油锤	0.85～1.00

桩的分段长度ΔL和计算的时间间隔Δt

桩的分段长度ΔL与时间间隔Δt之间有着密切关系，这是因为在Smith的分离单元法计算中，认为在时间间隔Δt内弹性应力波正好由上一个单元传播到下一个单元，也就是计算过程必须走在应力波的前面。所以，桩的分段长度ΔL愈小，Δt也必须愈小。已知应力波在弹性体中的传播速度$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$，则在桩分段长度ΔL时的临界时间间隔t_m为：

$$t_m=\frac{\Delta L}{c} \tag{11.91}$$

Smith建议选用$\Delta t=0.5t_m$；我国宝山钢铁厂工程经验表明，取$\Delta t=0.6t_m$较好。文献[4]建议Δt取1/3000～1/4000s。此外，Smith还认为桩的分段长度应选得比弹性应力波的波长

要小得多，才能得到比较满意的计算精度。一般锤击应力波的波长很长，故桩单元长度 ΔL 取 1.5～3.0 m 可满足精度要求，但桩段数不宜小于 5。

桩身弹簧系数 K_m

桩身的刚度用弹簧予以模拟，根据弹簧系数定义，可写出其表达式为：

$$K_m = \frac{AE}{\Delta L} \tag{11.92}$$

桩侧阻力 R_m 和桩尖阻力 R_P 的确定

Smith 对桩侧、桩尖土的弹、塑、粘性的静、动阻力分别用弹簧、摩擦键以及缓冲壶的组合模型(见图 11.51) 表示。于是，桩侧单元 m 在 k 时间间隔的桩侧阻力 $R_{m,k}$ 为：

$$R_{m,k} = K'_m(w_{m,k} - w^p_{m,k})(1 + J_m \cdot v_{m,k-1}) \tag{11.93a}$$

式中 K'_m、J_m——分别指单元 m 处模拟桩侧土阻力的弹簧系数和阻尼系数；

$w^p_{m,k}$——单元 m 侧面土的塑性残余变形。

由图 11.51 可见，$(w_{m,k} - w^p_{m,k})$ 表示土剪切时的相对弹性位移，其值不大于土的最大弹性位移 s^e_m，即

$$(w_{m,k} - w^p_{m,k}) \leqslant s^e_m$$

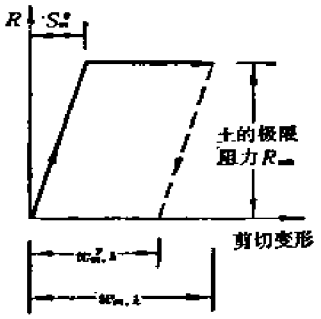


图 11.51 土的极限阻力与剪切变形的关系

同理，也可写出桩尖单元 P 处的桩尖阻力 $R_{P,k}$ 为：

$$R_{P,k} = K'_P(w_{P,k} - w^p_{P,k})(1 + J_P \cdot v_{P,k-1}) \tag{11.93b}$$

式中 K'_P、J_P——分别为桩尖单元 P 处模拟桩尖土阻力的弹簧系数和阻尼系数；其它符号同前。

Smith 认为土的最大弹性变形 s^e_m 随不同类型土而异，难以确定。在目前打桩工艺条件下，可采用 $s^e_m = 0.25$ cm。J_P 可选用 0.48 s/m。而 J_m 值，Smith 建议取 $J_m = \frac{1}{3} J_P$。由图 11.51 可见，弹簧系数 $K'_m = R_{um}/s^e_m$；其中土的极限静阻力 R_{um}，当桩侧阻力是均匀分布时，可按下式求得：

$$R_{u,m} = \frac{R_{uT}(1-p)}{n} \tag{11.94}$$

式中 R_{uT}——桩总的静阻力(包括桩侧和桩尖阻力)；

p——桩尖承担阻力的百分率(假定)；

n——桩的分段个数。

桩垫弹簧系数 K_m

桩垫的作用是防止打桩中产生过大的锤击应力而使桩被击坏。在分离单元法中，桩垫刚度用弹簧系数 K_m 来模拟。K_m 可通过桩垫的静力压载试验，根据测得的割线弹性模量 E 和恢复系数 e，可推算出桩垫的弹簧系数。

11.4.4 波动方程打桩分析的计算步骤

假定桩周土的总阻力 R_{uT} 值、桩底阻力分配百分率 p(%) 以及桩侧阻力的分布规律；计算分配到各桩段单元上土的极限阻力 R_{um} (若桩侧阻力是均匀分布时，按式 (11.93) 计算)，并求出土的弹簧系数 $K'_m = R_{um}/s^e_m$ 值；

按式(11.90)计算锤的初速度 $v_{1,0}$；

循环计算各时间间隔 $k=1, 2, 3, \cdots$ 时，按式(11.87)计算各单元体的位移、弹簧的压缩量弹簧作用力、合力、加速度和速度，直到满足规定条件为止；

取求得的桩尖单元的位移（即每一锤击下的贯入度）s 的倒数 $1/s$ 表示贯入阻力（每单位贯入量所需的击数）；

再假定另一个桩周土的总阻力 R_{ur} 值，重复计算，可求得相对应的贯入阻力 $1/s$；

多次重复上述计算步骤，得到土的总阻力 R_ur（表示打桩时桩的承载力）与贯入阻力 $1/s$ 的关系曲线，即桩的反应曲线，如图 11.52a 所示。同时，也可获得桩身应力分布以及桩内应力随时间的传播过程，见图 11.52b、c。

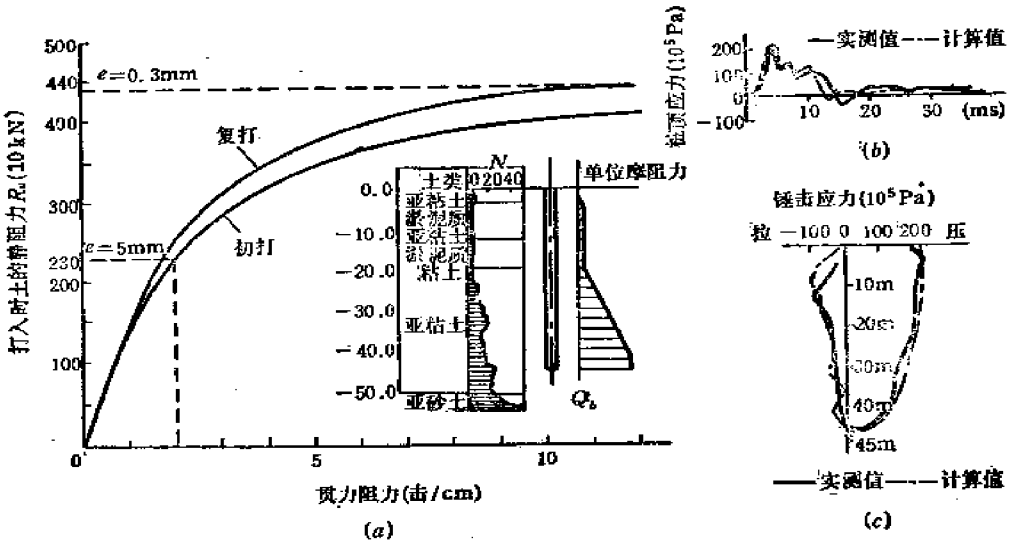


图 11.52　某工程试桩的波动方程分析结果

计算参数：K—35 柴油锤，锤心重 3500 kg，铁砧重 1050 kg，锤心刚度 3.366×10^6 kg/cm，跳起高度 $H=171$ cm，喷气口至铁砧距离 $h=40$ cm，锤垫弹簧常数 1.246×10^6 kg/cm，恢复系数 0.6，桩帽重 1200 kg；桩垫弹簧常数 8.66×10^5 kg/cm，恢复系数 0.5；钢筋混凝土桩 45×45×4500 cm，$E=3.5\times10^5$kg/cm²，共分 18 段，$\Delta l=2.5$ m，每米桩重 587 kg；土阻尼系数：桩侧 $J_s=0.0033$ sec/cm，桩底 $J_p=0.0049$ s/cm；土最大弹性变形 $Q=0.254$ cm，桩端阻力百分比 20%，摩阻力分布示于图中。

波动方程在指导桩基工程的设计和施工方面有着广阔的发展前途，它能够预估桩锤的打桩能力、确定打桩应力和预测桩的长期荷载下的承载力等。但正如文献[4]指出，它未能估计到近海打桩过程中，能量会遭到很大损失，也不能提供桩的沉降量以及反映群桩与单桩之间的不同特性。目前主要是结合国内的施工条件、桩的类型和土质条件，制定切合实际情况的计算参数，使波动方程的应用更加发展。

附录　桩沉降分析时 Mindlin 方程的积分

一个典型的圆柱形桩单元的几何尺寸，如图11.53所示。在进行桩基沉降计算时，往往需要知道桩侧单元 j 处的单位面积摩阻力或桩底单元 b 处单位面积压力对弹性土体内部任意点 i 所产生的竖向变形 I'_{ij} 和 I'_{ib}（即竖向变形系数）。

一、桩侧单元 j 处单位摩阻力对任意点 i 所产生的变形量 I'_{ij}

在图11.53单元 j 的侧面上取一微分面积 $\mathrm{d}F=\mathrm{d}c\cdot\mathrm{d}s=\mathrm{d}c\cdot\dfrac{d}{2}\cdot\mathrm{d}\theta$，作用在该面积上的集中力为 $\mathrm{d}P=1\times\mathrm{d}F$。

根据 Mindlin 求竖向位移的解答，可写出 dP 力对 i 点所产生的位移 dw 为：

$$dw=\frac{dP}{E}\cdot\frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)}\left\{\frac{z_1^2}{R_1^3}+\frac{(3-4\nu)}{R_1}+\frac{(5-12\nu+8\nu^2)}{R_2}+\frac{[(3-\nu)z^2-2cz+2c^2]}{R_2^3}+\frac{[6cz^2(z-c)]}{R_2^5}\right\}=\frac{1}{E}\,p^I\cdot dP \tag{11.95}$$

式中

$$z=h+c,\ z_1=h-c,\ r^2=\frac{d^2}{4}+x^2-xd\cos\theta;\ R_2^2=r^2+z^2,\ R_1^2=r^2+z_1^2。$$

于是，单元 j 侧面单位摩阻力对点 i 所产生的竖向变形量 I'_{ij} 为：

$$I'_{ij}=2\int_0^{\pi}\int_{(j-1)\delta}^{j\delta}\frac{1}{E}\,p^I\cdot\frac{d}{2}\cdot dc\cdot d\theta=\frac{d}{E}\int_0^{\pi}\int_{(j-1)\delta}^{j\delta}p^I dc\cdot d\theta=\frac{d}{E}\,I_{ij} \tag{11.96}$$

式中对变量 c 积分后的结果为：

$$\int p^I\cdot dc=\frac{1+\nu}{8\pi(1-\nu)}\left\{\frac{z_1}{D_1}-4(1-\nu)\ln(z_1+D_1)+8(1-2\nu+\nu^2)\ln(z+D)+\frac{\left[\frac{2h^2z}{r^2}-4h-(3-4\nu)z\right]}{D}+\frac{2\left(hr^2-\frac{h^2z^3}{r^2}\right)}{D^3}\right\} \tag{11.97}$$

式中 $D_1=(r^2+z_1^2)^{1/2}$，$D=(r^2+z^2)^{1/2}$，而积分界限是：

对于 z_1：从 $h-(j-1)\delta$ 到 $h-j\delta$；

对于 z_2：从 $h+(j+1)\delta$ 到 $h+j\delta$。

对于变量 θ 的积分，可用数值方法求得，通常用 $\pi/50$ 的间隔进行计算，结果已够精确。

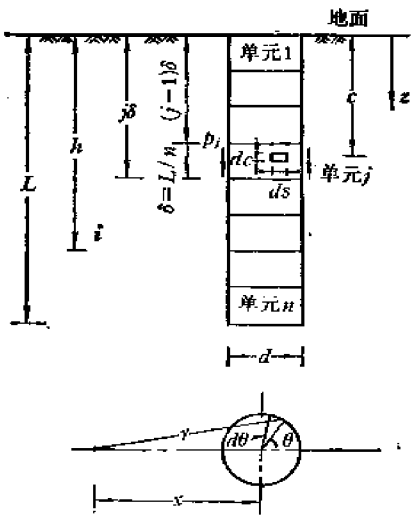


图 11.53 桩侧表面的积分图形

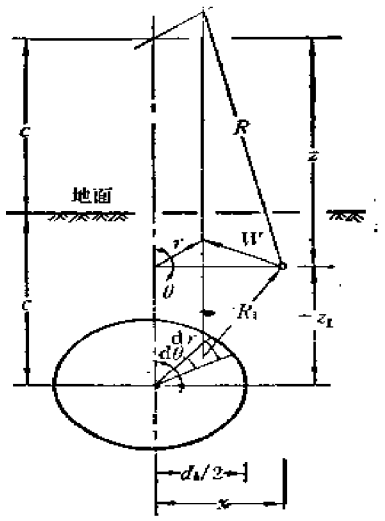


图 11.54 桩底圆形面积的积分图形

如果 i 点位置正好在桩底中央，并把桩侧 j 单元对点 i（即为点 b）所引起的变形量记作 I'_{bj}，则由式 11.96 可写出：

$$I'_{bj}=\frac{d}{E}\int_{(j-1)\delta}^{j\delta}p^I dc\int_0^{\pi}d\theta=\frac{d}{E}\,\pi\int_{(j-1)\delta}^{j\delta}p^I dc=\frac{d}{E}\,I_{bj}。 \tag{11.98}$$

式中 I_{bj} 即为式(11.97)与 π 的乘积。

二、桩底单元 b 处单位压应力对任意点 i 所产生的变形量 I'_{ib}

考虑桩底直径扩大的情况，即桩底直径为 d_b。图11.54所示的桩底单元 b 上单位压应力对 i 点所产生的竖向变形为：

$$I'_{ib}=\frac{1}{E}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_b} p'\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{d_b}{E}\cdot\frac{1}{d_b}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_b} p'\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{d_b}{E}I_{ib} \tag{11.99}$$

对变量 r 积分后的结果为：

$$\begin{aligned}\int p'\cdot r\mathrm{d}r=\frac{(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)}\Bigg\{&\frac{z_1^2(rA-R_0^2)}{(R_0^2-A^2)\sqrt{x_0}}+(3-4\nu)\left[\sqrt{x_0}+A\ln(2\sqrt{x_0}+2r-2A)\right]\\&+(5-12\nu+8\nu^2)\left[\sqrt{x_1}+A\ln(2\sqrt{x_1}+2r-2A)\right]\\&+\left[(3-4\nu)z^2-2cz+2c^2\right]\cdot\frac{(Ar-B)}{(B-A^2)\sqrt{x_1}}+6cz^2(z-c)\\&\cdot\left\{\frac{-1}{3\sqrt{x_1^3}}+A\left[\frac{r-A}{3(B-A^2)\sqrt{x_1}}\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{2}{B-A^2}\right)\right]\right\}\Bigg\}\end{aligned} \tag{11.100}$$

式中 $R_0^2=z_1^2+x^2$，$A=x\cos\theta$，$x_0=r^2-2Ar+R_0^2$，$x_1=r^2-2Ar+B$，

$$B=R_0^2+4c^2+4cz_1,\quad z=z_1+2c$$

图11.54中，$c=n\delta=L$，$R_2^2=z^2+w^2=z^2+x^2+r^2-2rx\cos\theta$，$R_1^2=z_1^2+x^2+r^2-2rx\cos\theta$。对于变量 θ 的积分，仍用数值方法求得，间隔为 $\pi/50$；较好途径是，计算每一区段中点坐标，然后在积分中应用矩形法则来解决双重积分问题。

如果要计算桩底压力对本身所产生的竖向变形，即计算 I'_{bb} 时，为了考虑桩底的刚性效应，通常把承受均布荷载的圆形面积中心处的位移值乘以 $\frac{\pi}{4}$，因为这一系数是半空间表面上刚性圆的表面位移同相应的均布受荷圆中心位移之比值。把这个系数近似地应用到深埋基础的情况中，于是按式(11.99)，可写出

$$I'_{bb}=\frac{d_b}{E}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{d_b}\,2\pi\cdot\int_0^{r_b} p'\cdot r\mathrm{d}r=\frac{d_b}{E}I_{bb} \tag{11.101}$$

p' 由式(11.95)给出，而此刻 $R_2=4c^2+r^2$，$R_1=r$，$z_1=0$。

式(11.101)的积分可容易求出：

$$\begin{aligned}I_{bb}=\frac{\pi(1+\nu)}{16(1-\nu)d_b}\Bigg[&(3-4\nu)\frac{d_b}{2}+(5-12\nu+8\nu^2)(R-z)\\&+\frac{(5-8\nu)}{2}z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{R}\right)+\frac{z}{2}-\frac{z^4}{2R^3}\Bigg]\end{aligned} \tag{11.102}$$

式中

$$R=\left(z^2+\frac{d_b^2}{4}\right)^{1/2},\quad z=z_1+2c=2L。$$

参 考 文 献

1. Poulos, H. G. and Davis, E. H., Pile Foundation Analysis and Design, John Wiley and Sons, New York, 1980.
2. Matlock, H., Correlations for Design of Laterally Loaded Piles in Soft clays, 2nd Annual Offshore Technology Conference, Paper No.1204, May,1970,Vol.1,pp.577-588.
3. Reese, L. C., Cox, W. R., and Koop, F. D., Field Testing and Analysis of Laterally Loaded Piles in Stiff clay,Proceeding 7th O. T. C., May,1975, Vol.2,pp.671—690.
4. George,P., Offshore Soil Mechanics, Cambridge University Engineering Department, 1976.September.

5. 陈竹昌，曹名葆，张敏，Determination of the Load-Displacement Characteristics of Single Pile in Soft Soil, Proceeding of the International Conference on deep foundetion, Beijing, Vol. 1, 1986.
6. Nogami, T. and Chen, H. L., Simplified Approach for Axial Pile Group Response Analysis, A. S. C. E, Vol. 110, No. GTg, 1984.
7. Randolph, M. F. and Worth, C. P., An Analysis of Vertical Deformation of Pile Groups, Geotechnique, Vol. 24, Dec. 1979.
8. Focht, J. A., Jr and K. J. Koch, Rational Analysis of the Lateral Performance of Offshore Pile Groups, Proceedings, Fifth Annual offshore Technology Conference, Houston, U S. A. 1973.
9. Lee, I. K., White, W., Ingles, O. G., Geotechnical Engineering, 俞调梅等译，中国建筑工业出版社，1986 年。
10. 同济大学工程地质教研室，静力触探侧壁摩阻力与桩侧摩阻力的试验研究，同济大学科技情报站，1979.
11. 曹汉志，桩的轴向荷载传递及荷载-沉降曲线的数值计算方法，岩土工程学报，1986，Vol.8，No.6.
12. 黄绍铭、裴捷等，软土中桩基础沉降计算方法，1983.
13. 陈甫孙、周红，纯摩擦桩荷载-沉降曲线的拟合方法及其工作机理，岩土工程学报，1987，Vol.9，No.2.
14. 王成华、陈环，桩台共同作用的非线性有限元分析，第一届全国计算岩土力学研讨会论文集，1987，11.
15. 周铭、王惠初、鲁子爱，多层地基横向荷载桩试验资料分析方法，岩土工程学报，1985.5，Vol.7，No.3.
16. Gazioglu, S. M. 和 O'Neill, M. W., Evaluation of p-y Relationships in Cohesion Soils, Analysis and Design of Pile Foundation, Proceeding of a Symposium, San Francisco, California, 1984.10, p.1—5.
17. 韩理安，群桩水平承载力的实用计算，岩土工程学报，1986.5，Vol.8，No.3.
18. Geddes, J. D., Stress in Foundation Soils Due to Vertical Subsurface Loading, Geotechnique, vol. 16, No. 3, 1966.

第十二章　地下工程与深开挖

12.1　概述

随着城市人口密度的不断增加，合理地开发与利用地下空间问题变得更加迫切。地下工程四周为土体所包围，土的性质对它的形变和应力状态有重要影响。地下工程所引起的土体变形又反过来影响地面建筑和已有的管线设施。因此在建造地下工程时，应当与保护城市中有历史意义和经济意义的地面建筑协调起来。

北京、天津已先后建成了地下铁道。上海第一条地铁线路正在兴建，其它大中城市也积极进行相应的筹划。迫切需要总结困难条件下，尤其在饱和粘土中建造、设计地下铁道的经验。

地下连续墙在修建地铁车站和建筑物深基础时得到广泛使用，在开挖深基坑时作为围护结构，有时也作为永久性深基础的组成部份。应当考虑因逐步开挖而引起的基坑底面隆起、墙体和周围土体的位移及其对邻近建筑的影响。

地下铁道、地下连续墙及深基开挖经常当作二维问题来分析，其原理见第二章。在分析中所使用的本构关系见第三章。有关土压力计算见第十四章。

12.2　地下铁道

12.2.1　盾构法地下铁道的特点

根据土层性质与埋深，地下铁道施工一般区分为明挖法和暗挖法。如果从施工条件比较困难的角度来考虑，在含水饱和软粘土地区建设地铁是难度最大的，例如上海与我国东南沿海城市一般属于这种情况。目前采用的施工方法为：在地铁车站应用地下连续墙，在区间段应用盾构法。

现在着重说明盾构法地下铁道的一些特点。在土层中应用盾构法施工有两大优点：一、不受地铁埋深限制，有可能使地铁在密集的高楼桩基底下部穿越而过。二、对地面的干扰较小，如果能有效地控制地面沉降，将不致影响地面建筑物的正常使用。然而，用盾构法进行施工时，在地铁上方或多或少地会产生地面沉降，若控制不当，这种地面沉降会导致周围建筑物发生倾斜、开裂甚至倒坍等现象，也可能对各种地下管线产生不良的影响。因此，在盾构法地铁的设计与施工中，必须充分考虑这一因素，尽可能较准确地估计沉降的范围与大小，并应用必要的手段减少和控制沉降。这也是计算土力学在盾构法地铁中所需要解决的课题。

用盾构法施工时，沿地下铁道纵向轴线所产生的地表变形规律一般如图 12.1 所示。通常在盾构前方的土体由于受到挤压而产生明显的向前向上的移动，从而使地表有微量的隆起；在盾构开挖面上方略有下沉；当盾构通过时，盾构两侧的土体向外运动；在衬砌管片脱离盾尾时，由于管片外壁与土壁之间存在建筑空隙，地表将产生较大的下沉，并且下沉速率也较大，在此同时地铁两侧的土体向中线有所移动；以后由于固结作用使饱和土产生沉降，随着时间推移沉降逐步趋于稳定。

图 12.1 中 a-b 区段为盾构掘进引起的地表运动，b-c 区段为建筑空隙的存在而引起的沉降，这两部分沉降常称为施工沉降，或前期沉降。这种沉降一般在不排水的情况下发生的，通常在一至二个月内完成。c 以后的区段为固结沉降，或称后期沉降，这种沉降与地铁周围的超孔隙水压力的消散有关，一般持续时间较长，可超过一年，并且分布范围较大，在某些情况下还应考虑次固结的影响。

从一些施工现场的实测发现，盾构推进对前方的影响范围约为 20～25 m，其纵向沉降角大约为 $45°-\phi/2$，其中 ϕ 为土的内摩擦角。

在与地铁轴线相正交的横断面上，盾构前方由于土体受到挤压，地表产生隆起，而呈"Ω"型，如图 12.1 曲线 a；盾构通过后，地面逐渐下沉，形成"V"型的沉降槽，如图 12.1 曲线 b。沉降槽的中心大致接近地铁的轴线，其形状一般认为与概率曲线相似。

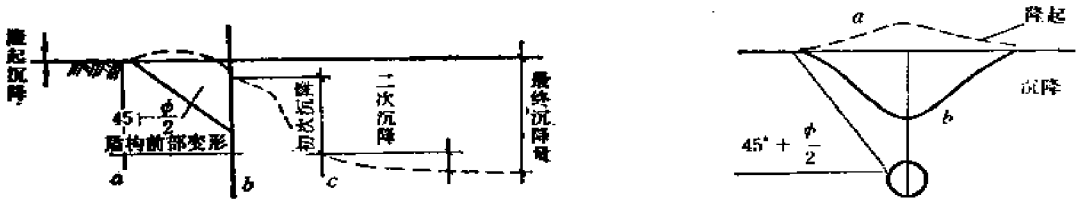


图 12.1 盾构法施工时的土体变形特性

12.2.2 计算土力学在盾构法地铁中的应用

盾构法施工引起的地表沉降是人们十分关注的，尤其是在建筑物密集的城市中建造地下铁道的场合。最初对于这个课题的研究是沿用矿山开采中引起地表位移的估算方法，主要是应用随机介质理论，盆形沉降曲面取为高斯曲面。在本世纪六十年代末，Peck (1969) 提出了地层损失的概念和估计盾构法施工引起地表沉降的实用方法，后来有不少学者提出了改进的意见，使之成为估算地表沉降的最常用方法。

由于地表沉降不仅与地铁埋深、直径，盾构构造，施工方式等有关，而且和施工工序，土的固结情况都有关，任何简化实用的方法均无法反映众多因素的影响，因此必须借助于计算土力学与电子计算机，才有可能使人们比较全面地考虑各个重要的影响因素，准确地估计盾构施工各阶段地表沉降的规律，并提出有效的控制地表沉降方法。

考虑到盾构掘进过程中，周围土体有可能受到较大的扰动，建筑空隙(如图 12.2)会导致土壁运动，注浆会影响地表沉降等因素，因此适宜于将土体作为弹塑性介质来进行有限元分析。为考虑二次沉降，采用相应的固结模型。

为节省计算时间和费用，一般应简化为平面应变问题。土体在饱和条件下可视为由土骨架和孔隙水组成的两相体，并采用假定：(1) 符合 Terzaghi 的有效应力原理；(2) 土骨架的本构关系根据现场土取样试验采用合适的模型，例如上海地区土可用剑桥模型；(3) 次固结符合延迟粘弹性模型；(4)孔隙水渗流符合 Darcy 定律。

有限元法中单元采用八节点等参单元。如果仅仅为了计算地表沉降，可将管片简化为刚性圆环；如果还希望同时分析管片的内力与变形，可将管片离散处理。假如要考虑土体与管片之间接触特点，还可引进接触单元。

在应用计算土力学方法解决盾构法地铁工程问题中，有两点必须强调指出：一、地层损失这个重要因素一定要在有限元分析中反映出来，所谓地层损失就是被开挖掉的土体体积

不等于竣工地铁的体积，两者之差即称为地层损失。显然地层损失不仅包括建筑空隙的体积，也包括超挖或其它流失土的体积。当然，建筑空隙的体积一般是主要的，可用间隙系数（$D_m - D_t = g$，其中 D_m 为盾构外壳直径，D_t 为管片外直径，g 为间隙系数）来反映。二、尽可能用有限元法模拟施工情况，反映土体的不同受力条件与特点。例如，图 12.2 表示了土体在各个施工阶段的受力特点，其中图 a 表示在盾构前方由于挤压力作用，有可能使地表产生隆起的现象；图 b 表示在盾尾的后方，此时给定洞周位移使其落到管片位置模拟盾尾间隙，导致地表下沉；图 c 表示压浆以后，洞周土向外位移，地表又产生回升。此外，还可利用洞周孔隙压力的边界条件来模拟压缩空气的作用，在有限元分析中考虑井点降水对地表沉降的影响。

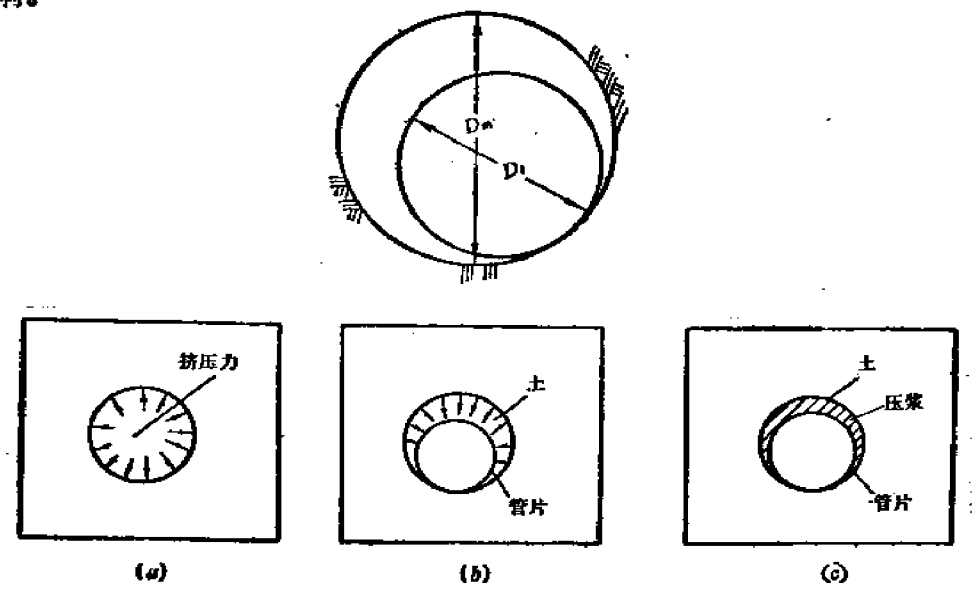


图 12.2 地下铁道不同施工阶段的受力特点

计算土力学为人们提供了盾构法地铁设计的理论与方法，尤其是有限元分析已得到了广泛的应用，然而应当看到地铁区段的土质是各种各样的，施工条件是经常变化的，有限元分析必须与现场量测和调查密切结合。

盾构法地铁工程的现场量测主要有：

(1) 设置地表桩，以量测地表位移的情况。

地表桩的布置形式一般分三种：第 1 种是沿着地铁轴线布置，目的是观测盾构推进时对前方土体的影响，确定沿轴线地表沉降的形式，同时了解沉降随时间的变化规律；第 2 种是与轴线相垂直地布置，考虑到对称性，可在地铁的一侧布置测点，布置范围一般距地铁中心线 30～40 m 左右，目的是观测地表沉降的影响范围，沉降的分布形式等；第 3 种是在重要建筑物的周围布置地表桩，目的是观测建筑物的沉降情况，以便及时采取必要的施工措施，减少和控制沉降量或不均匀沉降。

(2) 设置孔隙水压力盒，以量测施工前后孔隙水压力的变化情况。

(3) 统计出土量、压浆量等，以便了解地层损失情况以及地层损失与地表沉降的关系。

总之，要使计算土力学，或者说有限元分析方法，在盾构法地铁工程中获得有效的应用，离不开试验，必须对现场土的特性、本构关系有充分了解，并进行周密的现场量测。只有这

样，才能使有限元分析建立在坚实、可靠的原始资料基础上，并与整个盾构法施工过程密切结合，从而有可能获得人们预期的效果。

12.2.3 工程实例

一、旧金山(BART)地铁

旧金山(BART)地铁处于旧金山湾泥质地层中，土质情况及地铁的几何位置见图12.3，采用机械化盾构施工，施工时采用 83 kPa 气压，稳定比在 4.6～6 之间，从以上资料来看，除埋深以外，其它情况与上海地铁工程比较相似。

采用弹塑性介质的有限元分析，有限元网格划分如图 12.4 所示。取地层损失率为4%，地表沉降量的理论计算结果与实测数据的比较见图 12.5，还是十分接近的。

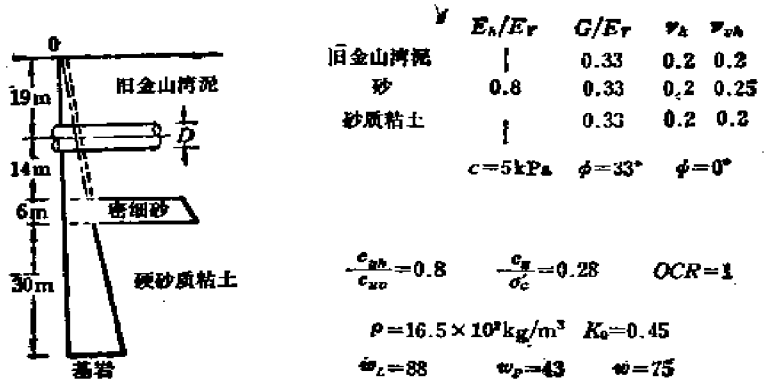


图 12.3 旧金山 BART 地铁的工程地质条件

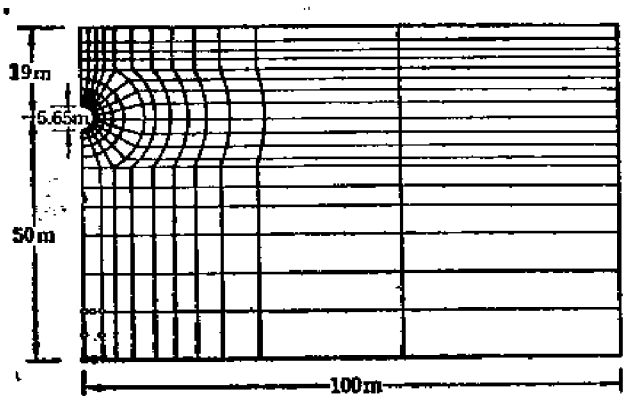


图 12.4 旧金山地铁分析中的有限元网格

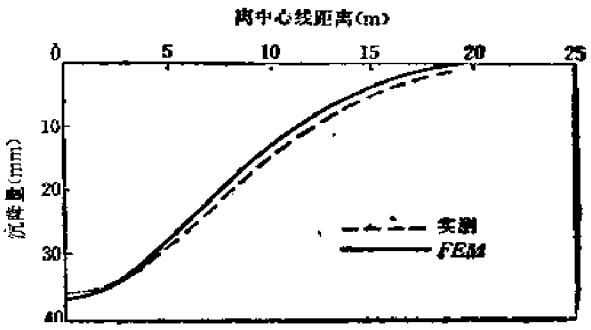


图 12.5 旧金山地铁的地表沉降

二、法兰克福地铁

法兰克福地铁为圆形盾构法施工，半径为 3.25 m，从地铁中心线到地表面为 14 m，其地质情况见图 12.6。开挖方法是应用半机械化盾构，盾构直径为 6.7 m，长为 6 m，管片宽度为 90 cm，厚度为 35 cm，每天掘进 5 m。

用弹塑性力学有限元方法进行计算，取间隙为 200 mm，即等于盾尾的孔隙量，理论计算结果与实际量测资料的比较，列于图 12.7。

三、上海地铁试验段

地铁试验段管片外径为 6.0 m，埋深为 6～10 m，处于饱和亚粘土和粘土地层中，施工

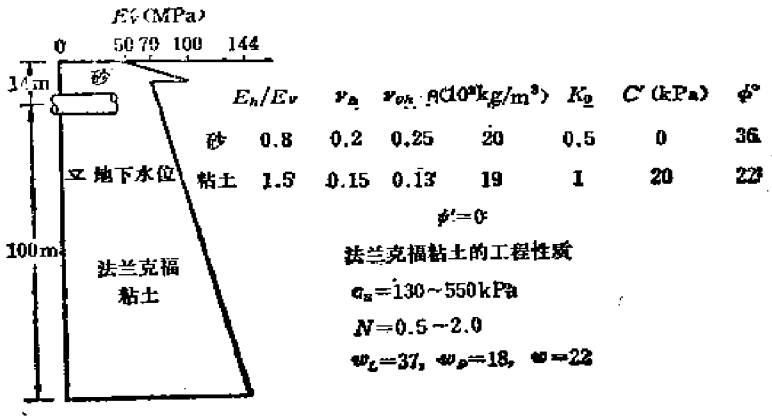


图 12.6 德国法兰克福地铁的工程地质条件

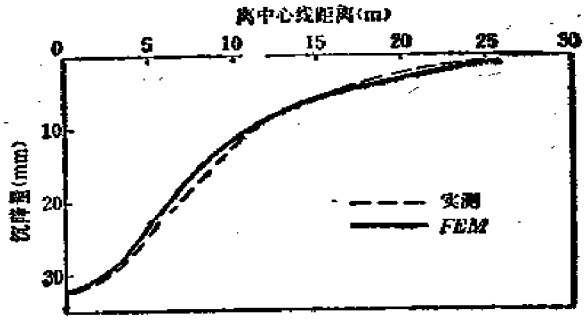


图 12.7 法兰克福地铁的地表沉降

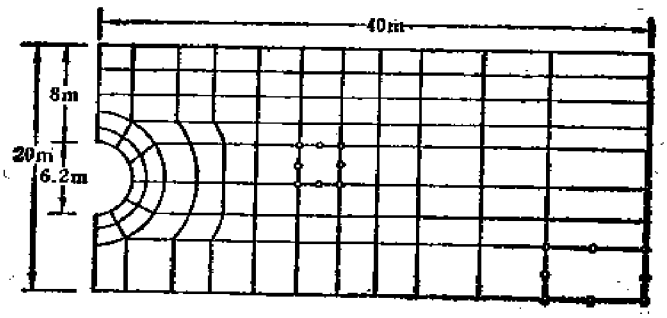


图 12.8 上海地铁的有限元网格

方法采用机械式网格盾构开挖，开挖时稳定比在5～6之间，现取埋深为8 m，稳定比 N=5.5 进行计算。

应用有限元方法进行分析，计算宽度取离地铁中心线40 m，深度取20 m，以平面应变问题作为简化，有限元网格见图12.8，单元取八节点等参单元。

取间隙系数300 mm，通过弹塑性有限元分析，算得最大沉降为17.5 cm。根据上海地铁试验段的量测结果，大多数地段的最大沉降都大于10 cm，有的甚至达到40 cm以上，最好的地方最大沉降量也在8 cm左右。其原因可能是：由于上海地区土质的特点造成施工上的困难，或者土体受到扰动后发生重新固结，引起与时间有密切关系的长期沉降。为了较好地了解上海地铁试验段地表沉降的影响因素，并寻找减少和控制地表沉降的方法，有必要应

用考虑固结问题的弹塑性有限元法对上海地铁试验段的情况进行计算分析。

为了便于分析引起地表沉降的机理，并显示各种防治措施的作用，在进行考虑固结问题的弹塑性有限元分析过程中，应首先计算各种因素单独作用下引起地表沉降的影响，然后根据理论推理，对施工措施提出有益的建议。在考虑固结问题的弹塑性有限元分析时，需进行如下几项工作：

(1) 分析由于盾尾空隙引起的地表沉降；

(2) 分析在管片背面注浆对地表沉降的影响；

(3) 分析盾构推进时施加气压对地表沉降的影响；

(4) 分析在多因素共同作用下地表沉降曲线。

当盾尾离开管片后，由于盾尾间隙使管片和土壁之间形成一个空间，此时土在释放荷载的作用下，落向管片。由于土的位移引起地表沉降，在正常的施工情况下，建筑空隙是引起地表沉降的主要原因。

以洞周土体位移至管片位置作为计算的第一时步，以后逐步计算第二、三时步等。各时步的地表沉降计算曲线列于图 12.9。

图 12.10 列出了用有限元法算得的地铁侧向孔隙水压力变化情况，其规律与按砂井固结理论的解析解所得的孔隙水压力大致吻合，与实测孔隙水压力数值也接近，说明盾构法在饱和土中施工时，确实存在土体重新固结的问题。

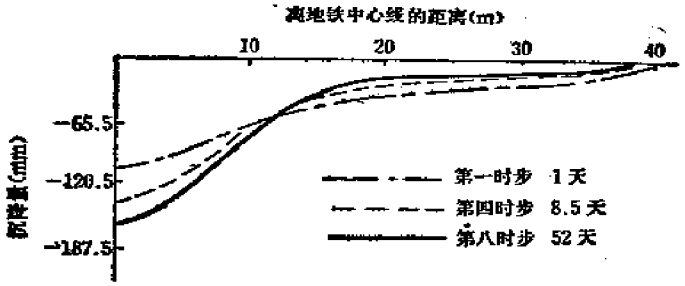


图 12.9 上海地铁不同时间的地表沉降

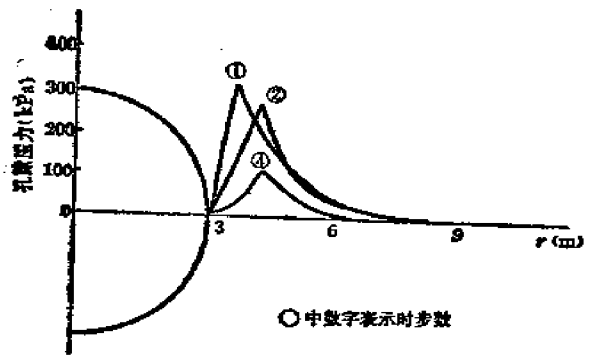


图 12.10 上海地铁周围不同时间的孔隙压力分布

根据计算，超孔隙水压力经过 50 多天，基本消散。(对于一些渗透系数很小的粘土层，消散时间需要更长。) 随着超孔隙水压力的消散，地表变形也基本稳定。按计算，在第八时

步，地表最大沉降量是16 cm，其中由建筑空隙引起的沉降量为10.6 cm，因固结引起的沉降为6 cm，为总沉降量的37.5%。

在管片背面注浆是目前防治地表沉降的最有效措施，在土壁与管片之间注浆，目的是为了减少地层的变形以防止地面建筑物开裂或破坏，影响地下管道设施的正常使用，所以采用注浆的办法，既要尽可能减小地表沉降，又要防止注浆导致地面隆起的现象。

注浆可以有各种方式，并得到相应的计算结果。这里对于顶部45°处少注浆的情况列出了计算结果，见图12.11。

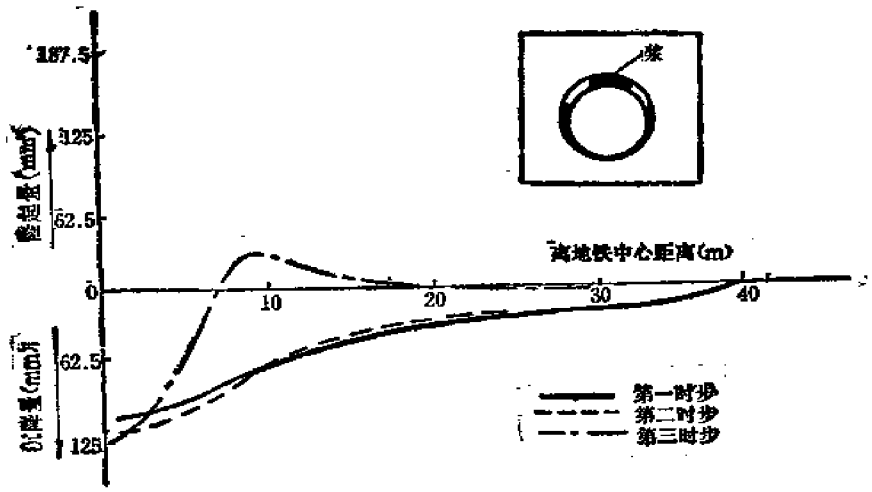


图12.11 注浆时的地表变形

通过有限元分析和实际施工经验得知，注浆确是盾构法地铁施工中控制地表沉降的有效手段，但为了防止隆起和提高质量，在注浆的方式上值得探讨，一般认为及时注浆、多次注浆的办法较好。

在盾构推进时，为了防止地下水侵入，常采用施加压缩空气的办法。那么，施加气压对于减少地表沉降有无作用呢？对气压分别为80、96和120 kPa的三种情况进行了计算，将结果列在表12.1中。

由表中数据看出，施加气压基本上不能减少地表沉降，其作用可能在于：排开了部分土体中水份，有利于提高该部分土体的抗剪强度；减少了释放荷载的作用，延缓了洞周土的位移，给注浆工序争得了时间。

以上分析了各种因素对地表沉降的独立影响，事实上这些因素是同时作用的，盾构法地铁工程地表沉降是这些影响因素的综合作用的结果。

现在综合上述各因素，进行计算，计算中考虑了次固结效应，并取 $\eta_{亚粘}=34600\ \mathrm{TD/m^2}$，$E_{亚粘}=40000\ \mathrm{kPa}$，$\eta_{粘}=346000\ \mathrm{TD/m^2}$，$E_{粘}=65000\ \mathrm{kPa}$。图12.12和图12.13，分别为横向地表沉降曲线和最大沉降量随时间变化的曲线。

从图中比较看出，有限元法的分析结果与实测资料大致是接近的。由此可以说明，计算土力学在盾构法地铁工程中有明显的实用意义，当然也有待于进一步深入研究。

表 12.1 施加气压后的地表沉降

节点号	距隧道中心的距离 (m)	地表沉降量 (mm)		
		80 kPa	96 kPa	120 kPa
1	0.00	105.5	105.3	105.0
2	1.35	104.2	104.0	103.7
3	2.70	100.7	100.5	100.3
4	4.20	94.3	94.1	93.9
5	5.70	86.1	86.0	85.8
6	7.20	77.4	77.3	77.1
7	8.70	68.8	68.7	68.6
8	10.2	61.2	61.2	61.1
9	11.7	54.5	54.4	54.3
10	13.2	48.8	48.8	48.7
11	14.7	43.9	43.9	43.8
12	16.2	39.8	39.8	39.8
13	17.7	36.3	36.3	36.3
14	19.2	33.4	33.4	33.3
15	20.7	30.8	30.8	30.8
16	22.2	28.6	28.6	28.6
17	23.7	26.8	25.8	26.7
18	25.7	24.6	24.6	24.6
19	27.7	22.8	22.8	22.8
20	30.2	20.5	20.5	20.4
21	32.7	18.4	18.4	18.4
22	36.3	13.3	13.3	13.3
23	40.0	0.0	0.0	0.0

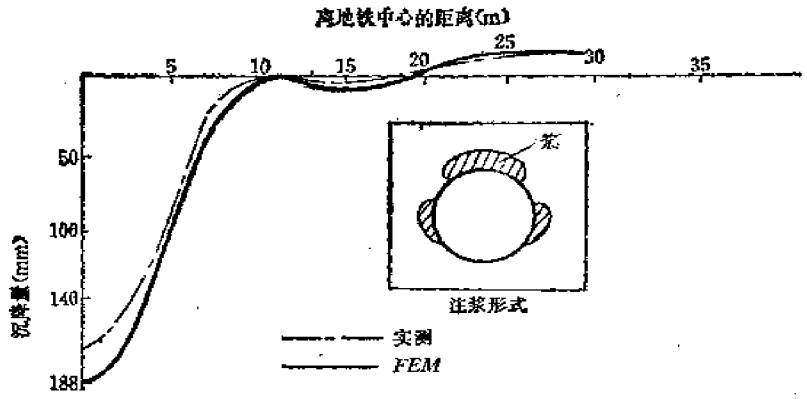


图 12.12 注浆时的横向地表沉降

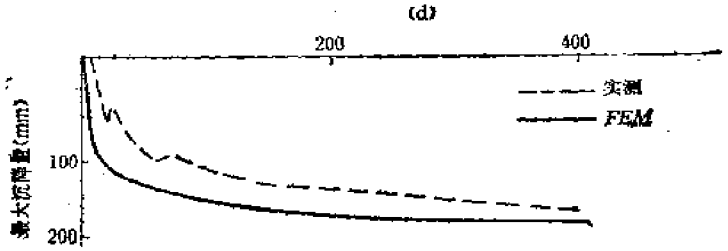


图 12.13 最大沉降的时程曲线

12.3　地下连续墙

12.3.1　槽壁稳定分析

随着地下空间的开发利用，地下墙的深度将越来越深，日本的地下墙深度已达150 m，墙厚3.2 m。深层地下墙的采用，必然带来深槽的稳定问题，实际工程中由于没有把握槽壁稳定技术而发生塌坍的为数不少。所以必须研究槽壁的稳定机理，以确保地下墙技术的应用与发展。

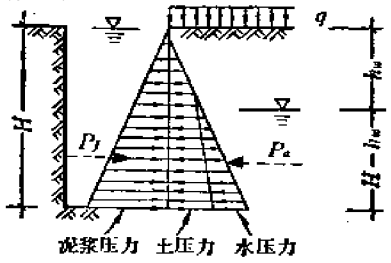


图 12.14　地下墙的荷载

槽壁不致塌坍的重要原因乃是有泥浆的护壁作用。泥浆的主要成份为膨润土。膨润土溶液具有触变性，起到了护壁效果。新鲜泥浆具有比水大的比重，对槽壁的水平静止压力相当于一种液体支撑，与来自地层的土压力和水压力相互平衡（如图12.14）。另外，因为泥浆液面高于地下水位，所以会渗入周围地层，据调查，渗透范围从10厘米左右至10 m左右，并由于部分膨润土颗粒在槽壁上受阻，粘附在槽壁上，形成一层透水性很低的泥皮。周边被泥浆渗透的地层，其抗剪强度有所提高，这种泥皮与渗透层共同组成的泥壁，将有助于维持槽壁的稳定性。

总之，泥浆的触变性和液位差以及渗透形成的泥壁促使槽壁处于稳定状态。但是，如管理不周，槽壁仍会发生塌坍，因此有必要作定量的槽壁稳定分析计算。目前的一些分析方法只是从力的平衡来考虑。过去多采用平面槽壁的稳定分析方法。实践证明此法过于保守，不符合工程实际情况。实际上槽壁塌坍有土拱效应，塌坍范围要小得多。所以应按空间问题进行稳定分析。

根据现场观测和模型试验的结果，槽壁塌坍的地面范围近似于直径为槽段长的半圆形。对泥浆槽进行线性有限元分析，亦有类似结果，近槽边半圆形范围内的土体变形较大，应力较小。而这以外部分有明显的应力集中，起着承载拱作用。说明槽壁塌坍只是槽边的一小部分土体，离槽较远部分的土体则形成以槽段端部为拱脚的土拱。此土拱承受着较远处土体形成的土压力，从而防止槽壁的进一步塌坍。

下面简单介绍考虑土拱效应的泥浆槽壁的稳定分析方法及应用举例。

设槽壁长度为 l，槽深为 h，坍体底斜面与水平面的夹角为 α，如图12.15所示。作用在坍体上的荷载有：坍体的自重 W，坍体范围内的外合力 P，坍体垂直面上的粘聚力 C_1（因坍体处于极限平衡状态，作用在坍体上的水平土压力减少至零），坍体底斜面上的粘聚力 C_2 及

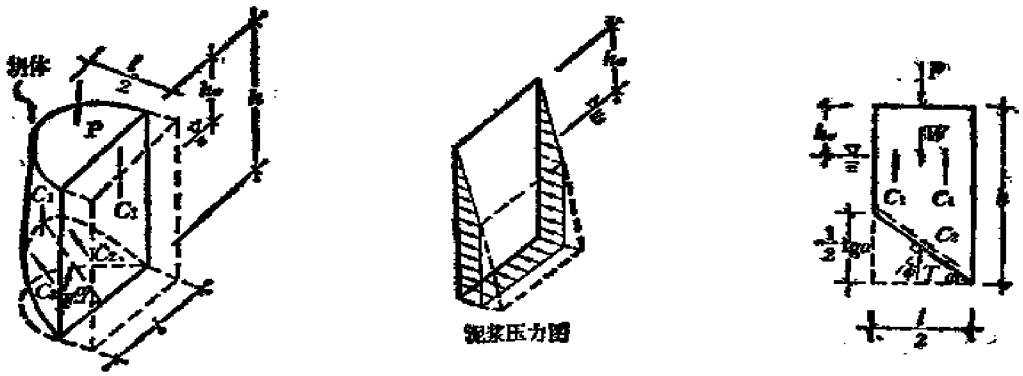


图 12.15　槽壁的稳定分析

斜面上正压力与摩擦力的合力 T（与法线夹角为 ϕ），还有地下水压力及槽内的泥浆压力。

考虑坍体的极限平衡，把各力投影于垂直 T 力的轴上，得如下公式（推导从略）：

$$\operatorname{tg}(\alpha-\phi)\left[\gamma' l^2\left(\pi h-\frac{2}{3}l\operatorname{tg}\alpha\right)/8+\pi l^2 h_w/8+P-c_1 l(\pi h-l\operatorname{tg}\alpha)/2\right.$$
$$\left.-\pi C_2 l^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}(\alpha-\phi))/8\right]=l[(\rho_f-1)h^2+2hh_w-h_w^2]/2, \qquad (12.1)$$

式中，γ' 为土体的浮容重，ρ_f 为泥浆密度。

上式中有二个未知数：α、ρ_f。最大的 ρ_f，记作 $\rho_{f(\max)}$，对应的 α 即为所求。$\rho_{f(\max)}$ 即为槽壁达到稳定时所需的泥浆密度。如果 $\rho_{f(\max)}$ 小于施工中所能达到的泥浆密度，则槽壁稳定；如果 $\rho_{f(\max)}$ 大于施工中所能达到的泥浆密度，则槽壁不稳定，需采取措施。

【例 12.1】 $\phi=14°$，$\rho=1.8\times10^3\text{kg/m}^3$（$\gamma'=8\times10^2\text{kg/m}^3$），$c=7$ kPa，槽深 $h=30$m，槽段长 $l=6$ m，地表超载为20 kPa，求槽壁达到极限平衡时所需的泥浆密度 ρ_f 及相应的坍体底面倾角 α，并探求使槽壁稳定的措施。

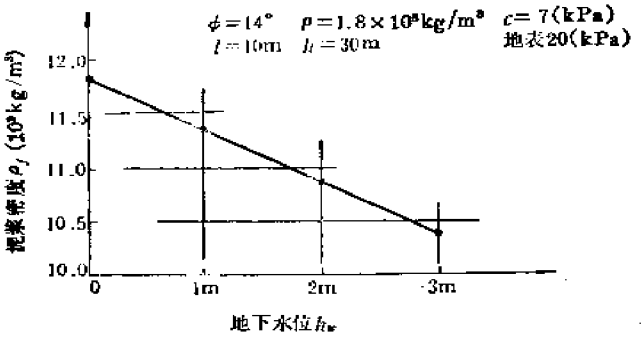


图 12.16 槽壁稳定计算

解：先假定 $h_w=0$（即地下水位至地表），从平衡方程中求得 $\rho_{f(\max)}$ 为 $1.0834\times10^3\text{kg/m}^3$，相应的 α 为 78°。实际施工中泥浆的密度约为 $1.04\times10^3\text{kg/m}^3$ 左右，$1.0834>1.04$ 说明槽壁不稳定。现采取降低地下水位的办法，取 $h_w=1$ m，代入平衡方程，解得 $\rho_{f(\max)}$ 为 $1.029\times10^3\text{kg/m}^3$，小于 $1.04\times10^3\text{kg/m}^3$ 槽壁稳定。说明只需降低 1 m 地下水位就能使槽壁稳定。

【例 12.2】 其它参数同例 12.1，唯槽段长度 $l=10$ m，求 $\rho_{f(\max)}$ 及相应的 α，并探求槽壁稳定的措施。

解：同样先假定 $h_w=0$，求得 $\rho_{f(\max)}$ 为 $11.8\times10^2\text{kg/m}^3$，$\alpha$ 为 76°，$\rho_{f(\max)}$ 大大超过施工密度，可见增大槽段长度 l，对槽壁稳定不利。如采取降低地下水位的办法，计算结果如图 12.16 所示。从图中可见，需降低水位 3 m（$h_w=3$ m）才能使槽壁稳定。

当坍体范围内有建筑物荷载时（如地下室、条形基础、筏基、桩基等），因沟槽的开挖，邻近沟槽的那部分基础就会产生沉降。由于建筑物的刚度，将使建筑物作用在槽壁上的超载减少。

如是柔性的圬工建筑物，则不考虑由于基础沉降引起的超载减少。

当沟槽开挖时，槽壁周边的地表会发生下沉，离槽壁越远，下沉越小。据 Elson 的模型实验结果，当安全系数为 1.05 时，下沉量为槽深的 1/500；当安全系数为 1.2 时，为槽深的 1/1000；当安全系数为 1.5 时，可不考虑地表下沉。

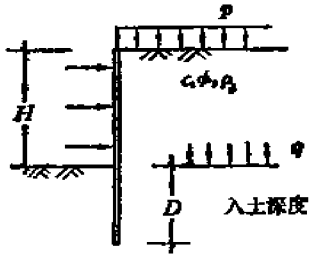


图 12.17 入土深度示意图

12.3.2 基坑稳定与入土深度

对于基坑开挖工程，为了确保施工阶段基坑的稳定性，都必须将地下墙伸入到基底以下某一深度，并称为入土深度（图 12.17）。对于板桩墙之类的挡墙结构，入土部分的那部分材料是

可以回收的，但是对于地下墙工程，入土部分永远不能回收，作为工程造价而耗费掉。因此为了节省工程造价，在保证施工要求的前提下，应尽量减小入土深度。当今国内外对这方面的研究成果很多，总括起来不外乎从墙体的抗倾覆、坑底的抗隆起、抗管涌等方面来研究。对于多支撑的地下墙工程，主要是抗隆起和抗管涌问题，以下介绍如何从这两方面着手来确定入土深度，对于地下墙需承受上部建筑物垂直荷载的情况不在此例。

1．根据基坑隆起的稳定条件确定入土深度

基坑开挖后，会不会产生隆起失稳，取决于地质条件、墙体入土深度以及基坑尺寸和形状等。下面仅介绍同济大学通过模拟试验研究得到的经验公式。

通过对地下墙实际工程的调查及对弹性力学有限元解析的了解，认识到即使基坑底部处于弹性受力状态，基底亦有一定数量的向上位移。事实上即使对地基极限承载力取某安全度，亦存在相当数量的位移。也就是说地基在极限失稳前已产生了相当数量的位移。基坑有一定量的向上位移并不表示基坑已经失稳。现有书籍上所述及的基坑隆起，实质上就是极限失稳。为加以区别，本文采用“基坑向上位移 δ 的概念”，来反映极限失稳前的状态。

通过模拟试验建立了基底向上位移 δ 与荷载 q 以及地层的 c，ϕ，γ 和地下墙的入土深度 D 与开挖深度 H 的关系式（参见：《大坝观测与土工测试》1984年第2期，“多撑式地下连续墙入土深度的模拟试验研究”）。只要按照地质条件及工程情况决定允许的基底向上位移量，那么就可得出入土深度 D；反之，当确定了入土深度 D 以后，就可求得基坑的向上位移量。

基底的向上位移量 δ 与多种参数有关，关系极为复杂，为此首先进行 δ 与各参数间关系的单项研究，然后综合单项试验的成果，建立 $\delta=f(q,\ c,\ \phi,\ \gamma,\ D/H)$ 的关系式。

单项试验分为三步：

(1) 相同的 D/H、γ、c、ϕ，改变 q，以建立 $\delta\sim q$ 关系：

通过模拟试验，得到：$\delta=0.0111+30.587\,q$，

随着 q 的增大，δ 随之增大，$\delta\sim q$ 基本成线性关系，所有试验数据的离差均小于 3σ，σ 为均方差。

(2) $P=0$，相同的 γ，c，ϕ，改变 D/H，以建立 $\delta\sim D/H$ 关系：

通过模拟试验，得到：

$$\delta\doteq 5.065(D/H)^{-0.5},$$

随着 D/H 的增大，基底向上位移逐渐减小，并呈非线性关系。

(3) $P=0$，相同的 D/H，改变 c，ϕ，γ，以建立 $\delta\sim c$，ϕ，γ 关系：通过试验，得到：

$$\delta\doteq 0.433\gamma\cdot c^{-0.04}(\mathrm{tg}\phi)^{-0.54},$$

可见，δ 与 γ，c，ϕ 的关系组成为一个超平面。δ 随 γ 的增大而增大，而随着 c、ϕ 的增大而变小。这与古典基坑稳定理论的结论相一致，即 γ 增大会降低安全系数，而 c、ϕ 增大则会提高安全系数。

在单项试验的基础上，通过对37组数据的综合数理统计，经验公式的最后形式为：

$$D/H=[0.08[\delta]+2.33+0.0134\,\gamma H'-0.423\gamma c^{-0.04}(\mathrm{tg}\phi)^{-0.54}]^{-2} \qquad (12.2)$$

式中 D——入土深度(m)；

$[\delta]$——基底(允许)向上位移量(cm)；

$H'=\left(H+\frac{P}{\gamma}\right)$——等代高度(m)，其中$P$为地面超载(t/m²)；

H——开挖深度(m)；

c，ϕ、γ——分别为土体的粘聚力(kg/cm²)，内摩擦角(度)，容重(t/m³)。

在整个试验过程中，最大的位移值达到9 mm，基坑仍未发生极限失稳现象。如换算到实体，就有30 cm的位移量，因此说，只要允许位移值不超过30 cm，即可保证基坑安全。如果安全系数取为2，则最大允许位移值 $[\delta]=15$ cm。对于内摩擦角较大而且含砂量较多的地层，由于地基具有突然增长位移或破坏的特征。因此$[\delta]$应取小值，甚至不允许有位移，即$[\delta]=0$，以保证有一定的入土深度。

由于模型采用了刚度较大的支撑，因此未发现墙体整体倾翻的现象。这说明如果支撑的强度和刚度足够大，最下面一道支撑足够低的话，那么地下墙整体失稳的情况就有可能被制止。

本试验仅模拟了基坑一侧的墙体和土层，所测得的位移值δ亦只是一侧影响而产生的。故本试验的经验公式较适用于宽基坑工程。而且本试验只是针对一种厚度(60 cm)的墙体，实际的厚度还可能变化，对于墙厚大于60 cm的墙体，仍可应用此经验公式，所得结果是偏于安全的。

2．根据防止管涌的稳定条件确定入土深度

当基坑面以下的土为疏松的砂地层时，而且又作用着向上的渗透水压，如果由此产生的动水坡度大于砂地层的极限动水坡度时，砂粒子就会处于冒出状态，基坑底面丧失稳定，这种现象称作管涌，如图12.18所示。如果增加地下墙的入土深度，就能增加流线长度，从而降低了动水坡度。因而增加入土深度对防止管涌现象的发生是有利的。国内外学者对管涌现象进行了广泛的研究，得到了许多计算方法。这里仅介绍一种较简便可行的计算方法。

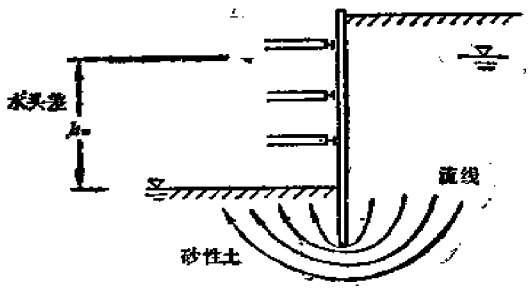


图12.18 管涌产生示意图

当符合$i<i_e$条件时，基坑为稳定，不会发生管涌现象。

$$i=h_w/l \tag{12.3}$$

$$i_e=(G_s-1)/(1+e) \tag{12.3a}$$

式中 i——动水坡度；

i_e——极限动水坡度；

h_w——墙体内外的水头差；

l——产生水头损失的最短流线长度；

G_s——土颗粒比重；

e——土的孔隙比。

3．基底下有压水层的基坑稳定

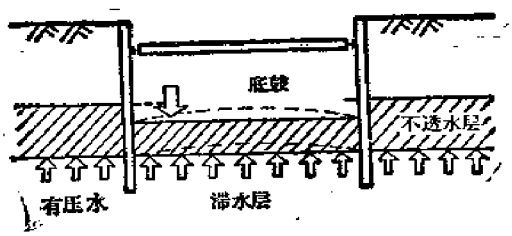


图12.19 有压水产生的基底隆起

如果在基底下有薄的不透水层，而且在不透水层下面是具有较大水压的滞水层，当土重不足以抵挡下部的水压时，基底就会发生隆起，如图12.19所示，墙体就会失稳。所以在地下墙设计、施工前必须查明地层情况及有压水层情况。

12.3.3 地下连续墙的内力计算方法

地下墙可以仅仅是作为施工阶段临时性的挡土结构，承受来自地层的水、土压力；也可以在施工阶段以后又作为主体结构的一部分，此时它不仅承受水、土压力，而且还承受作用在主体结构物上的垂直和水平荷载（包括静、活载，地震荷载等）。因此地下墙的内力计算分为施工阶段计算和使用阶段（作为主体结构一部分）计算两类。

限于篇幅，这里仅介绍施工阶段的内力计算方法，对于使用阶段的内力计算方法可参考《地下连续墙设计、施工手册》一书。

施工阶段的计算方法最初沿用的是古典的钢板桩计算方法。而实践证明，地下墙不同于钢板桩，它的刚度大、变形小，而且土压力大小显然与钢板桩的不同。带拉锚的地下墙，其受力特点更接近于空间结构。对于多撑式（多锚式）地下墙，其施工工艺与顺序对墙体的受力有极大的影响，如仍采用古典钢板桩的计算方法，甚至会得出相反的结果。

施工阶段的计算理论经历了以下发展过程：

1. 古典方法：

设土压力为已知，不考虑墙体变位，不考虑支撑变形。属于此类方法的有等值梁法、1/2分割法、Terzaghi 法等；

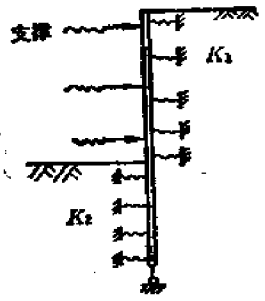


图 12.20 土壁支撑

2. 支撑轴力、墙体弯矩不变化的方法：

设土压力为已知，考虑墙体变位也考虑支撑变形，但是假定在支撑设置后即作为不动支点，而且假定以上部分的墙体变位、弯矩和支撑轴力再不变化。属于此类方法的有山肩邦男法等；

3. 考虑支撑轴力、墙体弯矩随开挖过程而变化的方法：

设土压力为已知（粘性土地层采用水、土合算的 Rankine 主动土压力，砂性土地层采用水、土分算的 Rankine 主动土压力），随开挖过程墙体的变位、弯矩及支撑轴力在不断变化。这是一种目前应用较广的计算方法。其计算简图如图 12.20 所示。采用杆系有限元法，墙体划分为杆单元，支撑作为一维的杆单元，当墙体向地层方向变位时，考虑符合 Winkler 假定的地层反力。地层反力系数 K 的取值应由试验决定或根据当地的有关技术规范，当无据可依时，可按表 12-2 采用。

表 12.2 地层反力系数 K(MN/m³)

土 的 种 类	N	K
硬 粘 土	$8 \leqslant N < 25$	10～30
中等粘土	$4 \leqslant N < 8$	5～10
松 砂	$N < 15$	0～10
软 粘 土	$2 \leqslant N < 4$	0～5
非常软的粘土	$N < 2$	0

4. 弹性理论平面问题的有限单元法

其视为平面应变问题。此法考虑了墙体结构和土体的相互作用。在进行有限元程序设计时，可将土体及墙体划分成平面八节点等参单元。将支撑视为二力杆单元，同时考虑到墙体与土体之间在变形过程中会发生错动，所以又增设了接触面单元来模拟这种情况，如图 12.21 所示。当地下墙的结构型式、介质条件、荷载分布、施工条件等均为对称时，可取对称轴的一侧作为研究的连续体。

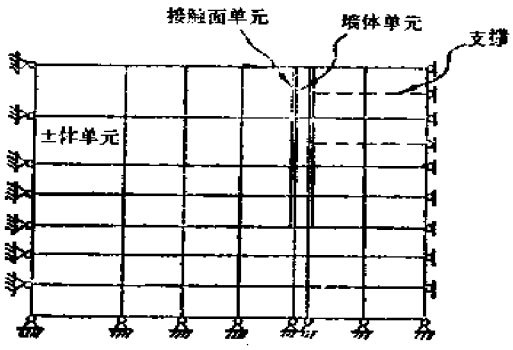


图 12.21 单元划分示意图

连续体的范围，对于墙背侧边界，可取大于一倍墙高(至墙底的全高)的地方，作为不动支点；对于墙底方向的边界，当墙底建在坚硬地层上时，则坚硬地层即作为不动的边界；当墙底范围的地层仍较软弱时，则边界取至墙底下大于 $(B-D)/\sqrt{2}$ 的地方(B 为基坑宽度，D 为入土深度)，作为不动支点。

用平面问题有限元法计算时，不必事先假设墙上的土压力，各单元所受的荷载仅是体积力及面力。

本法的优点不仅在于可以考虑土体与地下墙的相互作用，而且还可求得基坑的隆起量、地表的沉降量以及地层内的塑性区范围与发展过程，还可与土流变学相结合求得各参数的时间效应。

12.4 深开挖

12.4.1 深开挖的特点

一、问题的简化

对深开挖问题一般只作平面应变分析。实践表明，在大多数情况下分析结果具有足够的可靠性。曾经对同一开挖问题做了二维和三维的比较分析[1]，表明三维分析的计算机时为二维分析的八倍。开挖的影响范围取决于开挖的平面形状、开挖深度和土质条件等因素。在确定计算边界时，通常根据土层相对坚硬性确定下边界。例如在几十米厚的粘土层下的弱风化岩石可以作为位移为零的计算边界。Fred H. Kulhawy 认为，当下层材料的变形模量为上层材料的 500 至 1000 倍时，则可以取接触面处为有限元计算的边界。如果没有合适的坚硬层，则须通过试算确定开挖的主要影响区，以定出合适的边界。横向边界可取从墙开始向外延伸 3～4 倍的纵向尺寸。对于大型圆形深基坑开挖，根据文献 [2] 可取向基底扩展 1.1 倍的开挖深度、向墙外扩展 1.3 倍的墙深作为计算边界。

模拟分级、分区开挖施工时，模拟的级数越多，越能合理反映工程的实际情况，但计算机时相应增大。分层数的确定还与选用的单元类型有关。文献 [3] 分别采用线应变八节点等参元和常应变四节点等参元，对图 12.22 所示的线弹性地基开挖问题作了有限元分析。计算的结果表明：对八节点等参元，一步开挖和三步开挖位移计算结果完全一致，见图 12.22；而对四节点等参元情况，两种分层法计算的结果是有差异的。

图 12.22 采用不同开挖计算方法的计算位移(根据文献[4])。

二、开挖荷载的计算

在位移法中形成各应力自由面的等价节点荷载是按以下方式计算的：首先分别根据前

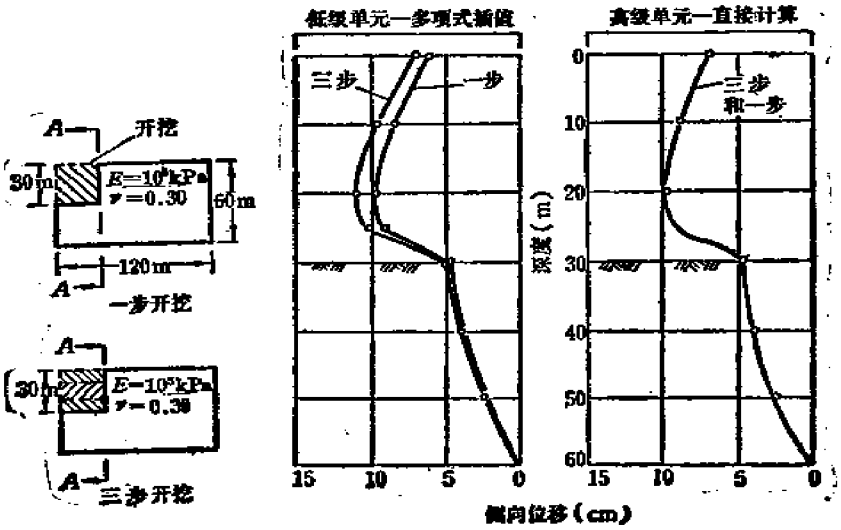


图 12.22 计算位移值

n 阶开挖引起的位移增量计算相应的应力增量，再由下式求出各节点应力

$$\{\sigma_n\} = \{\sigma_0\} + \sum_{i=1}^{n} \{\Delta\sigma_i\} \tag{12.4}$$

式中 $\{\sigma_0\}$ 为初始应力矢量；$\{\Delta\sigma_i\}$ 为第 i 次开挖引起的应力增量矢量。

当选用低级单元时，由于这类单元节点处的应力值是未知的，只知单元中心的应力值，故须通过对周围几个单元进行插值以求出开挖面节点应力。当遇到角点或材料不均匀时，选取插值单元需慎重。如果选用的是高级单元，则可以直接计算节点的应力进而计算等价结点力。但是根据单元内 Gauss 点积分直接计算结点力精度较高。例如文献 [3] 提出的公式：

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{M} \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} \mathrm{d}V \tag{12.5}$$

式中 M 为某级将被挖去的单元的总数；$[B]$ 为单元应变矩阵；$\{\sigma\}$ 为单元应力矢量。

以上根据计算的位移求应力的方法在某些情况下容易引起误差，尤其在角点或几何不规则变化区域。在杂交元法中，由于独立地假定应力分布，所以对于模拟应力自由面具有较高的精度[4]。

修正余能函数为：

$$\Pi_{mc} = \sum_{n} \left[\int_{V_n} \frac{1}{2} \left[(\{\Delta\sigma\}^T + \{\sigma_0\}^T)[D](\{\Delta\sigma\} + \{\sigma_0\}) \right] \mathrm{d}V \right.$$
$$\left. - \int_{S_n} \{\Delta T\}^T \{\Delta u\} \mathrm{d}S + \int_{S_{1n}} \{\Delta \overline{T}\}^T \{\Delta u\} \mathrm{d}S \right] \tag{12.6}$$

式中 $[D]$ 为弹性矩阵；$\{\Delta\sigma\}$ 为应力增量矢量；$\{\sigma_0\}$ 为初始或残余应力矢量；$\{\Delta T\}$ 为 S_n 上的边界力矢量；$\{\Delta\overline{T}\}$ 为边界 S_{1n} 上指定边界力矢量；S_n 为单元的全边界；$\{\Delta u\}$ 为边界位移矢量；V_n 为单元 n 的体积；n 为单元号。

单元内的应力增量分布 $\{\Delta\sigma\}$ 表示为

$$\{\Delta\sigma\} = [P]\{\Delta\beta\} \tag{12.7}$$

边界位移增量可以表示为节点位移 $\{\Delta q\}$ 的函数：

$$\{\Delta u\} = [L]\{\Delta q\} \tag{12.8}$$

$\{\Delta\beta\}$为广义参数；$[P]$和$[L]$分别为单元内应力和单元边界位移插值函数阵。边界力$\{\Delta T\}$可以表示为：

$$\{\Delta T\} = [R]\{\Delta\beta\} \tag{12.9}$$

其中 $[R] = [P]_{S_n}$

将式(12-7)、(12-8)和式(12-9)以及相应的导数代入方程式(12.6)可得：

$$\Pi_{mp} = \sum_n [\frac{1}{2}\{\Delta\beta\}^T[H]\{\Delta\beta\} + \{\Delta\beta\}^T\{N\} - \{\Delta\beta\}^T[G]\{\Delta q\} + \{\Delta q\}^T\{\Delta Q_n\} + c] \tag{12.10}$$

式中 $[H] = \int_{V_n}[P]^T[D][P]\mathrm{d}V$；$\{N\} = \int_{V_n}[P]^T[D]\{\sigma_0\}\mathrm{d}V$，$[G] = \int_{S_{2n}}[R]^T[L]\mathrm{d}S$；

$\{\Delta Q_n\} = \int_{S_{1n}}[L]^T\{\Delta\bar{T}\}\mathrm{d}S$

c为标量常数；S_{2n}为假定位移部分的边界。对式(12-10)求$\{\Delta\beta\}$的变分得：

$$\{\Delta\beta\} = [H]^{-1}([G]\{\Delta q\} - [N]) \tag{12.11}$$

将式(12.11)代入式(12.10)则

$$\Pi_{mp} = \sum_n\left(\frac{1}{2}\{\Delta q\}^T[k_n]\{\Delta q\} - \{\Delta q\}^T(\{\Delta Q_n\} + \{Q_n^0\})\right) \tag{12.12}$$

集合方程为：

$$[K]\{\Delta q\} = \{\Delta Q\} + \{Q^0\} \tag{12.13}$$

式中$[K]$为整体刚度矩阵。

单元刚度矩阵为：

$$[k_n] = [G]^T[H]^{-1}[G] \tag{12.14}$$

单元初始和残余应力荷载矢量为

$$\{Q_n^0\} = [G]^T[H]^{-1}[N] \tag{12.15}$$

应力自由面上的等价开挖荷载计算式为

$$\{F_0\} = \sum_{n=1}^{M}\{Q_n^0\} = \sum_{n=1}^{M}([G]^T[H]^{-1}(\int_{v_n}[P]^T[D]\{\sigma_0\}\mathrm{d}V)) \tag{12.16}$$

式中$\{\sigma_0\}$为开挖面计算应力矢量；M为开挖面上的单元数。

12.4.2 开挖速率对应力和位移的影响

在低渗透性粘土地基上开挖，由于大部分工程属临时性设施，在快速开挖后马上浇注混凝土底板并进行基础施工，土排水固结程度较小，一般可取不排水强度和变形参数进行分析。

对于施工周期较长的开挖工程可以采用文献[5]建议的方法确定土变形的上、下限值。具体做法是分别进行快、慢分析。快分析指开挖速度很快，低渗透性土在开挖期间不发生排水，这时采用的变形和强度参数根据不排水试验条件确定；慢分析指的是开挖速度很慢，土在开挖过程有充足的时间排水，这时采用排水条件下测定的参数。然后用以上两组参数分别对开挖做有限元分析得出快、慢分析结果。工程实测的位移和应力值应处在这两者之间。在开挖初期，实测结果与快分析相近；而在开挖后期，实测结果接近于慢分析的结果。张金荣和Duncan根据以上思想对BUENA VISTA抽水厂开挖工程做了分析，图12.23为快、慢分析结果和实测坑底回弹值的比较[5]，结论与上述分析是一致的。

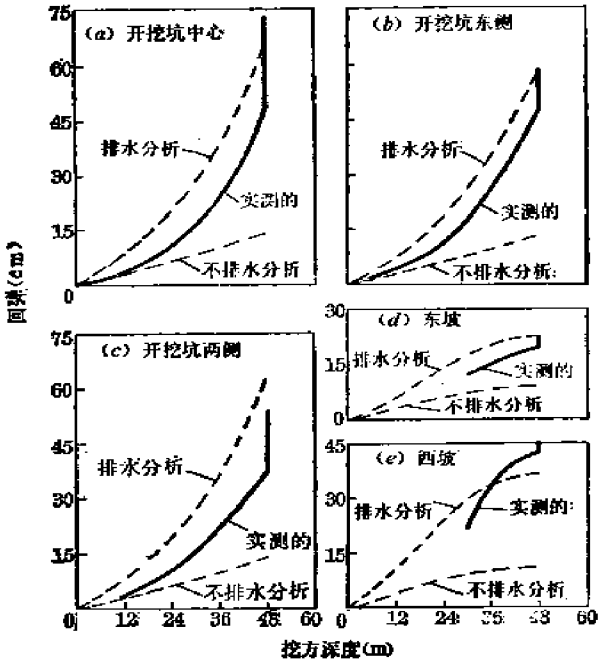


图 12.23 快、慢分析值和实测坑底回弹值

Osaimi 和 Clough[4] 利用 Biot 固结理论对开挖引起的孔隙水压力随时间变化的规律作了研究。孔隙水压力消散程度是通过比较任意时刻孔隙水压力与瞬时开挖条件下引起的孔隙压力来定义的。平均固结度为：

$$U=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i}{\sum_{i=1}^{n}P_{0i}} \tag{12.17}$$

式中 P_i——节点 i 在时刻 t 的孔隙压力；

P_{0i}——瞬时开挖引起节点 i 的孔隙压力；

n——节点总数。

图 12.24 为一维开挖的计算结果。可见：1. 随着开挖速度的提高，开挖结束时的固结度降低；2. 随着渗透系数的降低，开挖结束时的固结度降低。

图 12.25 为二维情形计算简图。图 12.26 为 $k=1\times10^{-8}$cm/s，开挖速度为 0.15 m/d 时开挖刚结束和开挖完成后 5000 天孔隙水压力等值线图。图 12.27 为开挖完成后固结度随时间的变化规律。可见，对低渗透性土，开挖完成后 10 天的固结度约为 10%；而在一维条件下固结度几乎为零，这是由于忽略了水平向排水引起的。在天然饱和粘土地基中常夹有水平向产状的粉细砂层，这往往成为良好的排水通道，因此在实际工程中开挖结束时固结度常超过 10%。

12.4.3 土应力-应变关系

软粘土的应力-应变关系不但具有非线性特点而且受应力路径的影响。在基坑开挖过程中，土体各区域应力路径是变化的，抓住几种主要的应力路径做适量的室内试验以模拟现场施工条件是有必要的。

用参数 α 定义应力路径

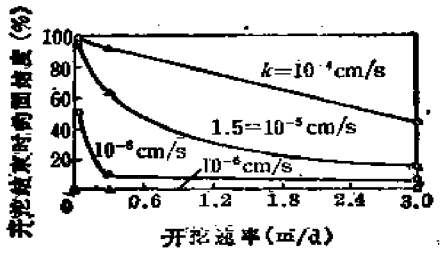


图 12.24 不同施工速率开挖结束时的固结度(一维)(根据文献[6])

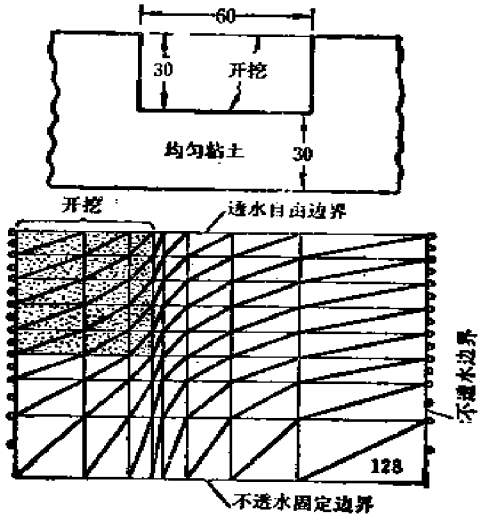


图 12.25 二维分析简图(根据文献[6])

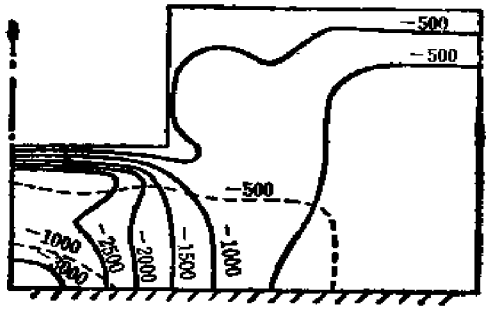


图 12.26 开挖结束时和 5000 天后无支撑开挖负孔隙水压力等值线图$k=1\times10^{-8}$cm/s(根据文献[6])
——开挖结束时;——开挖完成后5000天开挖速率 15 cm/d

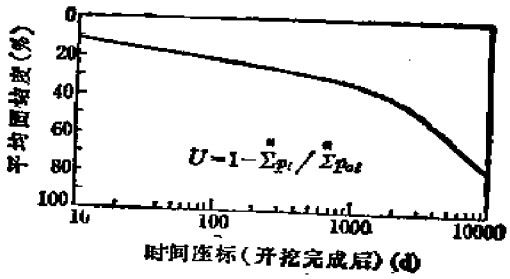


图 12.27 固结度和时间关系(根据文献[6])

$$\alpha=1-\frac{\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3} \tag{12.18}$$

式中 σ_1 和 σ_3 为三轴试验时的竖直及水平向应力。对杭州正常固结饱和粘土进行如图 12.28 所示的四种应力路径的固结不排水三轴试验。试验表明初始切线模量可以用下式表示:

$$E_i=\bar{E}_i\sigma_c' \tag{12.19}$$

式中 $\bar{E}_i$ 称为变形模数(无量纲)与 α 有关。

$\bar{E}_i$ 与 α 的关系见图 12.29,可见四种应力路径的 $\bar{E}_i$ 落在同一直线上,而且不同路径的 $\bar{E}_i$ 数值相差较大,不可忽略。由此将开挖区域分为二部分,分别用一种典型的应力路径表示,如图 12.30,在室内进行模拟试验,以测得相应的参数。

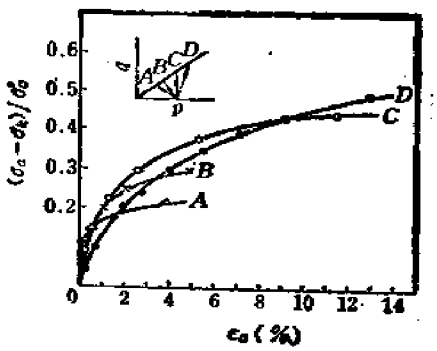


图 12.28 四种应力路径归一化应力-应变曲线

大量的试验表明,正常固结饱和粘土的应力应变曲线可以按双曲线拟合并且可以按某些参数加以归一,故对图 12.30 中的路径 F 和 B 分别可以推出切线模量公式[7]:

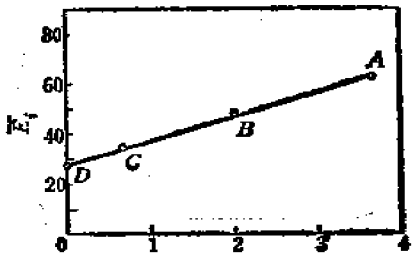


图 12.29　四种应力路径的 $\bar{E}_t$ 与 α 关系

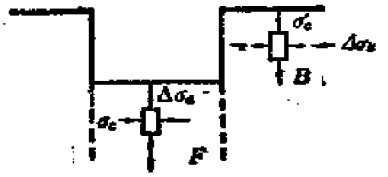


图 12.30　基坑开挖过程中典型的应力路径

$$E_{tF}=\bar{E}_{tF}\,\sigma_c'(1-R_fS)^2 \tag{12.20a}$$

$$E_{tB}=2\nu_t\,\bar{E}_{tB}\,\sigma_c'(1-R_fS)^2 \tag{12.20b}$$

其中 $\bar{E}_{tF}$ 和 $\bar{E}_{tB}$ 分别为应力路径 F 和 B 情况下，归一化应力-应变曲线的初始切线斜率；S 为剪应力水平；R_f 为破坏比。

12.4.4　工程实例[7]

杭州市于1985年筹建的友好饭店总高66 m，根据设计，地基开挖深度为7.0 m，开挖区平面为30×60 m² 长方形，见图12.31。基坑三面紧靠闹区的三条街道，另一面紧靠一幢五层民房，最近处离坑边仅2.0 m。基坑用钢板桩围护。

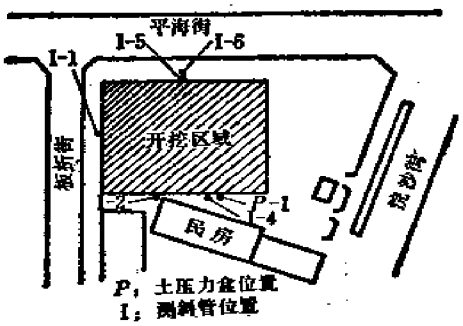


图 12.31　现场平面图

一、土质条件和现场仪器的布置

现场土层属滨海湖相沉积土，大致可以分为四层，其基本物理力学参数列于表(12.3)。第四层以下为风化岩石，计算时假设其位移为零。

表 12-3　土的基本物理力学性质

层　数	深　度 (m)	容　重 (10^2kg/m³)	孔隙比 e	界限含水量 w_L(%)	界限含水量 w_P(%)	塑性指数 I_P	十字板强度 τ_f(kPa)
	0						
1	4.5	18.6	—	—	—	—	37.6
2	15.1	17.6	1.13	37.5	18.5	19.0	24.0
3	27.3	19.1	0.76	41.0	20.6	20.4	50.0
4	34.6	15.9	1.48	48.6	37.0	11.6	—

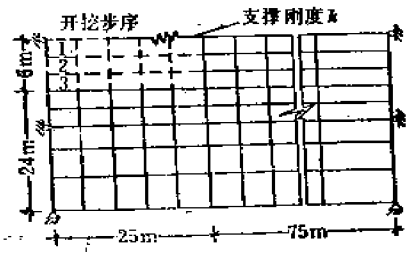


图 12.32　分析中的几何及边界条件

现场一共布置了六根测斜管，其长度为19 m到20 m不等，具体位置见图12.31。另外，在邻近孔1-4处布置了5个土压力盒。

二、有限元数值研究

图12.32为计算简图，开挖深度为6.0 m。分三次进行。假定土为非线性弹性材料，本构关系按式(12-20)采用，计算参数列于表12-2。其中 EI 为板桩刚度；$\bar{K}$ 为支撑刚度；D 为板桩插入深度；$\rho=1.50\times10^3$kg/m³，

表 12-4 有限元分析参数

算 例	$\bar{E}_t$	EI	$\bar{K}$	D
1*	$\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$\bar{K}_r$	D_r
2	$\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$\bar{K}_r$	$0.75D_r$
3	$\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$\bar{K}_r$	$1.25D_r$
4	$\bar{E}_{tr}$	$0.5(EI)_r$	$\bar{K}_r$	D_r
5	$\bar{E}_{tr}$	$8(EI)_r$	$\bar{K}_r$	D_r
6	$\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$0.5\bar{K}_r$	D_r
7	$\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$2\bar{K}_r$	D_r
8	$2\bar{E}_{tr}$	$(EI)_r$	$\bar{K}_r$	D_r

表中参考算例如下(有*者):
$\bar{E}_{tr}=150.0$, $D_r=8.0$ m, $\bar{K}_r=2.5\times10^3$kN/m, $(EI)_r=4.0\times10^4$kN·m²。

$c=0.0$; $\varphi=30°$。

计算结果讨论:

表 12-4 中的算例 2 和 3, D 分别为 6.0 m 和 10.0 m, 其它参数值相同。从图 12.33 可见这两个算例虽然插入深度不同, 但在公共部分侧向位移和弯矩没有明显差别。这说明如果板桩插入深度满足最小值的要求, 企图以增加板桩插入深度来减小侧向位移是徒劳的。

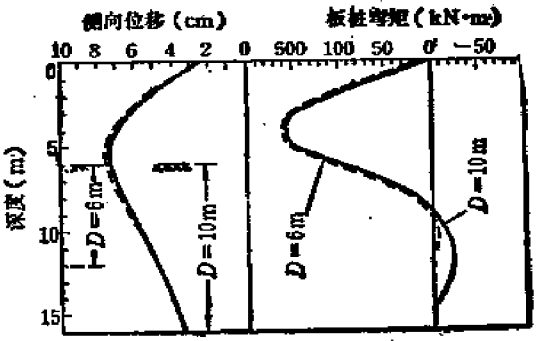


图 12.33 插入深度对板桩侧向位移和弯矩的影响

表 12-4 中的算例 4 和 5, 见图 12.34 算例 5 中的板桩刚度为算例 4 的 16 倍。算例 4 的最大弯矩约为 120 kN·m, 而算例 5 则为 260 kN·m, 最大侧向位移只减少了约 2 cm。因此, 增加板桩刚度只能一定程度地控制侧向位移, 但由此将引起弯矩的显著增加。

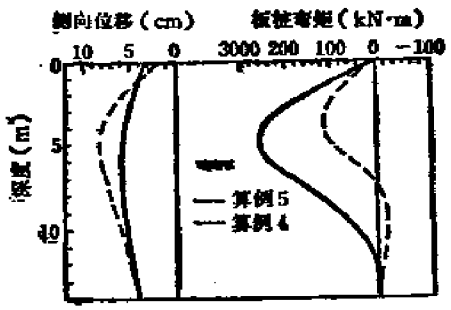


图 12.34 板桩刚度对侧向位移和弯矩的影响

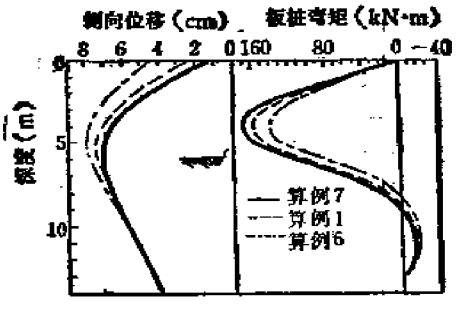


图 12.35 支撑刚度对侧向位移和弯矩的影响

表 12-2 中的算例 6 和 7, 见图 12.35, 算例 7, 算例 1 和算例 6 中的支撑刚度各相差一倍。显然, 增加顶部支撑刚度对于减小板桩上部侧向位移效果是显著的, 但对插入部分作用不大。

由以上讨论可见，为使基坑开挖达到技术上和经济上的最优选择，合理地选取板桩插入深度和刚度是非常重要的。

三、分析与现场实测结果的比较

孔-1，4，5，6 侧向位移的实测值和计算值绘于图 12.36。从图中可见孔-1，5，6 的结果是令人满意的。而孔-4 的实测值明显大于计算值，这是由于孔-4 离民房较近，而计算没有计及该楼传来的荷载。

墙背土压力观察的结果与计算值接近的程度是令人满意的，见图 12.37。靠近上部实测值小于计算值，可能是由于靠近地面土体受施工扰动影响引起的。

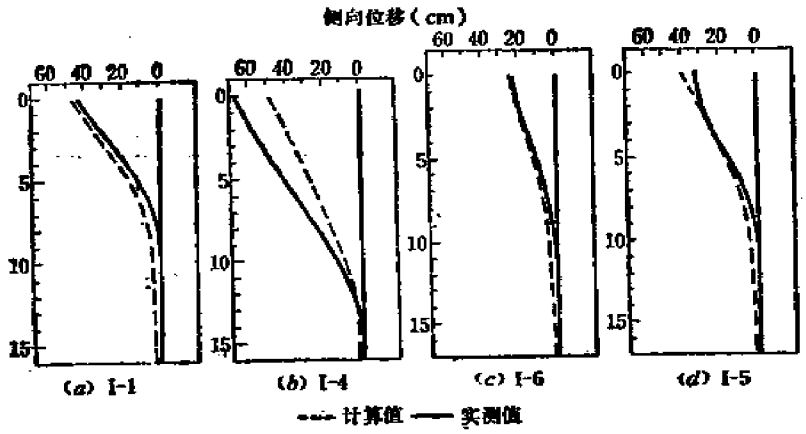


图 12.36 计算和实测的侧向位移

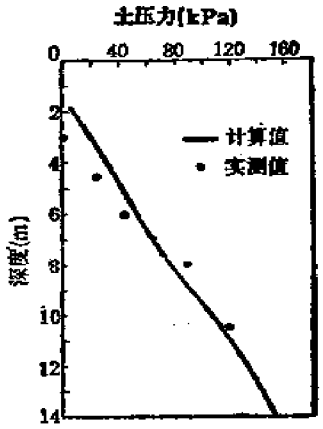


图12.37 计算和实测土压力值(*I*-4)

参 考 文 献

1. Desai C. S., and Sargand S., Hybrid FE Procedure for soil-structure interaction, J. of Geotech.Engg. Div. Vol. 110, No.4, 1984.
2. Osaimi A.E.and Clough G.W.,Pore Pressure dissipatiou during excayation, J. of Geotech. Engg. Div., Vol.105, No.GT4, 1979.
3. 曾国熙，潘秋元，胡一峰，软粘土地基基坑开挖的性状，岩土工程学报，Vol.10, No.3, 1988.
4. 周知行，盾构法隧道考虑固结效应的综合分析，同济大学硕士研究生毕业论文，1986.
5. Rowe R.K., Lo K.Y.,Kack G.J., A method of estimating surface setteement above tunnels constructed in soft ground CAN.GEOTECH.J.Vol.20, 1983.
6. Rowe R.K.and Kack G.J., A theore tical examination of settelemenfs induced by tunnelling: four case historids, CAN.GEOTECH. J. vol. 20, 1983.
7. 杨顺杰，大深度圆形地下连续墙的有限元分析，冶金建筑研究总院硕士学位论文，1988.
8. Clough G W. and Mana A.I., Lessons learned in Finite Element analysis of temporary excavation, Proc. 2nd Int.Conf.on Num. Methods in Geomech., ASCE, Blackburg.

第十三章 土 坝

13.1 概述

本章介绍土石坝，尾矿坝及围堰的数值分析方法。这些土工建筑的共同特点是挡水或水土混合物。水的作用，包括表面水压力及内部渗透力，是不可忽视的因素。它们的破坏往往给下游带来很大的社会和经济损失，因而对重要的建筑物有必要进行仔细的分析计算。破坏的原因往往与水的作用分不开，渗流控制与分析是设计中应注意的重要方面。

就水的作用方式的不同，这类建筑物又可分为(图 13.1)：

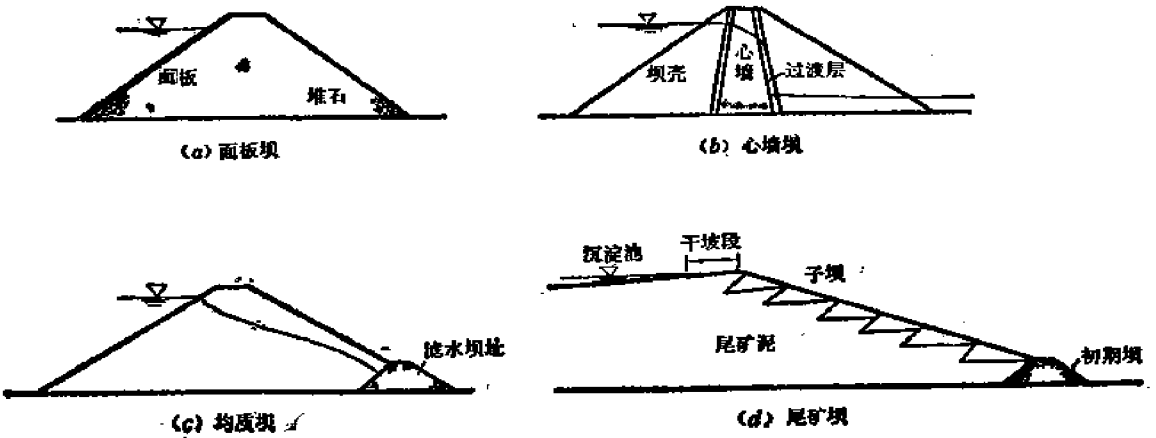


图 13.1 各种土坝

1. 面板防渗坝——水的作用限于面板表面的水压力；
2. 心墙坝——除了心墙表面的水压力外上游坝壳还受到浮托力及浸水软化影响；
3. 均质坝——上、下游坝坡的渗透力是影响变形和破坏的主要因素；
4. 尾矿坝及灰坝——以下游坝坡的渗透力为主。

土坝的变形计算必须模拟施工填筑过程。这除了考虑土的应力应变关系的非线性而需用增量法计算外，还因为土中变位的量测需待填好并埋上标点以后才能进行，而刚填好的点的变位必然为零，故土坝竣工时的沉降一般中间最大，坝底和坝顶均为零。只有采用计算域随填筑过程逐步增大的办法才能得到这样的计算结果。但与其它填方工程不同，土坝的变形计算必须按施工期和蓄水期分别考虑，因为两个阶段的变形特性有明显不同。尤其是心墙坝，前一阶段只有自重应力，应力变化规律是大、小主应力同步增加，主应力方向也大体上不变；后一阶段在水的作用下，心墙坝上游坝壳中小主应力明显降低，大主应力也往往有所降低，故应力路线发生明显转折，随之会出现局部的破坏区，同时主应力方向也有一定的偏转。图 13.2 是一个心墙坝式的模型坝的试验结果，说明两个阶段坝体应力分布的变化趋势。图 13.3 a 和 b 是针对面板坝和心墙坝两种典型断面的计算结果，显示两个阶段应力路线变化的不同特点[1-2-3]。

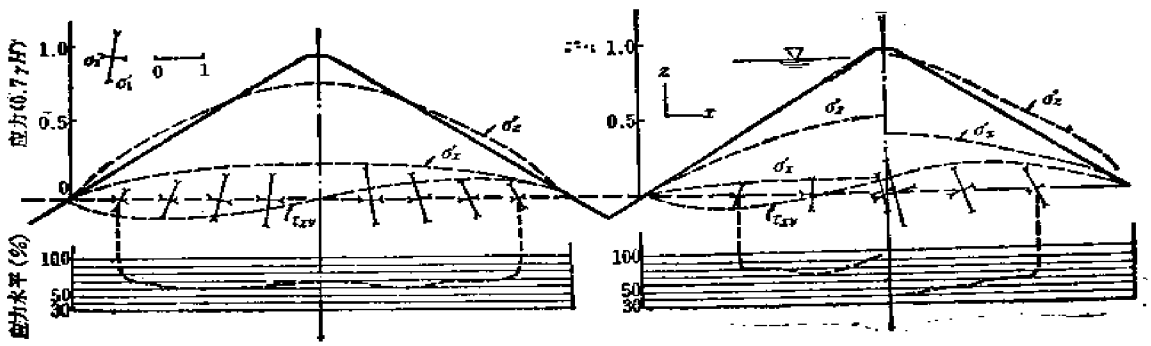


图 13.2 模型坝实测结果

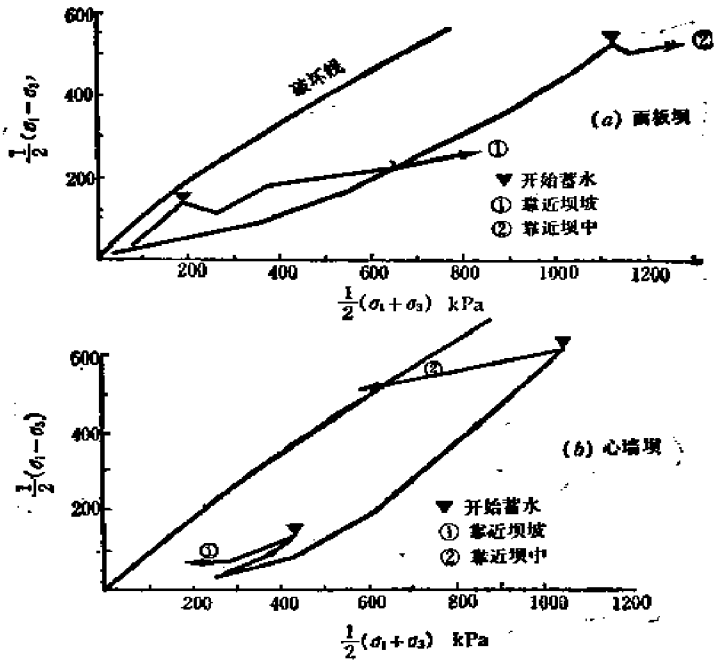
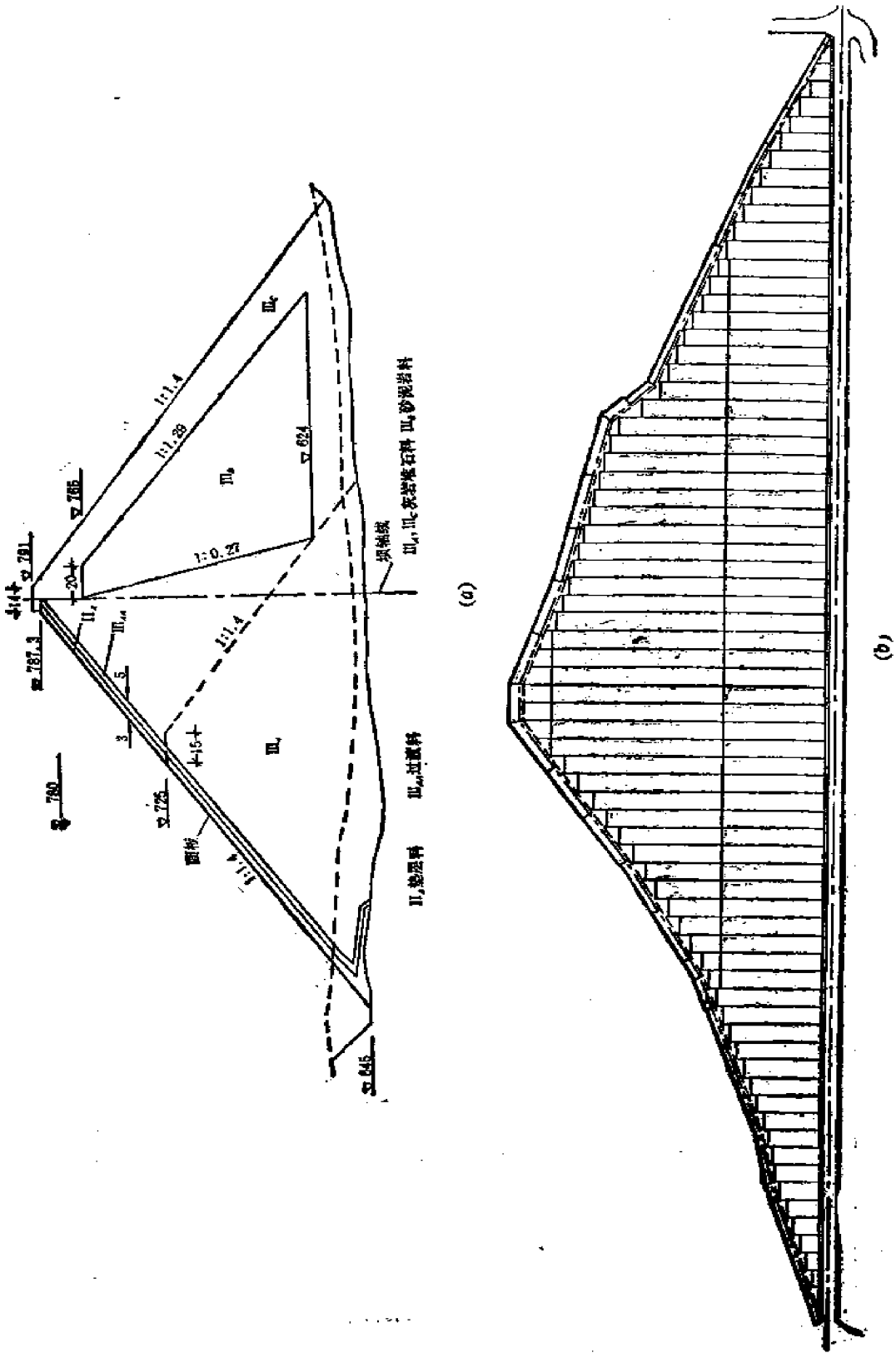


图 13.3 上游坝坡典型部位应力路线

在土坝的固结计算中应注意不要搬用地基中的超静孔隙压力的概念。这里上、下游水位不同，而且都随时间变化，不存在可以作为基准的不变的静孔隙压力。把稳定渗流算得的孔隙压力场当作静孔隙压力当然是可以的，但这样区分无助于简化计算分析工作，有时反而会带来概念上的混乱。与此同时，计算中所用的变量应采用包括孔隙压力水头和重力水头在内的总孔隙水头。尽管固结方程是二阶偏微分方程，重力水头 $\rho_w gz$ 经二次微分后不出现在方程式本身中，但其边界条件却不可避免地要受重力水头的影响。

土坝的边坡稳定分析必须考虑渗流的作用。其考虑途径有二。一是人为地把饱和土体分为水体和无水的只有浮容重的骨架，然后把水体拿掉，只分析骨架的稳定，并把水体对骨架的作用力按渗透力(体积力)考虑。二是把滑动面所包围的整个土体作为脱离体进行分析，孔隙压力只是不动土体对滑动土体的反作用力的一部分加在滑动面上。与人为地把孔隙压力分为静和超静两部分一样，把饱和土体人为地分成水体和减去水体的剩余部分，也往往反而把问题复杂化。浮容重的概念只适用一种简化的考虑水位突降的土坡稳定分析方



■ 13.4　云南天生桥混凝土面板坝

法，即对高水位和降低后水位之间的土体用饱和容重算滑动力，而用浮容重算抗滑力。除此以外的一般情况，最好不要使用它。

高坝一般修建在狭谷中。严格地说应按三维问题分析，但是根据文献 [4] 的分析结果，如果河谷的坡度小于1:3，则在最大坝高处切一横断面，按平面应变分析是足够精确的。纵向也可以切一断面按平面应变分析来研究河谷形状的影响。根据张文正等人的分析[5]，即使对河谷岸坡接近于1:1的鲁布革坝，三维分析得出的最大应力与最大沉降分别为二维分析的75% 和80% 左右，可见，二维分析的误差也不是很大。当然，对于某些形状特殊的河谷，例如很狭的河谷或宽河谷中有一处特殊的深槽时，三维计算就十分必要了。下面主要介绍二维分析方法。

13.2 混凝土面板坝

13.2.1 工作特点

面板材料一般由钢筋混凝土或沥青混凝土构成，坝体则一般由石料（块石或砂卵石）堆积而成。这种坝型中面板只是一种防渗体，其厚度只有几十厘米，坝前几十米到100多米水深的巨大水压力主要由坝体承受（图13.4 *a*）。这种坝的施工方案是先分层填筑压实堆石体，然后再浇面板。面板下面一般布置有几米厚压实良好的填层。面板在横断面上是整体浇筑的，底端通过止水缝与支座连接，在纵向则每隔十几米留有施工缝（图13.4 *b*）。沥青混凝土面板则不留缝。

早期修建的面板坝常因堆石料压实不够使坝体变形过大而导致面板开裂，因而所修的坝比较低，而且常用柔性较大的沥青混凝土面板。随着重型压实机械的发展，钢筋混凝土面板坝越来越受到重视，坝高也已增大到150米以上。显然，对这种坝的分析计算主要应针对面板与坝体在水荷载作用下的变形不协调问题。

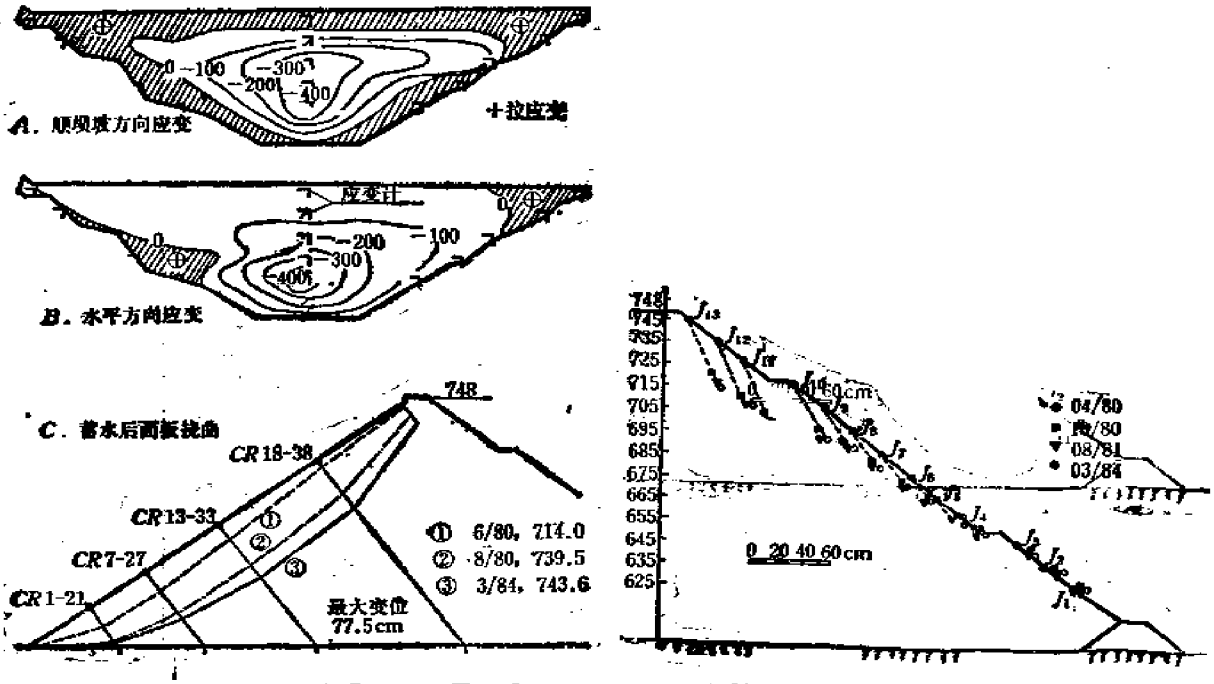
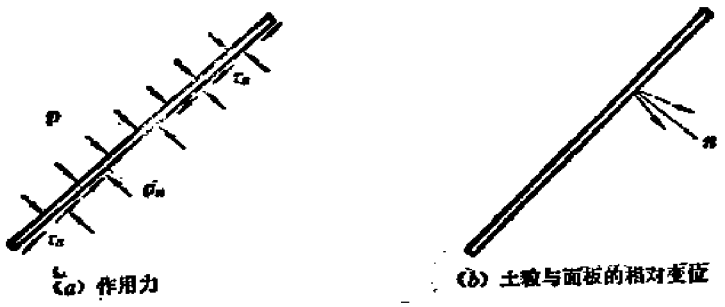


图 13.5 巴西 Foz Do Area 面板坝(160米)的观测结果

13.2.2 应力应变分析

由于水压力只是以外力形式作用在面板上，这种坝的工作条件相对地比较简单，从施工到蓄水期的应力路线变化也不大(图 13.3 *a*)。照理说，用现有的非线性方法计算这类问题，似乎不会有问题。但实际试算表明，事情并不那么简单。计算结果面板中出现大片拉应力区，与实测的拉应力区局限于周边部分的分布规律完全不符(图 13.5 *a*)，与此相应，背水坡上结点的计算变位也与实际不符 (图 13.5 *d*)[6,7]。为了弄清其原因，不妨取面板为脱离体分析其受力情况。此时面板上只受水压力、填层的法向力 σ_n 及切向摩阻力 τ_s (图 13.6 *a*)。观测表明，面板主要是中心拉压构件，弯曲应力相对不大，因此，控制面板上应力分布应是石料对面板的摩阻力 τ_s。与图 13.5 *a* 应力分布相应的摩阻力分布如图 13.6 *a* 所示。显然，要得到如此的摩阻力分布，只有面板的中上部底下的石料颗粒作如图 13.6 *b* 中实线方向的变位才可能，如果计算的颗粒变位如图中虚线所示，必然会得出不合理的应力分布。至于面板两端的拉应力，显然与水压力作用下两端底下的颗粒向两侧挤出有关。



(a) 作用力　　(b) 土粒与面板的相对变位

图 13.6　面板受力分析

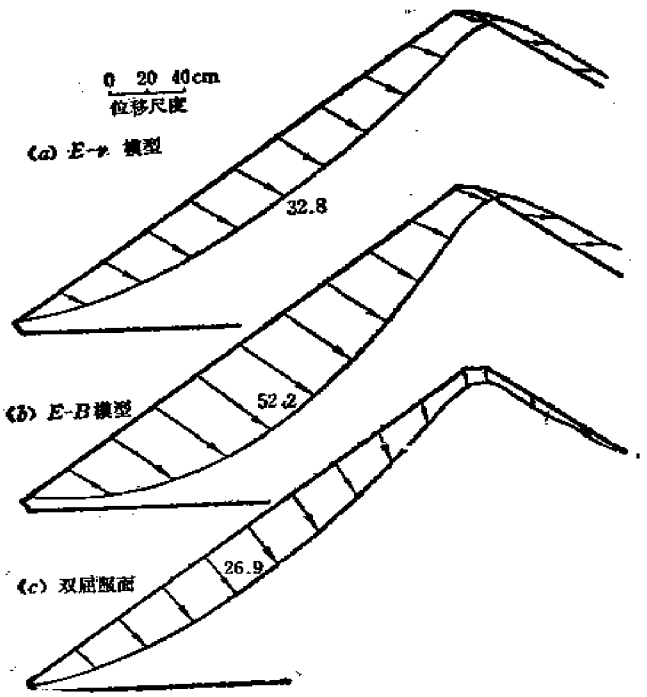


图 13.7　蓄水引起的坝面和下游坡变位

在上述分析基础上，沈珠江认为在面板坝设计中应放弃非线性模型而改用可以考虑堆石料剪缩特性和自重应力的大主应力方向的弹塑性模型[2]。由于受压时棱角破坏，堆石料的剪缩特性十分明显，而且由于自重下的大主应力方向基本上是向下的，这两个因素都使水压力作用下的颗粒位移除水平向下游外，垂直向有明显的向下趋势。而这两点只有选用合适的弹塑性模型才能模拟。图 13.7 是应用三种应力应变模型对一座理想面板坝的计算结果。其中 I 和 II 为邓肯的 E_t, ν_t 模型(3.2.1)和 E_t、B_t 模型，而 III 为沈珠江建议的双屈服面弹塑性模型 (3.2.2)。把此图与图 13.5 比较可见，无论是面板中应力分布还是面板及下游坡的变位，弹塑性模型的计算结果明显地比较合理。

关于面板与填层接触面之间设置接触单元的必要性问题，需要根据施工情况具体分析。如果填层铺好后上面先浇一层乳化沥青等覆盖层，然后再浇面板，则在面板与垫层之间夹有一层刚度较低的薄层，需要设置接触单元模拟。接触单元可用无厚度的所谓 Goodman 单元(见第五章)，也可用一定厚度的实体薄单元。但是一般情况下混凝土直接浇在填层上，两者之间不存在容易滑动的薄弱环节，就不需要另外设置接触单元。当然，由于混凝土与堆石体之间刚度相差悬殊，接触面附近的应力和变形梯度必然很大，需要布置一些较薄单元逐步过渡。

13.2.3 动力分析

面板坝的动力分析可用第七章介绍的等价线性分析法进行。这种坝的抗震性能是比较好的，到目前为止，还没有地震引起严重破坏的事例报道。可以设想，地震对面板坝的破坏表现在两个方面。一是地震期间瞬时动应力是否会使面板断裂；二是地震造成的坝体残余变形是否会使面板内的应力进一步增大而引起拉裂或压裂。

前面提过，面板在静力荷载下主要受压，只有周边一圈有一定拉应力。由于面板实际上是自由斜卧在坝面上的，地震荷载在周边缝处造成很大拉应力而导致面板断裂的可能性是很小的。因此，通过一般的动力分析，计算面板中动应力过程的方法似乎没有多大的实际意义。

地震引起的残余变形主要表现在坝体下沉，从而使面板进一步受压。此时，如果河谷坡上有坚硬突出的岩石，可能会使面板下端压裂。已有的观测记录表明，强震可造成几十厘米的附加沉降[8]。有关地震变形的计算方法尚在探索之中。

13.2.4 其它分析

面板堆石坝一般毋须进行渗流分析。至于边坡的极限分析，由于高压和低压下石料的强度特性有明显的不同，强度包线不宜再简化成直线，现有的土坡稳定分析方法宜作适当修正，例如象式(3.36)那样考虑内摩擦角随 σ_3 而变，或用下列幂曲线拟合强度包线。

$$\tau_f = a\sigma_n^b \tag{13.1}$$

文献 [9] 建议了一种类似的分析方法。但是，这种坝从未发生过滑坡问题，进行这样的分析必要性不大。

13.3 混凝土防渗墙坝

13.3.1 工作特点

这种坝的施工特点是先建坝体，然后再从坝顶上往下打垂直混凝土防渗墙，常用于下列三种情况：(1)老坝(均质坝或土质心墙坝)的改建；(2) 围堰(先在水中抛填砂砾料作堰体)；

(3)截断坝基深厚砂砾石层，上部再修土质心墙坝（图 13.8）。如果不计两边相等的静止土压力，则墙身受到的外力不外乎两种，即水平的水压力和侧面的摩阻力。前者的作用使墙成为受弯构件，后者作用则使它成为受压或偏心受压构件。上述三种情况中，两种力比例各不相同。情况(1)中墙主要承受水平力，如果坝身还要加高，当然也会受到老坝体压缩引起的摩阻力。情况(2)中由于下游基坑中抽水，下游堰体将因浮托力（孔隙压力）降低而下沉，墙的下游侧面会受到一定的向下摩阻力，此外，如果墙体施工时上游水位低，则当水位升高时上游堰体将会略有上浮而引起墙上游面的向上摩阻力。情况（3）中则因坝基土层受到巨大的坝身压力而下沉，故墙的两侧都受向下摩阻力，水压力的作用相对不大。



图 13.8 混凝土防渗墙的应用

13.3.2 分析要点

这种坝型的分析重点在于研究墙身与坝体的共同作用，因此，下面的介绍限于应力应变分析，其它方面的分析可以参照其它坝型进行。

(1) 施工过程模拟

墙身的施工过程是先在已填坝体中打孔，用泥浆维持孔壁稳定，然后在孔中放入钢筋，由下往上浇混凝土。计算中要完全模拟成孔和浇筑过程是很困难的。目前常用的方法是改变墙身单元的模量参数，即预定筑墙的单元先按土考虑，模拟分层填筑过程进行计算，直到预定筑墙的时刻重新输入计算参数，把土的模量参数修改为混凝土的。

(2) 墙身单元划分

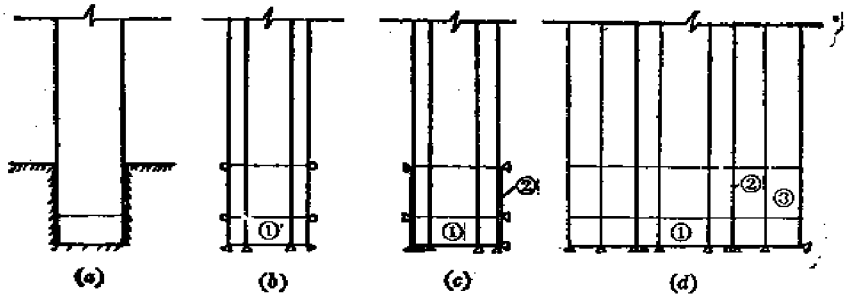
混凝土防渗墙的厚度一般只有 80 cm，与坝高相比，是细长的杆件。墙身最好划成四边形单元，如果采用 8 结点等参单元，墙沿厚度方向只需一个单元就可以了。但对土体来说，采用 4 结点等参单元更合适一些。此时，在厚度方向宜划成三排单元，以了解沿厚度方向的应力变化规律。中间一排最好厚一些，例如三排单元厚度分别为 10、60 和 10 cm。单元的长度则根据土体中划分单元的需要而定。

(3) 接触单元

由于打孔时采用泥浆护壁，墙的表面会残留一些泥浆，使接触面的抗滑强度低于周围土体。根据有限的试验资料，含泥接触面的摩擦角可比周围砂土的内摩擦角小 10°，因此，有必要在土与墙之间设置一层接触单元，可用无厚度单元或厚度 1 cm 左右的薄单元。

(4) 基岩嵌入端处理

防渗墙的底端一般深入基岩 1 米左右（图 13.9），如果把基岩当作刚性体，防渗墙刚性地嵌固在基岩中，底端的计算应力往往会异常地大。王复来等对图 13.8 c 类型的基础防渗墙计算发现，这样算出的墙身的压应力愈到底下愈大，而且大大超过混凝土的抗压强度[16]。实测资料表明墙身的压应力并不很大，而且接近底端又逐渐降低。考虑到实际施工中基岩槽孔底部会残留一些岩石碎屑，他们建议在墙底设置高为 10～20 cm 模量较低的沉渣单元，计算结果就比较合乎实际(图 13.9 b)。但是当墙承受较大水平荷载时，由于底端仍有一嵌



(a) (b) (c) (d)

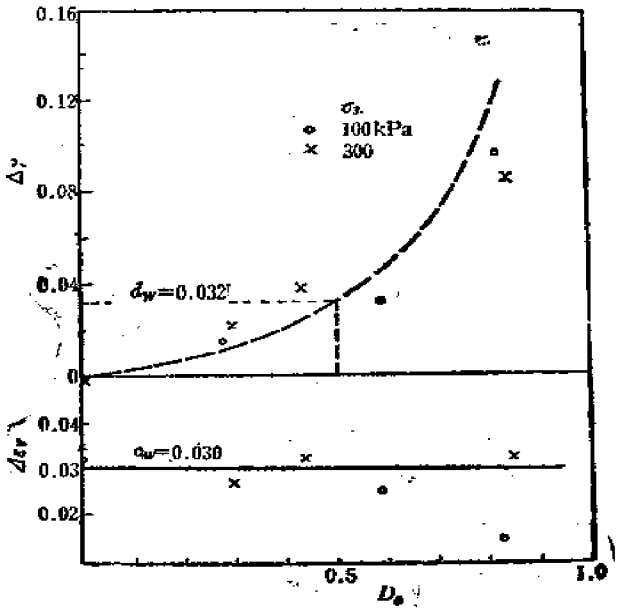


图 13.11 三轴浸水试验结果

式中 $D_s=(\sigma_1-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 为浸水时的剪应力水平，c_w 和 d_w 为两个系数，典型的结果如图 13.11。由于单线法试验要求控制轴向应力不变比较难做，尤其在大型三轴仪中，作为变通办法，建议体积应变 c_w 在压缩仪中测定，大主应变仍如图 13.10 左边按双线法计算。假定两条应力应变曲线均为双曲线，其起始切线模量 E_i 一致，其强度比为 $R_w=\dfrac{(\sigma_1-\sigma_3)_{fw}}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}$，则浸水引起的大主应变增量可按下式计算

$$\Delta\varepsilon_1=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{E_i}\left(\frac{1}{1-D_s/R_w}-\frac{1}{1-D_s}\right) \tag{13.4}$$

上述湿化应变可以化作下列初应变 $\{\Delta\varepsilon^0\}$ 引入有限元计算中

$$\{\Delta\varepsilon^0\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_v+\dfrac{\sigma_x-\sigma_z}{\sigma_1-\sigma_3}\left(\Delta\varepsilon_1-\dfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_v\right)\\ \dfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_v-\dfrac{\sigma_x-\sigma_z}{\sigma_1-\sigma_3}\left(\Delta\varepsilon_1-\dfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_v\right)\\ \dfrac{2\tau_{xz}}{\sigma_1-\sigma_3}\left(\Delta\varepsilon_1-\dfrac{1}{2}\Delta\varepsilon_v\right)\end{Bmatrix} \tag{13.5}$$

13.3.4 计算程序

本节介绍几个适用于上述两种坝型分析的总应力法应力应变计算程序。

(1) FEADAM 程序

本程序系由美国加州大学 Berkley 分校 J.M. Duncan 等人所编。初编于 1980 年，后来于 1984 年在加荷-卸荷处理上作了进一步修改[15]。该程序有下列一些特点：

(i) 采用四边形单元，但单元形态除 4 个角点外还增加内部自由度(见 6.4 中不相容单元)；

(ii) 结点坐标和单元的 4 个结点号人工输入，但对某些有规则排列的结点允许只输入直线的两端点坐标，中间结点等间距内插；而一串有规则的单元可只输入第一个单元的 4 个

结点号，相继单元的结点号以前一单元结点号加1推算；

(iii) 不设置无厚度接触单元；

(iv) 除自重外，水载荷或其它结点荷载人工输入；

(v) 采用中点增量法计算，即每级增量第一次试算后根据该级应力增量一半处的应力状态计算切线模量 E_t 和 B_t，再进行第二次计算。

(2) TOSS 程序

该程序系沈珠江根据 FEADAM 程序的思想改编，开始也采用 Duncan 的 $E\sim B$ 模型，但后来改用双屈服面弹塑性模型（见 3.2.2）。与 FEADAN 程序相比，还有下列不同之处[16]：

(i) 只用4结点四边形单元；

(ii) 用半自动划分单元的办法，即从坝体中划出几个形状规则的大块，输入少量信息自动划分单元和形成结点坐标，不规则处仍人工输入结点坐标和单元结点号；

(iii) 把坝体划分成上、中、下三部分，采用子结构法分块求解；

(iv) 水荷载根据荷载结点及蓄水位自动计算；

(v) 增加了浸水变形的计算功能，如式(13.4)。

该程序的应用实例见图 13.7。

(3) STST 程序

该程序最早由北京大学力学系和水电部西北设计院共同编成，采用 Duncan-张金荣的 $E\sim\nu$ 模型。与前面两个程序相比，主要不同之处有[17]：

(i) 设置了 Goodman 无厚度接触单元，假定接触面的剪应力与相对位移曲线也为双曲线；

(ii) 坝体中的混凝土构件屈服以后的模量降低。

该程序的应用实例见文献[10]。国内还有一些单位编过类似的程序。

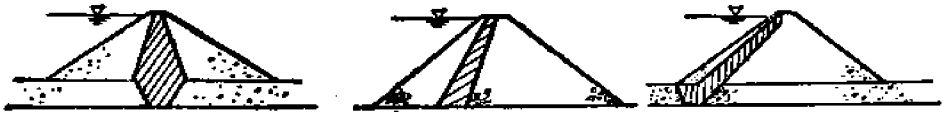
13.4 土质心墙坝

13.4.1 工作特点

这种坝又可细分直心墙坝、斜心墙坝和斜墙坝三种。心墙两侧一般设置过渡层和反滤层（图 13.12）。现代建设的 100 米以上的高土石坝大都为直心墙和斜心墙坝，对这种坝的分析研究仍是土石坝研究的核心课题。

高坝坝壳由压实良好的堆石或砂卵石组成，一般不存在坝坡稳定问题，只有斜墙坝，当水库水位突降时有可能沿斜墙中部或表面发生滑坡。由于心墙与坝壳刚度不同而致变形不协调，使心墙产生裂缝，是这类坝首先需要研究的问题。一般心墙的刚度明显低于坝壳，存在心墙应力向两边坝壳转移的拱作用问题。当坝壳压实不够或坝壳由容易产生浸水变形的风化料组成时，坝壳的过量下沉也会使心墙产生裂缝。对于这类纵向裂缝，可以通过横断面的应力应变分析进行研究。当河谷很狭或有深槽时，会产生纵向的拱作用问题，严重时使坝顶开裂。此时可切一纵断面进行分析，当然最好进行三维分析(图 13.13)。

填筑含水量和孔隙压力的发展是另一个需要分析研究的问题。含水量较低的填土难以压实，而且脆性大，更易裂缝。含水量高的填土则会发生太高的孔隙压力，心墙中将出现较大的破坏区，斜墙坝还会引起上游坡的抗滑稳定问题。合理的办法是在不同的应力区中控



(a) 心墙坝　(b) 斜心墙坝　(c) 斜墙坝

图 13.12 土质防渗体坝

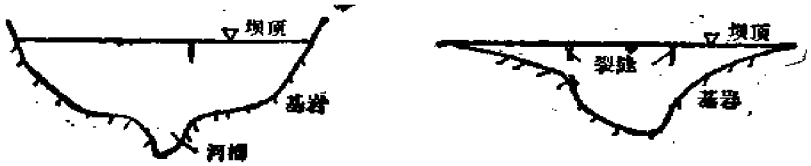


图 13.13 纵断面上横向裂缝

制不同的含水量，这样的设计只有通过固结计算和有效应力分析才能做到。

设计良好的高土石坝不存在地震稳定问题，强震引起的可能破坏形式是坝壳沉降和心墙开裂，有关这个问题的分析方法尚在探索之中。如果坝壳为砂或砂砾料，而且含有较多的细粒土，则坝壳的地震液化是一个需要研究的重大问题。

13.4.2 总应力分析

纵断面的总应力分析除必需模拟分层填筑的施工过程外，无任何特别需要讨论的地方。故不再介绍。横断面的分析情况更简单，可用前面混凝土心墙坝同样的方法和程序进行，目前已有不少人作过大量的计算。主要的结果可以归结如下：

(1) 施工期分析

(i) 施工期沉降和位移可用简单的线弹性模型并根据单向压缩试验测定压缩系数推算的变形模量进行计算。如采用较复杂的非线性模型(如 Duncan-张金荣模型) 和弹塑性模型，结果并不见得更好[18,19]，多数情况下 Duncan-张金荣模型的计算结果偏大。

(ii) 为了减少心墙中的拱作用，心墙不宜过薄，并且最好用斜心墙[20]。

(2) 蓄水期分析

尽管有不少人进行各种尝试，但适用于蓄水期的计算模型和计算方法还没有很好解决。前面已经讲过，蓄水期将遇到 σ_3 减小，应力路线转折和主应力方向偏转问题，常用的 Duncan-张金荣模型无法考虑这些因素。少量计算与实例对比表明，计算的水平位移一般偏大较多，而且上游坝壳中的应力分布往往不合理[11]。

13.4.3 固结和有效应力分析

应用 Biot 固结理论进行土质心墙坝的有效应力应变分析始于Зарецкий[21] 和 Duncan J.M.[22]。国内则由南京水科院首先进行[23]。但是，象总应力分析一样，由于适用于蓄水期计算的模型尚未很好解决，国外还没有新的进展。国内沈珠江等应用了新的弹塑性模型进行研究，取得了较好的结果。下面介绍这方面的成果，计算所用的应力应变模型及 Biot 固结理论的解法见第 3 章和第 6 章有关内容。

土质防渗墙一般在土的含水量接近最优含水量情况下填筑，压实以后土的饱和度在 90% 左右，这时孔隙气将以小气泡形式封闭在孔隙水中，并且随孔隙水一起运动。因此，计算中可以把这含气水当作单一的可压缩流体看待，采用类似饱和土的方法进行分析，这样一

种假设称为拟饱和土理论。

其次，填筑过程中随着上复荷重的加大，土体所受总应力和孔隙压力也逐步加大，孔隙气泡受压逐渐变小，部分并溶解于孔隙水中。当孔隙压力增加到一定值以后，全部溶解于水中，土体就变成完全的饱和土。饱和度的这样变化过程可用下列 Hilf 公式计算[24]

$$s=\frac{(p_w+p_a)s_0}{p_a+p_w s_0(1-c_h)} \tag{13.6}$$

其中 s_0 为填筑时($p_w=0$)的初始饱和度，c_h 为亨利溶解系数，20°C 时为 0.02。对于饱和度为 s 的含气水的压缩系数。Fredlund 推导了下列公式[25]

$$\beta=s\beta_w+B_{aw}\frac{(1-s)}{p_a+p_{aw}}+B_{aw}\frac{c_h s}{p_a+p_{aw}} \tag{13.7}$$

其中无气水的压缩系数 $\beta_w=4.7\times10^{-5}$/kPa，p_{aw} 为气泡中的孔隙气压力，$B_{aw}=\frac{\mathrm{d}p_{aw}}{\mathrm{d}p_w}$。对于封闭状态下的气泡，$p_{aw}\approx p_w$，$B_{aw}\approx1$，并令 $\beta_w=0$，上式将简化为

$$\beta=\frac{1-s+c_h s}{p_a+p_w} \tag{13.7a}$$

当接近饱和时，上式算出的 β 可能偏大，此时可略去式(13.7)中第 3 项而得

$$\beta=s\beta_w+\frac{1-s}{p_a+p_w} \tag{13.7b}$$

当 $s=0.99$ 时式(13.7b)算出的值约为式(13.7a)的 $\frac{1}{3}$。计算中需以土体体积代替孔隙体积为计量单位，故式(6.28)的 g_{ij}^{33} 中的 β 应为上式的 β 乘以孔隙率 n。

前面已经讲过，固结计算中宜取孔隙水头为变量。至于孔隙水流的边界条件，基岩接触面为不透水面，上、下游水位以下为等势面，这是不言而喻的。但是，水面线以上的心墙边界上的边界条件，则是比较难处理的。尤其在填筑过程中，边界位置还是不断改变的。可能的处理方案或者当作不透水面，或者当作零压面，即孔隙水头等于位置水头。对于竣工以后的稳定渗流状态，当然可以通过渗流计算先求出自由面位置，固结计算中把自由面以上区域排除在外，但这将增加程序的复杂性和数据的工作量。通过试算发现，还是以零压面的方案比较好。这一方案意味着土面经常有雨水渗入，不致形成负压。实际上当形成负压时，孔隙水流与气流需分别考虑，拟饱和土的固结理论已不再适用。

在上述假设基础上编成适用于土质心墙坝计算的程序 BISS[26]。该程序的设计思想也象前面的TOSS程序一样，把坝体分成三个子结构，前面两个子结构仍与总应力法一样计算，心墙部分编为第 3 子结构，每个结点除两个位移以外，还有孔隙水头作为第 3 个自由度。这一程序已用于若干工程的计算，下面介绍浙江横山水库砂卵石坝壳心墙坝的计算结果[27]。

图 13.14 为该坝最大断面，最大坝高 48.6 m。施工分两阶段进行，1964 年底到 1965 年 7 月修建临时断面，1966 年 4 月全坝建成，1967 年 4 月蓄水到接近正常高水位 95 m，坝顶高程 102.6 m。图 13.15 为(*a*)临时断面竣工时、(*b*)全部竣工时和(*c*)高水位时心墙计算孔隙水压力等值线，图中标出了中部一个孔隙压力测头的实测结果。

13.4.4 砂壳坝的地震液化

上游坝壳浸水饱和，如果砂料辗压不够密实，且细粒含量较多，则地震作用下容易因振动孔隙压力的升高而滑坡。与地基中砂土要等到完全液化才喷出来的情况不一样，斜坡土的

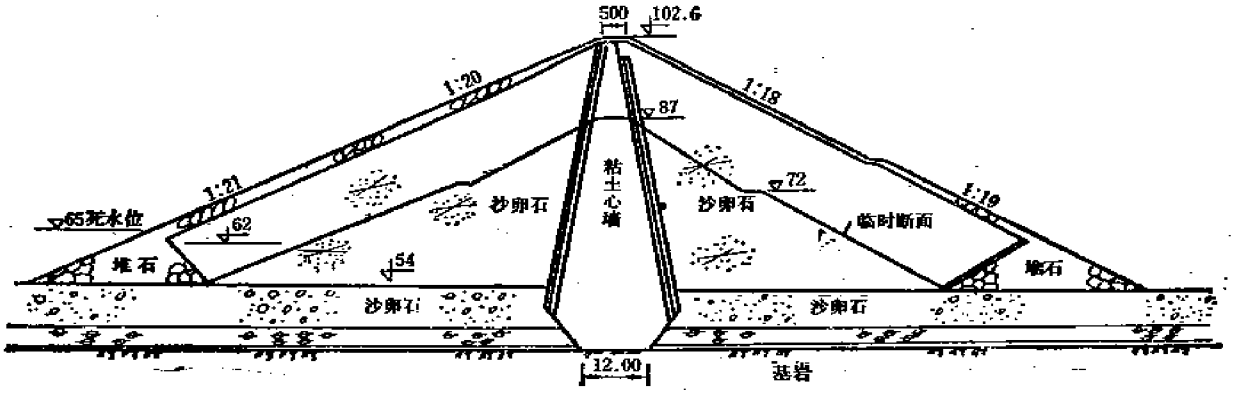


图 13.14 横山坝典型断面

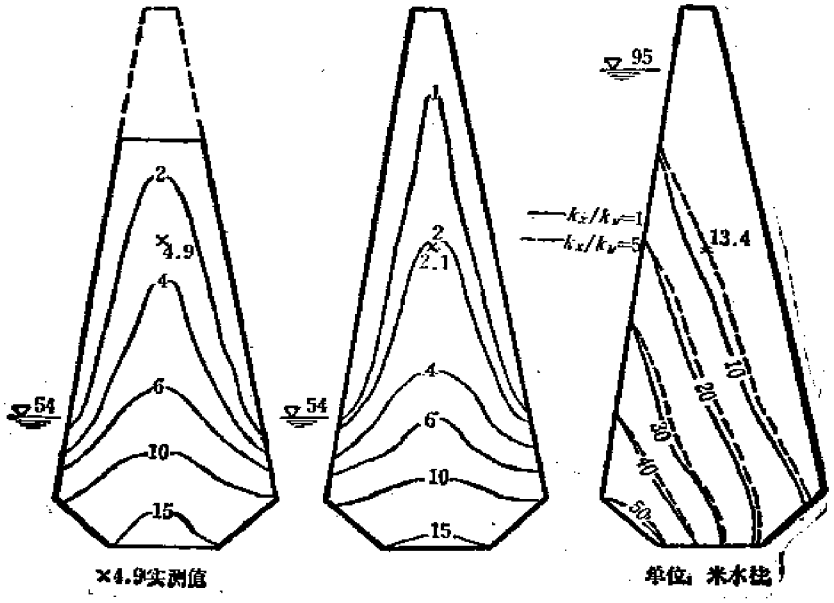


图 13.15 横山坝心墙孔隙压力分布

砂土只要孔隙压力有一定的升高就会失去稳定而下滑。坝坡的地震稳定习惯上用附加地震惯性力的拟静力法，但经验表明，这样的分析方法对于会产生振动孔隙压力的砂壳坝，可能偏于不安全。典型的例子是唐山地震中上游砂砾石保护层大片滑坡的密云水库白河主坝[138]。当时库址的地震烈度还不到6°，照例不需要进行地震稳定验算。因此，对于这种坝坡，按有效应力法进行动力分析是十分必要的。

坝坡的地震有效应力分析必需按二维问题进行。对这个问题的研究是沿着两条途径发展的。国内发展的方法是建立在等价粘弹性模型基础上的平均过程理论，残余剪切变形和残余体积变形都按经验公式计算，见7.3。国外发展的方法是剪切变形按弹塑性模型计算，残余剪切变形在计算过程中自动得出，残余体积变形则仍用经验公式计算，例如3.3中的自发体应变模型。后一方法对每一时步（例如0.01秒）都要求建立劲度矩阵并求解，计算时间很长。前一方法则只要求每50～100时步建立并分解一次劲度矩阵，与总应力法相比，计算工作量增加不多，易于在工程实际中推广。

砂壳坝的地震滑坡可能发生在地震中，也可能发生在地震后，后者是地震期间坝深部积累的高孔隙压力向外扩散的结果，而水库淤积造成坝坡表面渗透性的降低又阻碍了孔隙压力的及时消散。典型的例子如1975年2月4日辽南地震中石门岭土坝在主震后80分钟发生的滑坡[29]。图13.16为按上述等价粘弹性模型的有效应力法分析的结果。图13.16*a*为按坝坡完全排水方案计算的地震结束时的振动孔隙压力等值线和地震前后的有效应力比值及最危滑动圆弧；*b*为假定坝坡下部不透水情况的地震结束时的相应结果；*c*则为震后60分钟的情况，可见坝坡阻水是震后滑坡的主要原因。

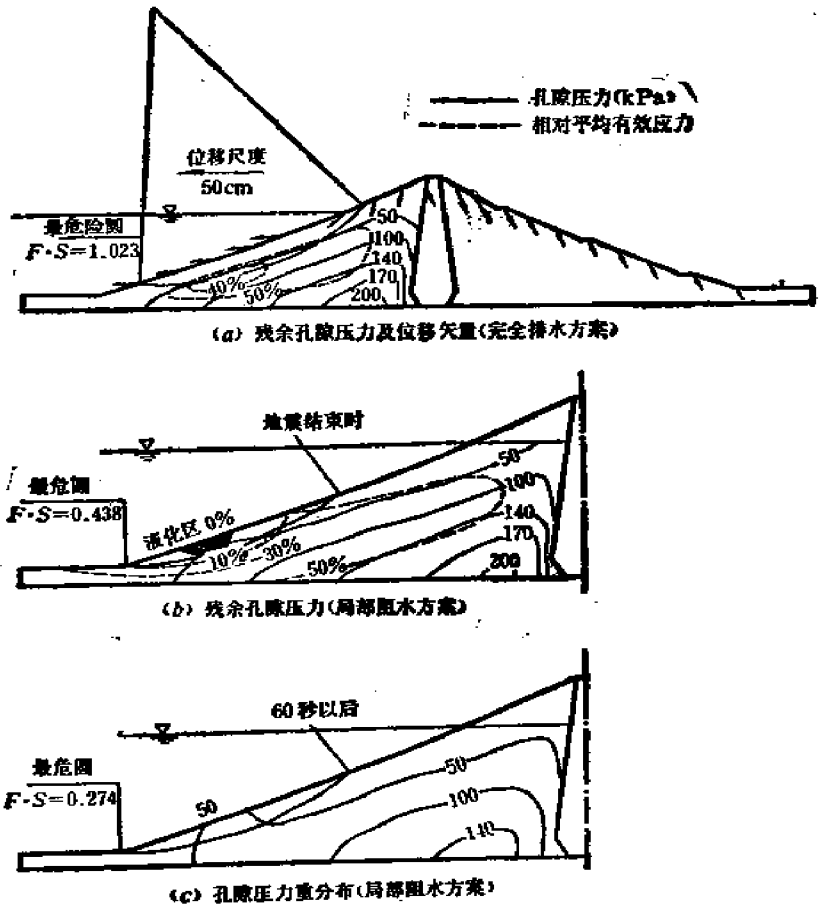


图13.16 石门岭砂壳坝震后滑坡分析

13.4.5 渗流分析和坝坡稳定分析

由于粘土防渗墙的渗透系数明显小于坝壳，心墙坝渗流分析可以假定上游坝壳不存在，即浸润线*ab*为水平。但下游坝的水头损失一般需要考虑，因为渗径*d*。比较大，尤其是斜墙坝(图13.17)。计算中应把防渗墙中的渗流与下游坝壳中的渗流分开进行。两段渗流场在斜墙的交点*c*和*d*需根据*cd*面上维持零压的边界条件通过反复迭代确定。另外，下游坝壳自由面还应分成两段，下段*c'e*为一般自由面，即无流量通过的零压面，而*dc'*段还承受斜墙上段下漏的流量Q_1，即需满足下列边界条件

$$h=z \tag{13.8a}$$

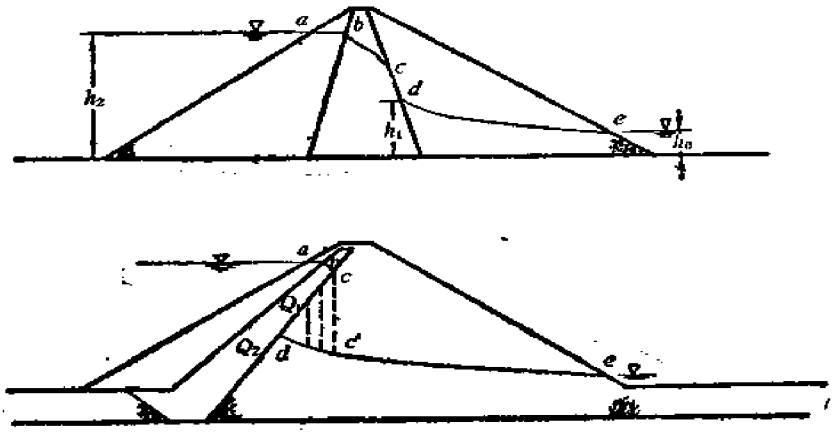


图 13.17 心墙和斜墙坝的渗流特点

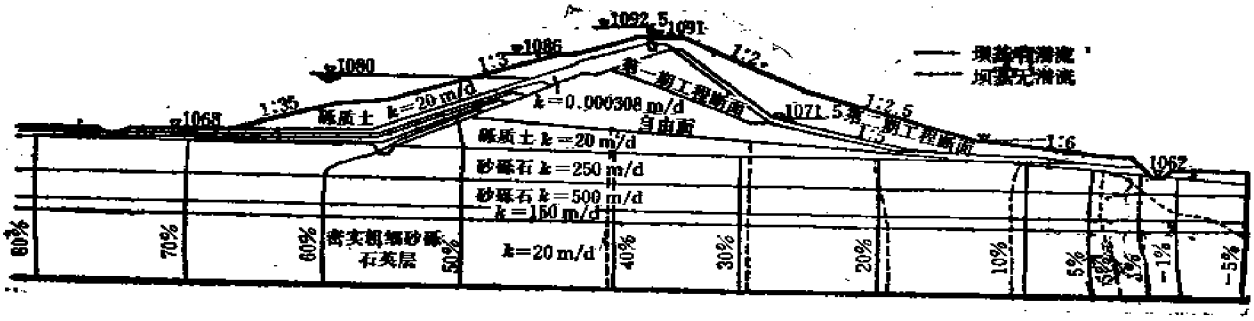


图 13.18 砾质地基上斜墙坝的渗流

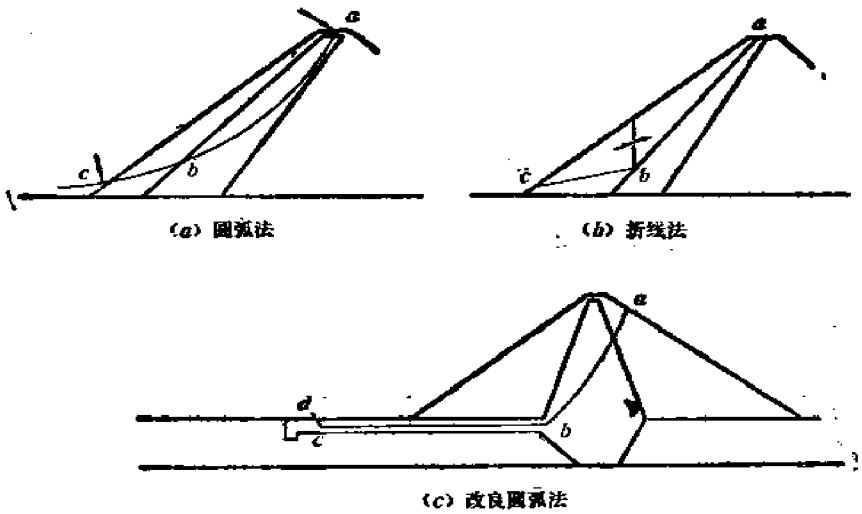


图 13.19 各种滑动面

$$k\frac{\partial h}{\partial n}=\frac{Q_1}{a} \tag{13.8b}$$

式中 a 为 dc' 段长度。当用有限元计算时，Q_1/a 可作为结点渗入量置于有限元公式的右端。式(13.8a)仍通过迭代方法逐步逼近。

图13.18是斜墙坝渗流的一个算例，计算中考虑了坝基有潜流和无潜流两种情况。

如果上游坝壳为渗透性并不十分良好的砂或砂砾石，尤其是含有一定粘粒的情况，就需要进行水位突降下的不稳定渗流分析。分析可按4.4的有限元法进行，也可按半经验方法引用一些简化公式进行[38]。水位突降下渗流分析的目的是为了求得突降以后的孔隙压力分布，以便进行有效应力法稳定分析。除了前述地震液化和水位突降会促进心墙上游边坡的滑坡以外，遇到下列情况时更需要进行稳定验算：(1)斜墙坝；(2)填筑粘土料含水量较高，从而施工期的孔隙压力大；(3)心墙前方有粘土铺盖或有未挖除的软弱夹层。

坝坡稳定分析的方法大体上有圆弧滑动面法、折线滑动面法和改良圆弧法三种，如图13.19中a、b和c。分析的原则已在第八章介绍过，结合土坝特点的注意事项将在下一节讨论。

13.5 均质坝和水坠坝

13.5.1 工作特点

均质坝由均一土料辗压填筑而成，一般用壤土或砂壤土等粘性土料，但下游坡趾或坡内仍有排水设备。这种坝填筑时坝体内会产生较高的孔隙压力，库水降落时上游坝坡又会产生较大的渗流力，容易引起滑坡，因此不能修得太高，一般坝高不超过50 m。



图13.20 水坠坝

水坠坝是国内特有的一种坝型，是从水中倒土法基础上发展起来的，其施工方法是用水将坝址两岸山头的土冲成泥浆，用很陡的输泥渠引到坝址两边筑有围埂的泥浆池中(图13.20)。与水力冲填坝不同之处是泥浆浓度大，冲填中不产生分选现象，脱水固结快，泥浆脱水固结后就形成坝体，然后继续加高围埂冲填。适于水坠坝的土料有黄土、砂土和砾质土。我国北方所用土料大多为颗粒比较均匀的黄土，修成的坝大体上是均质坝，南方则多为含粘粒的砾质风化土，冲填过程中有一定分离，两边粗粒多些，中间细粒多些，其特性就与水力冲填坝相似，接近于心墙砂壳坝。

13.5.2 均质坝上游坝坡的稳定分析

均质坝由于没有透水性较好的坝壳，上游坝坡在水库水位突降时更容易滑坡。水位突降时的不稳定渗流场的计算，前面已讨论过，本节讨论渗流场已知情况下的稳定分析方法，并限于圆弧滑动法。

已经提出过的坝坡稳定分析方案有：

(1) 把滑弧所包的整个土体和水体作为脱离体，考虑其力和力矩的平衡，此时土体的容重应该用实际容重，即自由面以下为饱和容重，自由面以上为湿容重(图13.21)。由于水体也包在滑弧中，滑面cd以上的水体也分条计算。为免除这一麻烦，也可以把这部分水体的作用代之以水压力P，但现在都用计算机分析，就没有必要这样做。与此同时，滑弧上作用的总应力应当包括有效应力和孔隙压力，孔隙压力值等于渗流计算得出的结点水头h减去位置水头z后乘以水容重，即

$$p=\gamma_w(h-z) \tag{13.9}$$

当土条中心不在结点上时，通过内插计算。

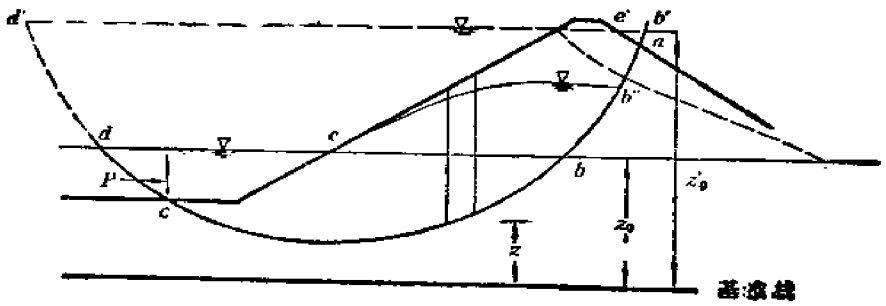


图 13.21 水对滑动土体的作用

(2) 设想把水平面 bed 以下的水体全部拿掉，计算中就不再需要考察 cde 这一块水体，同时，bce 内土体应改为浮容重，这时，滑动面上总应力减少了 $\gamma_w(z_0-z)$，而有效应力应当不变，故孔隙压力应改用下式计算

$$p=\gamma_w(h-z_0) \tag{13.9a}$$

这一方法对低水位的情况运用比较方便，但对高水位的情况，例如水平线为 $b'e'd'$ 时，$ab'e'$ 将出现一块负的水重，同时按式(13.9a)算出的滑弧上孔隙压力也可能变为负值。

(3) 设想把水平面 $b''ed$ 以下和 bcd 以上一块水体拿掉。考虑土骨架的平衡，由于拿掉的这块水体本身不处于平衡状态，而是依靠骨架的阻力，拿掉以后就要考虑水对骨架的作用力，即渗透力。此时滑动面上的孔隙压力只作用在水体上，就骨架的平衡来说毋须再考虑。

上述三种方法原则上是等价的。第一种方法是从实际情况出发的。后面两种是经过人为处理的，不小心的话容易弄错。尤其是第三种方法，渗透力是体积力，其计算显然比表面力——孔隙压力麻烦，因而没有什么优越性。

至于土条间作用力，则以假定作用方向为水平的 Krey-Bishop 法比较适宜。不考虑土体间作用力的 Fellenius 法经常得出不合理结果，而一些所谓精确法又太繁，不便实际应用[31]。另外，上述水位突降下的稳定分析是一种有效应力分析，应选用土的有效强度指标。如果采用总应力强度指标，再加 Fellenius 法分析，将会得出太低的安全系数，是不合理的。

13.5.3 水坠坝的固结计算

水坠坝设计中的主要问题是施工期的边坡稳定。根据经验，砂壤土的允许冲填速度为每天升高 0.25～0.3 m，轻粉质壤土为 0.20～0.25 m，中粉质壤土为 0.15～0.20 m，渗透系数低于 10^{-6}cm/s 的重壤土一般不宜采用。如冲填太快，泥浆来不及脱水固结，就可能发生滑坡。目前施工速率主要是根据经验确定的。一般通过边坡的变形观测进行控制，即变形太快而发生鼓肚子现象时停工几天后再进行冲填，这样施工速度就不能很好保证。如果能结合过去的施工经验进行固结计算，事先制定更合理的施工速度，无疑有很大意义。黄文熙曾从 Terzaghi 固结理论出发并把坝的断面简化为三角形，推导了坝坡和坝基均为自由排水，坝基不透水及坝坡不透水三种理想情况的解析解，并绘制了相应的图表，可供设计中作初步估计[30]。进一步的分析可以应用 Biot 固结理论求解。朱泽民等曾按 Duncan 模型进行了山西吴城水库冲填坝的 Biot 理论分析，计算与实测的孔隙压力还是比较吻合的(图 13.22)[34]。计算程序采用三角形组合单元，每个组合单元内包括四个小三角形。计

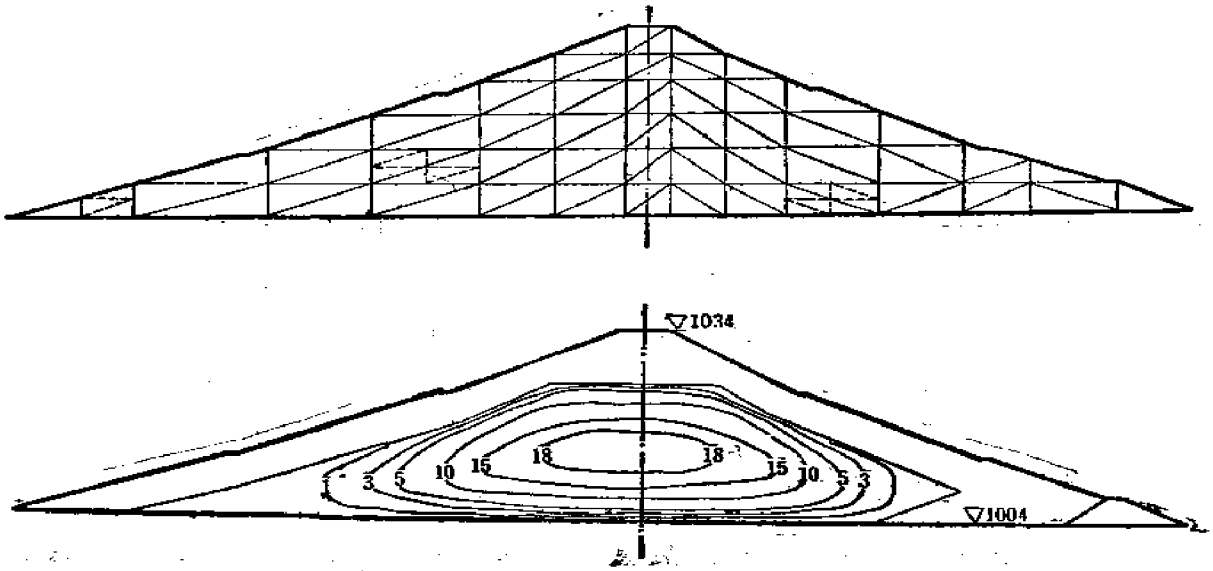


图 13.22 吴城坝的单元划分及竣工时的计算孔隙压力

算中考虑了渗透系数随着固结过程中孔隙比的变小而降低，并按下列指数函数计算

$$k_s = k_0 \exp(-\beta \varepsilon_v) \tag{13.10}$$

k_0 为 $e_s = e_0$ 时的初始渗透系数，$\varepsilon_v = \dfrac{e_0 - e_s}{1 + e_0}$ 即为计算中的体积应变，β 是变化系数。上述计算在渗透系数方面考虑了大应变，但在骨架变形计算中仍按小应变分析。对于初始孔隙比为 1.0 的情况，固结以后的孔隙比在 0.7～0.8 之间，体积应变不超过 20%，按小应变理论计算应当是可以的，不过此时固结过程中渗透系数的降低也不到 2 倍。水坠坝固结计算中的另一个问题是渗流边界条件的处理。上述算例中计算域只限于冲填的土体，坝基和围埂接触面均按自由排水的零压面处理，与实际情况有一定的差距。黄文熙曾建议对围埂面采用下列半透水边界条件[34]。

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{R_k p}{L} = 0 \tag{13.11}$$

R_k 为围埂与冲填土的渗透系数比，L 为周埂厚度。从渗流角度看，式中的孔隙压力 p 宜用总水头 h 代替。

13.5.4 水坠坝的施工期坝坡稳定

水坠坝施工期的滑坡有所谓坐滑和流滑两种形式。前者指滑弧较深，大部为已固结坝体的破坏，可以通过常用的土坡稳定分析方法计算其安全系数；后者指常未固结的泥浆冲破围埂而流动的破坏。对后一种破坏曾经提出过多种分析方法。大多把围埂比拟为挡土墙，按挡土墙整体稳定的验算法进行分析[32]。其实，按照土坡稳定分析中常用的术语，前者属于整体滑动，后者则属于局部滑动，两者都可以用通常的稳定分析方法进行分析。

13.6 尾矿坝和灰坝

13.6.1 概述

尾矿坝是挡拦选矿厂排放的尾矿泥而筑，一般建于山沟出口处，沟内形成尾矿库。灰坝与尾矿坝相似，只是库内存放的是电厂排放的粉煤灰。尾矿坝和灰坝失事会淹埋下游居民

点，并造成严重的环境污染，设计中必须仔细分析其各种条件下的稳定性。

按施工顺序尾矿坝由初期坝(基础坝)和各级子坝堆筑而成。堆筑方法有上游法，中心线法和下游法三种，而以上游法为常见(图13.23)。初期坝应由透水料堆筑，各级子坝可利用库内尾矿料堆筑。但对灰坝和细粒尾矿，则宜改用其它土料。尾矿料和灰土通过水力冲填法放入库内，从坝顶向内形成平缓的冲积坡(>1:50)，随着矿泥的沉淀，表层滞留薄层清水。

排水不良和地震液化是尾矿坝和灰坝失事的主要原因，对于重要的工程应当进行渗流分析和地震作用下的坝坡稳定分析。

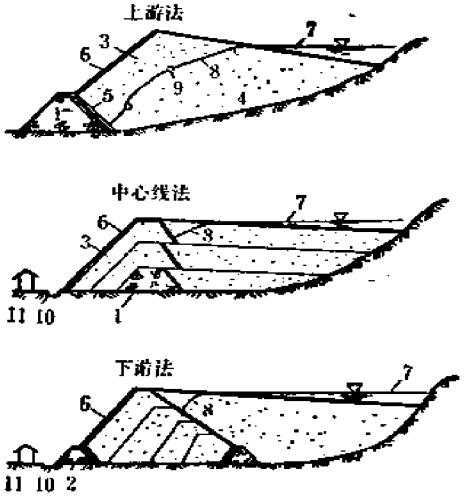


图 13.23 尾矿坝筑坝方法示意图

1—初期坝；2—滤水坝址；3—冲积粗尾矿；4—冲积细尾矿；5—反滤层；6—护坡；7—库水位；8—浸润线；9—坝坡排水渗水管；10—集水池；11—回水泵站

13.6.2 渗流分析

尾矿坝和灰坝不会有蓄水坝的水位突降问题，一般只要进行稳定渗流分析。最简单的算法是象均质土坝一样，把坝断面分成三段，分别应用式(4.36)和(4.37)算出浸润线位置和渗流量。但是由于各个时期冲填的尾矿料的性质不同，库内尾矿砂分布极不均匀，往往带有层次或夹有透镜体，渗透系数明显地各向异性和不均匀。因此在用简单方法计算时，至少应当考虑各向异性，否则算出的浸润线可能偏低，最好考虑沉积的层次进行有限元分析。

图13.24是灰坝的渗流算例，由于初期坝由粘土组成，坝基也为粘土，浸润线很高，拟在初期坝后埋设排水管以提高坝坡的稳定性。计算结果表明，增设排水管后的浸润线可望比现有的下降5～6米，相应的抗滑安全系数(用简化Bishop法计算)将由1.38提高到1.96。

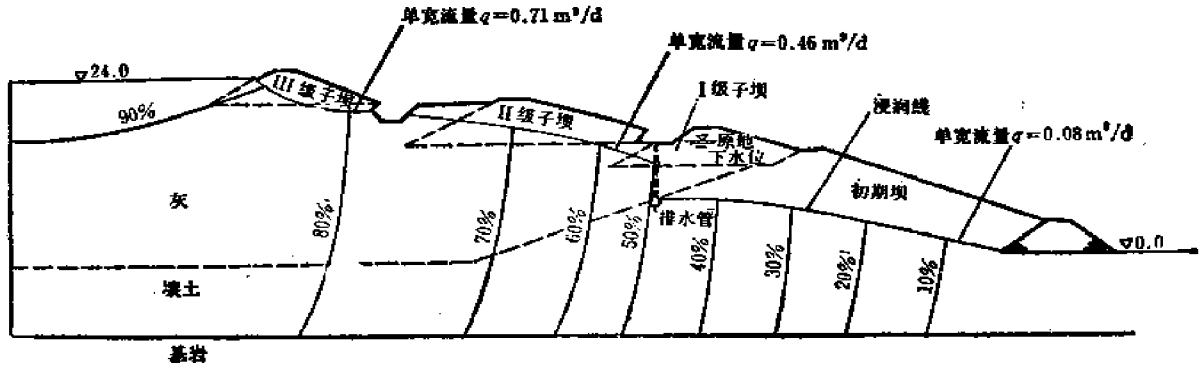


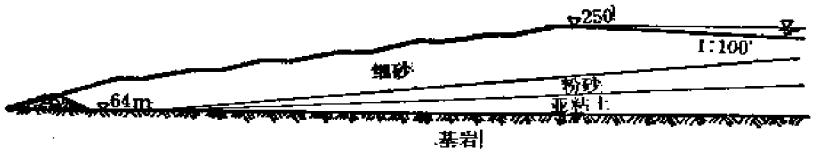
图 13.24 谏壁电厂松林山灰场排渗加固后的渗流场

13.6.3 地震液化分析和稳定分析

尾矿坝的地震液化分析和稳定分析原则上与前面砂壳坝没有区别，但这种坝用水力冲填，比辗压堆筑的砂壳坝更疏松，因而也更容易液化。由于坝体与库内矿泥连在一起，体积往往比土坝大得多，再加上堆积料的密度低，剪切模量也低，坝体的自振周期相当长，一般

在2秒以上，地震反应分析结果往往没有坝顶加速度放大现象。为了使计算结果趋于安全，在选用设计地震参数时宜取远距离传来的长周期地震波。

下面以德兴铜矿4号尾矿坝为例说明地震液化分析的过程[35]。图13.25中a是设计断面，b是单元划分。静力计算中假定震前下过雨，浸润线与坡面重合。动力计算中所用的振动孔隙压力公式如式(7.45)，输入的基岩地震曲线为唐山地震中迁安收到的余震记录，卓越周期从0.14秒调整到0.28秒，最大加速度放大到$0.2g$和$0.4g$，地震历时10秒。$0.4g$的动力计算结果如图13.26所示，地震结束时的液化区表示在图13.25b中。

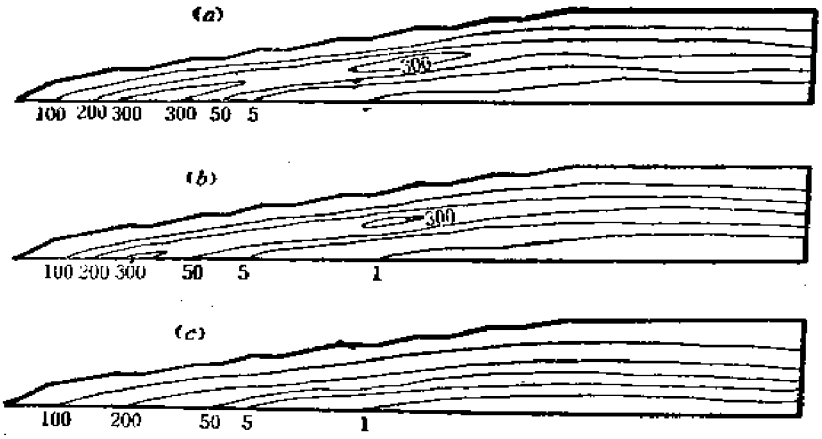


(a) 设计断面(内堆法施工)



(b) 单元划分及液化单元

图13.25 德兴铜矿4号尾矿坝计算



(a) t=10秒，(b) t=40秒，(c) t=8分40秒

图13.26 当输入加速度为$0.1g$时孔隙水压力分布

根据以上算得的振动孔隙压力分布，再加上静力计算的渗流压力，就可以用有效应力法分析坝坡的稳定性。与砂壳坝一样，计算的最危滑弧不会太深，这是砂性土坡的特点。

13.7 围堰

13.7.1 工作特点

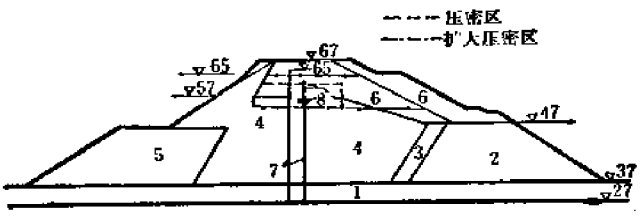
围堰是用于水下施工时临时挡水的建筑物，其工作条件与土坝类似。一般施工完毕围堰即被拆掉，但当用于土石坝的坝基施工时，围堰往往作为坝体一部分而被保留。由于其临时性，围堰的设计要求不如永久性建筑物严格。但大型水工围堰往往是工程成败的关键，有的围堰体积十分庞大，例如拟议中的三峡工程的深水围堰高达上百米，不亚于一座高坝，在

设计中，仔细分析工作不容忽视。

常见的大型围堰有土石围堰，混凝土防渗墙围堰和钢板桩格形围堰等。

13.7.2 混凝土防渗墙围堰

自从葛洲坝工程采用这种类型的围堰以后，它已在国内大型水利工程中得到较多的应用。这种围堰的施工顺序是先在河床中抛填两块堆石棱体，直至露出水面，然后在堆石体之间充填砂或砂砾石。浅水中施工时可只在临水面抛石，在其后面填砂。最后在砂体上架设施工机具打设混凝土防渗墙。图13.27是葛洲坝围堰的断面。其最大高度为40米，顶宽20米，中间打设了两道厚0.8米的防渗墙，相距3.5米。对此围堰曾应用Duncan—张模型进行有限元计算，图13.28为水荷载作用下计算和实测的下游墙的变位的比较[36]。



1. 覆盖层 2. 堆石 3. 反滤料 4. 砂砾料 5. 灰岩石碴 6. 混合料 7. 混凝土防渗墙 8. 混凝土槽口板

图13.27 葛洲坝围堰断面

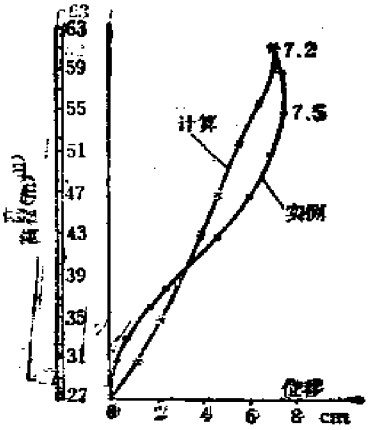


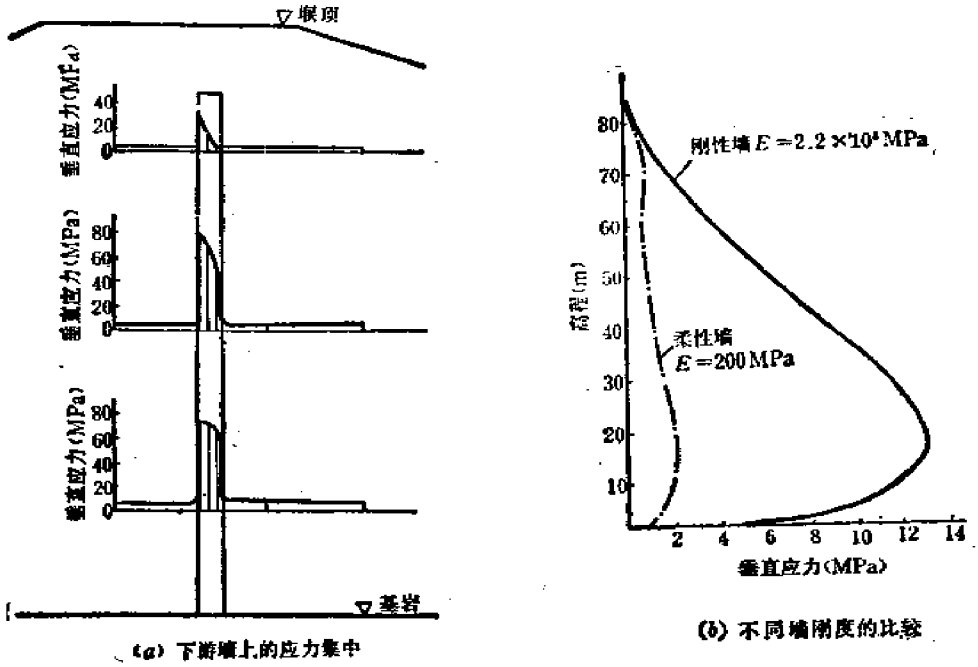
图13.28 计算与实测的下游墙变位

在葛洲坝围堰成功的经验的基础上，最近设计的三峡工程的高达90米的深水围堰也采用了类似的双混凝土防渗墙方案。为了分析墙的受力特点，曾约请七个单位同时对该围堰进行有限元应力应变分析[37]。尽管分析中采用同一计算模型——Duncan模型（包括E_t、ν方案和E_t、B_t方案，见3.2.1）和统一的单元网格，由于计算参数选用和力学处理上的一些差异，各单位的计算结果仍有相当差异，例如下游墙的最大位移变化于0.6～2.0m之间。不过也得到了比较一致的有意义的结论，如：(1)墙上的应力主要受侧壁摩阻力的影响，由于基坑抽水时下游堰体压缩下沉，土体中的部分应力通过摩阻力传给下游墙，因而它是偏心受压构件，上游墙则主要是承受水平压力的弯曲构件；(2)混凝土的刚度只影响墙体的应力，对堰体的变形几乎没有作用，采用低模量材料可以降低墙身内的压应力，但如果它的抗压强度也随之降低，则采用低模量材料不一定有利。图13.29表示计算得出的墙上的应力集中情况和用两种混凝土模量计算的墙身应力。

13.7.3 钢板桩围堰

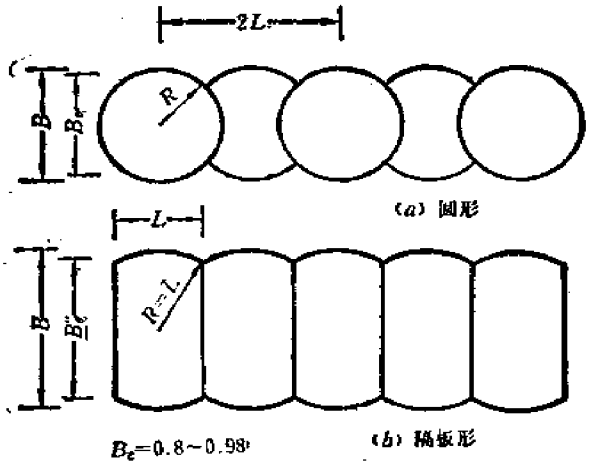
低水头板桩围堰只需打两道板桩墙，顶上用锚杆连接，中间填土即可。高水头板桩围堰则需做成格型，以增加整体刚度。格子内宜填无粘性土料。图13.30为两种常见的格型围堰布置型式。除了作为临时性挡水建筑物之外，格型围堰也可用作于船坞和码头等永久建筑物。

格型围堰目前仍用半经验方法设计[38]。其验算内容包括：(1)整体滑动；(2)整体倾覆；(3)板桩锁口拉力；(4)内部稳定。整体滑动和倾覆的验算方法可按有效宽度为B_e的刚



(a) 下游墙上的应力集中　　(b) 不同墙刚度的比较

图 13.29 三峡深水围堰计算结果



(a) 圆形　　(b) 隔板形

图 13.30 钢板桩格型围堰

性挡土墙处理，见第十四章。单位板桩长的锁口拉力可用下列简单公式计算

$$t = K\gamma z \cdot R \tag{13.12a}$$

或

$$t = K\gamma z \cdot L \tag{13.12b}$$

后者用于隔墙板桩。Terzaghi 建议侧压力系数 $K=0.4$。所谓内部稳定，实际上是土体的变形引起的围堰倾侧问题，最好用有限元计算。计算应按空间有限元法进行，但由于对称性，可只切出宽为 L 的局部进行分析[39]。这种围堰国内很少采用，故不再深入介绍。

参 考 文 献

1. 沈珠江，土石坝应力应变分析中的若干问题，水力发电学报，1985 年 2 期。
2. 沈珠江、王剑平、谢晓华，混凝土面板堆石坝蓄水变形的数学模拟，第一届全国计算岩土力学研讨会论文集 (二)，273

页，西南交通大学出版社，1987 年。
3. 沈珠江、王剑平，土质心墙坝填筑及蓄水变形的数值模拟，水利水运科学研究，1988 年 4 期。
4. Lefebvre G. et al., Three-dimensional finite element analysis of dams, J. SMFD, ASCE, Vol. 99, SM7, 1973.
5. 张文正等，高土石坝三维有限元应力和变形分析，高土石坝筑坝关键技术问题的研究成果汇编，第二册，161 页，1986。
6. 希多、义买祖米等，混凝土面板坝的变形研究，面板堆石坝文集，第一辑，31 页，南京水利科学研究院，1985。
7. 赵增凯，佛土度爱利混凝土面板堆石坝考察报告，面板堆石坝文集，第二辑，1 页，南京水利科学研究院，1986。
8. 陈生水，堆石坝的地震永久变形分析，南京水利科学研究院硕士论文，1988。
9. Zhang X. J. & Chen W. F., Stability analysis of Slope with general nonlinear failure criterion, Int. J. Num. Ana. Methods in Geomech., Vol. II, No. 1, 1987.
10. 王复来，郭俊仃，碧口土石坝与混凝土防渗墙在各运用期的应力与位移的分析，岩土工程学报，6 卷 6 期，1984.
11. 林正夫，ロックフイルダムの挙动解析，大ダム，No. 62, 1972.
12. Nobari E. S. & Duncan J. M., Movement in dams due to reservoir filling, Performance of Earth and Earth-Supported Structures, Vol. 1, Part 1, p. 797, 1972.
13. 沈珠江、左元明，坝壳砂砾料的浸水变形特性测定，水利水运科学研究，1989 年 1 期。
14. 陈慧远、施群、唐仁杰，沥青混凝土心墙土石坝应力应变分析，岩土工程学报，4 卷 4 期，1982.
15. Duncan J. M. et al., FEADAM84-A computer program for finite element analysis of dams. Univ. California, Berkeley, 1984.
16. 沈珠江，土石坝总应力法应力应变计算程序—TOSS，南京水利科学研究院报告，土 8804，1988。
17. 郭俊仃，土石坝应力应变计算程序—STST，水电部西北勘测设计院，1984。
18. Charles J. A. The use of one—dimensional compression tests and elastic theory in predicting deformation of rockfill embankment, Canadian Geotechnique Journal, Vol. 13, No. 3, 1976
19. Cathie D. N. & Dungar R., Evaluation of finite element predictions for constructional behaviour of a rockfill dams. Proc. Instn Civil Engg., Part 2, Vol. 65, p. 551, 1978
20. Kulhawy F. H. & Gurtowski T. M., Load. transfer and hydraulic fracturing in zoned dams. J. GED, ASCE, Vol. 102, GT9, 1976.
21. Зарецкий Ю. К и Орехов В. В., Влияние режима заполнения водохранилища на напряженно-деформированое состояние каменно-земляной плотины, Гидретехническое Строительстьство, No. 3, 1982
22. Duncan J. M. et al., CON2D A finite element computer program for analysis of consolidation, Report No. UCB/GT/81-01, Univ. California, Berkeley, 1981.
23. 张云波，有效应力法非线性变形计算在土石坝中的应用，水利水运科学研究，1981 年 2 期。
24. Hilf J. W. Estimating construction pore pressure in rolled earth dams, 2nd Int. Conf. soil Mechs Found Engg., Vol. III, p. 234, 1948.
25. Fredlund D .G., Density and compressibility characteristic of air-water mixtures, Canadian Geotechnical Journal, p. 388, 1976
26. 沈珠江，土石坝比奥理论的应力应变及固结计算程序-BISS，南京水利科学研究院报告，土 8804，1988。
27. 沈珠江、王剑平，横山水库土石坝有效应力应变分析，将刊于水利学报。
28. 沈珠江，徐志英，1976 年 7 月 28 日唐山地震时密云水库白河主坝有效应力动力分析，水利水运科学研究，1981 年 3 期。
29. 沈珠江，土坝的动力渗流变形计算，岩土地震工程与土动力学新进展国际会议论文选译 (Int. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics)，冶金部勘察科学技术研究所编，1982。
30. 华东水利学院主编，水工设计手册——第三卷 15 章，渗流计算，水利电力出版社 1984。
31. 陈祖煜，土坡稳定分析的通用条分法及其改进，岩土工程学报，5 卷 4 期，1983。
32. 陕晋水坠坝试验研究工作组，水坠坝，水利出版社，1980。
33. 黄文熙，水坠坝的固结理论及其应用，水利学报，1982 年 9 期。
34. 朱泽民等，吴城水库冲填坝比奥固结理论的非线性分析，水力发电学报；1984 年 3 期。
35. 徐志英、沈珠江，尾矿高堆坝地震反应的综合分析与液化计算，水利学报，1983 年 5 期。
36. 司兆乐，刘松涛，葛洲坝工程大江围堰的应力应变分析及实测成果的验证，长江科学院院报，1987 年 4 期。

37. 包承纲，三峡工程和葛洲坝工程双防渗心墙圈堰的应力应变分析，长江科学院院报，1987年3期。
38. Lacroix., Y. et al., Design, construction and performance of cellular cofferdam,Spec. Conf. Lateral Stresses in the Ground and Earth--Retaining Structures, ASCE, pp. 271-328, 1970.
39. Kittisatra L., FEA of circular cell bulkhead, Oregon State Univ., 1976.

第十四章　挡　土　墙

14.1　概述

保持地面一定高差的建筑物谓之挡土墙。图14.1表示一个简单形式的挡土墙及其各部分。

挡土墙分重力式和锚定式两类。图14.1是利用墙身圬工体积的自重支撑墙背填土的重力式挡土墙。重力式挡土墙也可以用钢筋混凝土筑成，并利用底板上的填土重量维持稳定。上述两种都是刚性挡土墙。

锚定式挡土墙属于柔性挡土墙，常用于建造码头和深基坑开挖的临时支撑，如图14.2。与重力式挡土墙依靠自重维持稳定不同，板桩墙的稳定部分依靠开挖面以下的板桩前方的被动土压力，另一部分则依靠锚定板或锚固于地层中灌浆锚杆所提供的拉力。

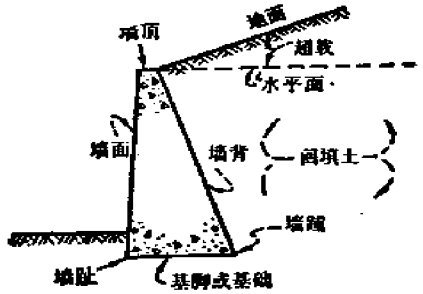


图14.1　简单挡土墙

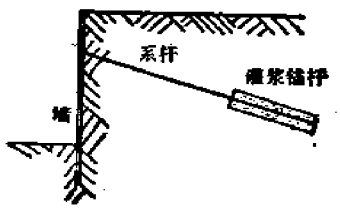


图14.2　锚杆挡墙

图14.3表示加筋土挡墙。自法国人 Henry Vidal 于六十年代初期发明并获得加筋土的专利以来，此项技术的发展十分迅速。加筋土的工作机理可以看作是利用埋于填土中的筋条与填料之间的摩擦力，使土体的强度有所增加，从而构成由筋与土组合成的新型复合材料；也可以看作是由于拉筋埋在填土之中而产生的锚固作用。两种解释何者为优，至今尚无定论。构成加筋土墙面的材料早期多用镀锌钢板，近年来已多为预制的钢筋混凝土面板所取代。至于筋条，国外多用钢带，近来已发展出形式多样、品种齐全的土工织物做成的拉筋材

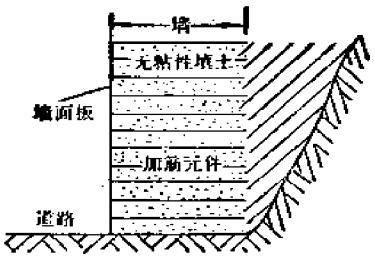


图14.3　加筋土重力式挡土墙

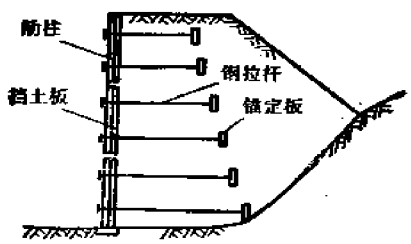


图14.4　锚定板挡土墙

料。在我国多半用聚丙烯加筋带作为筋条。

图14.3所示的加筋土挡土墙仍依靠重力维持稳定。图14.4则是一种既具有锚定式柔性墙的特点，又具有加筋土受力机理的装配式锚定板挡土墙，它是七十年代在我国铁路建设中逐渐发展起来的新型挡土结构。这种结构由墙面、拉杆、锚定板及填土共同组成。尽管整体上也是一种重力式挡土结构，可是由于借助埋在填土内的锚定板的抗拔力平衡了墙背的水平土压力，从而改变了重力式挡土结构的受力状态，达到了轻型化的目的。由于锚定板挡土结构所利用的是填土对锚定板提供的抗力，而不象加筋土那样利用填土与筋条之间的摩擦力，所以前者可以用粘性土作为墙后填料，而后者则要求使用砂性土。

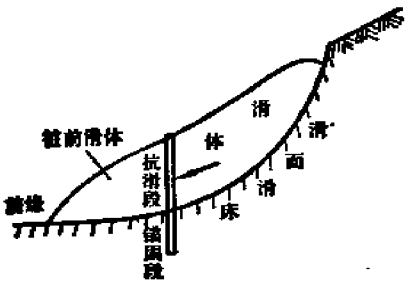


图 14.5 抗滑桩

抗滑桩又称锚固桩，常用于加固滑坡体的工程中。与抗滑挡墙相比，它有许多突出的优点，是近二十余年来广泛使用的一种新型抗滑支挡结构物。抗滑桩埋置于滑坡体下面的稳定滑床中，依靠桩与桩周围岩体或土体相互嵌制的作用，承受滑坡推力（图14.5）。按变形条件，抗滑桩可分刚性桩和弹性桩两种。刚性桩在侧向推力作用下主要发生转动，弹性桩则以挠曲变形为主。按埋置和受力状态，抗滑桩又可分为全埋式和悬臂式两种。全埋式的抗滑桩是桩的前后都有土体，如果将图14.5中抗滑桩段左面的土体挖除，则桩就处于悬臂的受力状态，称为悬臂抗滑桩。

14.2 刚性挡土墙

14.2.1 极限土压力计算

极限土压力常用Rankine理论和Coulomb理论计算。前者只适用于墙背光滑的理想情况，其基本公式为

$$p_a = K_a(q + c\,\mathrm{ctg}\,\varphi + \gamma_z) - c\,\mathrm{ctg}\,\varphi \tag{14.1a}$$

$$p_p = K_p(q + c\,\mathrm{ctg}\varphi + \gamma_z) - c\,\mathrm{ctg}\,\varphi \tag{14.1b}$$

q 为地面上超载，$K_a = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$，$K_p = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$。Coulomb理论的适用性较广，下面对此理论作一简单回顾。如第八章所述，Coulomb理论根据滑楔的平衡求出墙上的土压力，原则上是一种可动解法。对于墙身向外运动的主动情况，它的解将小于极限土压力，而对于墙身向土体运动的被动情况，它的解将大于极限值，因此必须假定不同的滑动面，求取主动土压力的极大值或被动土压力的极小值。

1. 无凝聚性土

对无粘性土用Coulomb法求解主动土压力的基本步骤如图14.6所示。即先假定一个滑裂面 ce，然后计算滑楔 $abcde$ 上的作用力，包括

(1) 土楔自重力——W，

(2) 土楔顶上超载——集中力Q及分布荷载 $q\cdot\overline{ae}$，

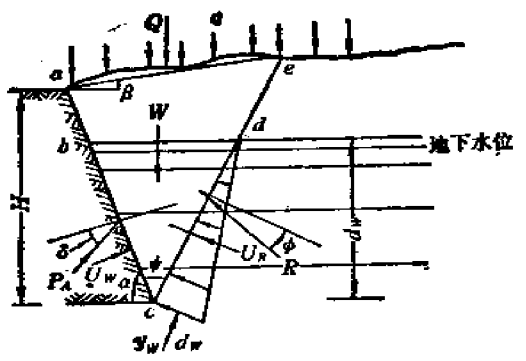


图 14.6 无粘性土的Coulomb主动土压力分析

(3) 滑裂面上摩擦力——R，与 ce 面法向成 ϕ 角，

(4) 墙背主动土压力——p_a，与法线成 δ 角，δ 为墙与土之间的摩擦角。

当存在地下水时，水上部分土体用湿重 W_1，水下部分用浮重 W_2。当然，此时计算墙上总压力时除土压力 p_a 外还应加上水压力 U_w。

对不同斜度的滑裂面 ce、ce_1、ce_2、…重复上述分析过程，求出其最大值，即为 Coulomb 的主动土压力。

对于不须考虑地下水的均匀土体，其自重引起的侧压力的合力的水平分量可用下式表示

$$P_{HA}=\frac{\gamma H^2}{2}\left[\frac{\csc\alpha\sin(\alpha+\varphi)}{\sqrt{\sin(\alpha-\delta)}+\sqrt{\dfrac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}}\right]^2\sin(\alpha-\delta)$$

$$=\gamma H^2 N_{\gamma HA} \tag{14.2}$$

垂直分量与水平分量之间有下列关系

$$P_{VA}=P_{HA}\operatorname{ctg}(\alpha-\delta) \tag{14.3}$$

或

$$N_{\gamma VA}=N_{\gamma HA}\operatorname{ctg}(\alpha-\delta) \tag{14.4}$$

由于破裂面倾角 ψ 只是 φ 和 δ 的函数，不受超载的影响，因此超载引起的垂直和水平土压力可写为 qN_{qHA} 和 qN_{qAV}，且

$$N_{qHA}=\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}N_{\gamma HA} \tag{14.5}$$

$$N_{qVA}=N_{qHA}\operatorname{ctg}(\alpha-\delta) \tag{14.6}$$

系数 $N_{\gamma HA}$ 可查有关文献[1,2]。

2. 粘性土

图 14.7 表示 $c\neq0$ 的粘性土的分析步骤，与 $c=0$ 的情况相比，有以下两点不同：

(1) 增加了填土的粘聚力 C_R 与墙-土之间的粘聚力 C_w，分别作用在破裂面 ce 和墙面 ac 上；

(2) 在墙后填土的表层有拉应力存在，其深度可按 Rankine 公式(14.1a)计算，即

$$z_0=\frac{2c}{\gamma\sqrt{K_a}}-\frac{q}{\gamma} \tag{14.7}$$

但是，拉应力区往往出现裂缝，从而不能保证发挥作用，从安全的角度出发，通常假定 z_0 范围内的水平应力为零。

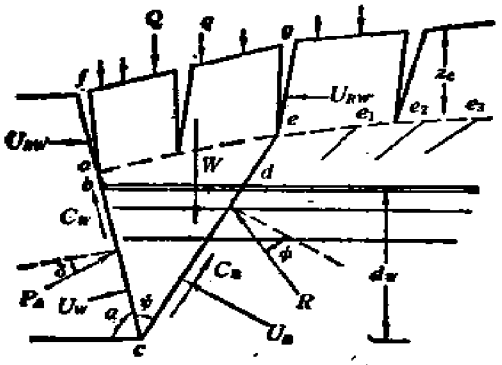


图 14.7 c-φ 土的 Coulomb 主动土压力分析

对具有不排水剪强度 c_u 为 100 kPa 的中等坚硬粘土，按上式计算的 z_0 约为 13 米。此值显然过大，根据经验建议更为实际的 z_0 公式为

$$z_0=\frac{c_u}{\gamma} \tag{14.7a}$$

算得 z_0 约为 5 米。一般认为 z_0 不应超过墙高之半。

3. 被动土压力

土压力的大小与墙身变位有关。对于主动状态，只要墙体的变位超过墙高的 0.06%～

0.2%，土压力即达到极限值。但对于被动状态，则需大得多的变位才能达到极限土压力。试验表明，对于紧砂，被动土压力充分发挥时的变位与墙高比介于1%～6.4%之间，对于松砂则竟高达40%[3]。

被动土压力的确定方法与主动土压力相同，但此时破裂面与墙面的夹角ψ比主动土动力的情况要大，而且由于滑楔的运动方向是向上的，与图14.6相比，滑裂面上的抗滑力R和墙面上的被动土压力P_p的方向将偏到法线的另一边。

14.2.2 挡土墙稳定验算

计算土压力的目的是为了验算挡土墙的稳定性。随着地基土性的不同，挡土墙的破坏方式有三种：水平滑动、倾覆和整体滑动。水平滑动发生在地基土质良好的情况。倾覆破坏的严格的分析方法已在第八章极限分析中介绍过，下面只介绍常用的半经验方法。整体滑动易发生于地基土质较软且墙后填土向上倾斜的情况，可按常用的土坡滑弧稳定分析法计算。

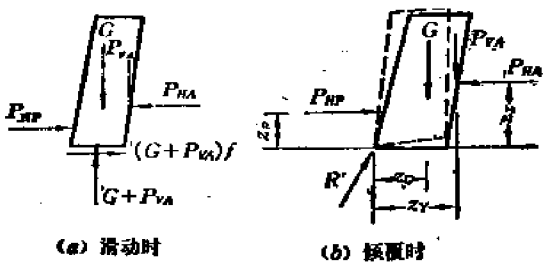


图14.8 挡土墙上的作用力

1. 抗滑稳定验算

按图14.8a所示的水平方向力的平衡条件，可以得出抗滑安全系数FS如下列各式，其值不应小于1.3。

(1) 基底水平时

非浸水墙
$$FS=\frac{\Sigma N f+P_{Hp}}{\Sigma P_{HA}} \tag{14.8}$$

浸水墙
$$FS=\frac{(\Sigma N-\Sigma N_w)f}{\Sigma P_{HA}} \tag{14.8a}$$

(2) 基底倾斜时

非浸水墙
$$FS=\frac{[\Sigma N+(\Sigma P_{HA}-P'_{Hp})\operatorname{tg}\alpha_0]f+P'_{Hp}}{\Sigma P_{HA}-\Sigma N\operatorname{tg}\alpha_0} \tag{14.9}$$

浸水墙
$$FS=\frac{(\Sigma N-\Sigma N_w-\Sigma P_{HA}\operatorname{tg}\alpha_0)f}{\Sigma P_{HA}-(\Sigma N-\Sigma N_w)\operatorname{tg}\alpha_0} \tag{14.9a}$$

当基底倾斜时尚应计算沿地基水平方向的滑动稳定性。上述式中：ΣN——作用在基底上的垂直法向力之和；ΣP_{HA}——墙背主动土压力的水平分力之和；P'_{Hp}——墙前被动土压力的水平分力（通常不予考虑，只有当基础埋置较深时可结合挡土墙的位移条件适当考虑）；ΣN_w——墙身的总浮力；α_0——基底的倾斜角；f——基底与地基之间的摩擦系数，其值在

表14.1 基底摩擦系数f

地基类别	f
软塑粘土	0.25
硬塑粘土	0.30
砂粘土、粘砂土、半干硬的粘土	0.30～0.40
砂类土	0.40
碎石类土	0.50
软质岩	0.40～0.60
硬质岩	0.60～0.70

缺少实际资料时可参考表15.1选用。

2. 抗倾覆稳定验算

挡土墙的倾覆破坏可能有两种形式：当地基土质坚实时(如岩基)，墙身可能绕前趾倾覆；对一般土而言，倾覆的旋转中心往往位于地基中。后一种破坏的严格分析方法见8.6，习惯上则是通过限制前趾底下的允许承载力以保证不发生这种破坏。

按图14.8b的力矩平衡，绕前趾倾覆的稳定安全系数可按下式计算，其值不应小于1.5

$$FS=\frac{\Sigma M_y}{\Sigma M_0} \tag{14.10}$$

式中 $\Sigma M_y=G\cdot Z_g+P_{vA}\cdot Z_y+P'_{Hp}Z_p$；$\Sigma M_0=P_{HA}\cdot Z_x$。

为了求得墙底的反力分布，先按下式计算合力的偏心距

基底水平时
$$e=\frac{B}{2}-C=\frac{B}{2}-\frac{\Sigma M_y-\Sigma M_0}{\Sigma N} \tag{14.11}$$

基底倾斜时
$$e'=\frac{B'}{2}-C'=\frac{B'}{2}-\frac{\Sigma M_y-\Sigma M_0}{\Sigma N'} \tag{14.11a}$$

式中 $\Sigma N'=\Sigma N\cos\alpha_0+\Sigma P_{HA}\sin\alpha_0$，$B$ 和 B' 为基底宽度，C 和 C' 为作用于基底上的垂直分力对墙趾的力臂。对土质地基，e 应不大于 $B/6$，而对不易风化的岩石，也应不大于 $B/4$。

偏心距求出后，墙前趾的压应力按下式计算

$$e\leqslant\frac{B}{6}\qquad \sigma=\frac{\Sigma N}{B}\left(1+\frac{6e}{B}\right) \tag{14.12}$$

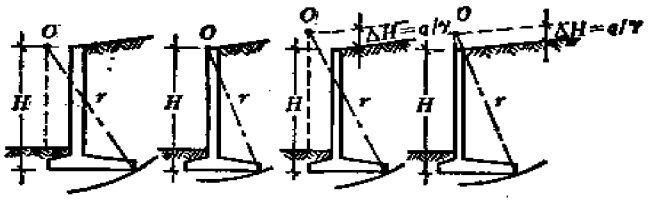
$$e>\frac{B}{6}\qquad \sigma=\frac{2\Sigma N}{3C} \tag{14.12a}$$

对倾斜地基，上式中分别用 N'、e'、B' 和 C' 代入。σ 值不得大于允许承载力 $[\sigma_c]$。

3. 整体稳定验算

整体稳定分析按斜坡滑动的办法计算。当 $c\neq0$ 时，在按式(14.7)计算得的可能的裂缝深度范围内，不应计入滑移面上的抗剪强度。相反，裂缝中可能灌满水时，就应计入水压力产生的滑动力矩。

浅层滑动时滑弧圆心的确定方法见图14.9。地基下面有软弱土层时，还应验算深层滑动。



(a) 墙顶以上无荷载 $c=0$、$\phi\neq0$ (b) 墙顶以上无荷载 $c\neq0$、$\phi=0$ (c) 墙顶以上有荷载 $c=0$、$\phi\neq0$ (d) 墙顶以上有荷载 $c\neq0$、$\phi=0$

图14.9 整体滑动

14.2.3 变形分析

前面介绍了极限土压力的计算，但极限土压力的发展要求墙体有一定的变位，尤其是被动土压力场合。为了解变形对土压力的影响，除了模型试验[3]和原体观测外，也可以进行应力应变分析。

Clough 和 Duncan 最先对刚性挡土墙进行模拟墙后填土施工过程的有限元分析[4]。计算中假定墙高6米，地基覆盖层由深6米的砂土组成。分析所得的主要结论是，由于填土的沉陷，墙身实际上是向后倾斜的，但墙对土的相对变位仍是前倾的，如图14.10。计算所得的墙上土压力大于主动土压力，但介于静止土压力和主动土压力之间。土压力的分布大体上呈三角形，但接近墙底处有应力集中，故合力作用点稍低于 $\frac{1}{3}$ 墙高。

一般说来，挡土墙并不是重要的建筑物，一定的位移也不影响使用，所以刚性挡土墙的

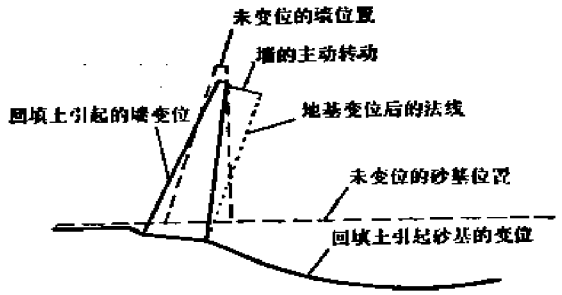


图 14.10 挡土墙的变形分析

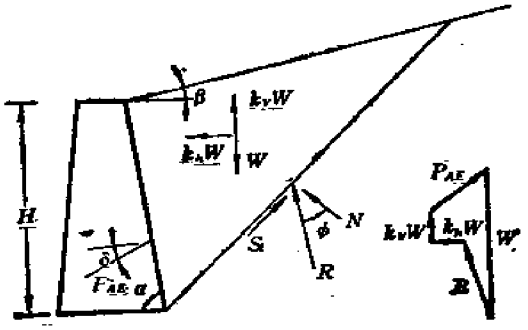


图 14.11 动土压力

变形分析没有受到重视。

14.2.4 动土压力及动力分析

国内外大多数抗震设计规范和文献中，一般仍沿用二十年代物部-冈部建议的地震土压力计算方法。该法是种拟静力法，即把地震惯性力加在滑动土楔上，然后仍按Coulomb方法求土压力[1]。设 k_h 和 k_v 分别为水平和垂直地震加速度系数，地震以后的主动土压力可按下式计算(图14.11)

$$P_{AE}=\frac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K_{AE} \tag{14.13}$$

其中

$$K_{AE}=\frac{1}{\cos\theta\sin(\alpha-\delta-\theta)}\left[\frac{\csc\alpha\sin(\alpha+\varphi-\theta)}{1+\sqrt{\dfrac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\theta-\beta)}{\sin(\alpha-\delta-\theta)\sin(\alpha+\beta)}}}\right]^2 \tag{14.14}$$

$\theta=\mathrm{tg}^{-1}[k_h/(1-k_v)]$

为了利用静力计算制定的系数表，可令 $\alpha'=\alpha-\theta$，$\beta'=\beta+\theta$，于是

$$K_{AE}=\left[\frac{\csc\alpha'\sin(\alpha'+\varphi)}{1+\sqrt{\dfrac{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\beta')}{\sin(\alpha'-\delta)\sin(\alpha'+\beta')}}}\right]^2\frac{\csc^2\alpha}{\csc^2\alpha'\cos\theta\sin(\alpha'-\delta)} \tag{14.14a}$$

此式方括号的值与式(14.1)中 $N_{\gamma HA}$ 相同。故动土压力的水平和垂直向土压力系数可按下式计算

$$N_{\gamma HAE}=N'_{\gamma HA}\frac{(1-k_v)\sin(\alpha-\delta)}{\cos\theta\sin(\alpha'-\delta)}\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right)^2 \tag{14.15a}$$

$$N_{\gamma HVE}=N'_{\gamma HA}\frac{(1-k_v)\cos(\alpha-\delta)}{\cos\theta\sin(\alpha'-\delta)}\left(\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right)^2 \tag{14.15b}$$

$N'_{\gamma HA}$：根据 α' 和 β' 由相应表格查出。

地震作用下的被动土压力相应地由下式计算

$$P_{PE}=\frac{1}{2}\gamma H^2(1-k_v)K_{PE} \tag{14.16}$$

式中

$$K_{PE}=\frac{1}{\cos\theta\sin(\alpha+\delta+\theta)}\left[\frac{\csc\alpha\sin(\alpha+\theta-\varphi)}{1-\sqrt{\dfrac{\sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\beta-\theta)}{\sin(\alpha+\delta+\theta)\sin(\alpha+\beta)}}}\right]^2 \tag{14.17}$$

土压力的作用点在静力计算中一般假定为 $\frac{1}{2}H$，动土压力则可能高于 $\frac{1}{2}H$。Seed 等

建议按下列顺序确定作用点[5]。设总土压力为 P_{AE}，静土压力为 P_A，则动土压力为 $\Delta P_{AE}=P_{AE}-P_A$，并假定静土压力作用点高程为 $\frac{1}{3}H$，动土压力作用点高程为 $0.6H$，则总土压力作用点高程为

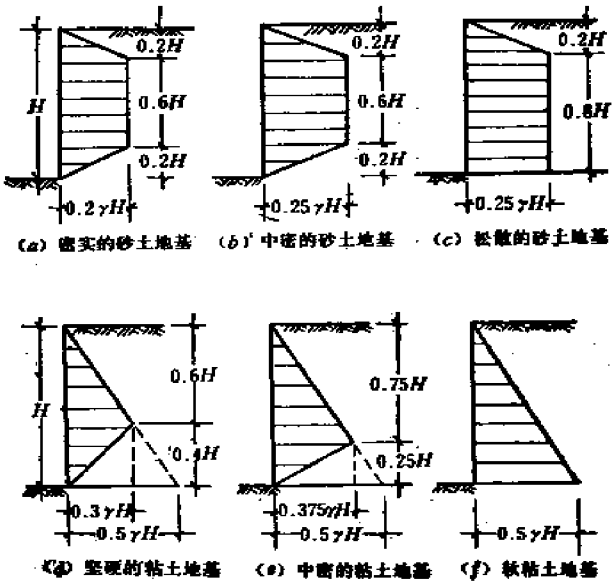
$$H_{AE}=\left(\frac{1}{3}P_A+0.6\Delta P_{AE}\right)H/P_{AE} \tag{14.18}$$

上述拟静力法不考虑地震运动的特点和土与建筑物的动力相互作用，而且对如何确定惯性力系数 k_h 和 k_v 也存在不同看法，因此近来有人开展考虑土与挡土墙共同作用的动力反应分析研究。

魏汝龙对墙高 $H=6$ m、12 m 和 18 m 及地基覆盖层深度 $D=0$、10 m 和 20 m 的情况按粘弹性模式进行了动力有限元分析，假定土的强度指标为 $c=5$ kPa 和 $\varphi=38°$，并选用一种冲击型地震波作为输入地震曲线，地震持续时间 30 秒，最大加速度 $0.2g$ 发生在地震开始后 2～3 秒。分析结果的主要结论如下[6]：

(1) 与墙底部的加速度相比，墙顶加速度将放大到 1.7 倍，但与墙后远方的地面加速度相比，墙顶加速度并不放大。因此，对于墙后填土水平的情况，可以根据墙后远方的地震加速度确定地震系数 k_h 和 k_v。

(2) 地震土压力 ΔP_{AE} 与 $\frac{1}{2}\gamma H^2$ 之比，按动力分析为 0.8($D=0$ 时) 和 0.5($D=10$～20m)，高于常规惯性力法的计算结果，但此值只出现于瞬时，随着墙身发生残余变位，实际地震土压力将会减少。因此，就墙的整体稳定来说，采用常规设计法是可以的，但就墙体结构来说，则应考虑能承受瞬时的冲击荷载。



(a) 密实的砂土地基 (b) 中密的砂土地基 (c) 松散的砂土地基

(d) 坚硬的粘土地基 (e) 中密的粘土地基 (f) 软粘土地基

图 14.12 板桩墙土压力分布图式

14.3 柔性挡土墙

14.3.1 常规设计方法

1. 土压力分布

由于土压力的分布与墙的变位有关，柔性挡土墙即使破坏时也不是所有点上的土压力都达到极限值。现有的常规设计方法是在极限土压力分布图上加以经验性的修正。图 14.12 是日本建筑学会编制的基础构造物设计规范中建议的基坑支撑墙上的土压力分布，对于砂土地基采用了 Trezaghi 和 Peck 的建议，对于粘土则采用了 Tschebotarioff 的建议[1]。墙顶均布荷载 q 在墙上引起的水平土压力 σ_x (图 14.13) 可按下式计算

$$\sigma_x=\frac{q}{\pi}[\beta_2-\beta_1-\sin(\beta_2-\beta_1)\cos(\beta_2+\beta_1)] \tag{14.19}$$

2. 板桩埋置深度

假定板桩前面为被动土压力，后面为主动土压力，并按式(14.1)的Rankine公式计算，则板桩埋置深度D可根据对锚着点的力矩平衡条件确定。例如在最简单的$c=0$和$q=0$的情况下，D可由下列公式解出

$$\frac{1}{2}\gamma K_p\left(\frac{2}{3}D+H-Z_t\right)D^2=\frac{1}{2}\gamma K_a\left(\frac{2}{3}D+\frac{2}{3}H-Z_t\right)(H+D)^2 \tag{14.20}$$

Z_t为锚杆埋深(图14.14)。

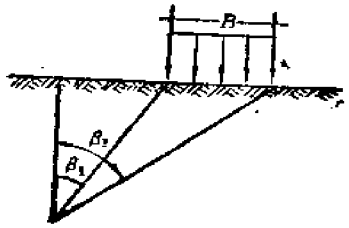


图 14.13 表面荷载引起的土压力

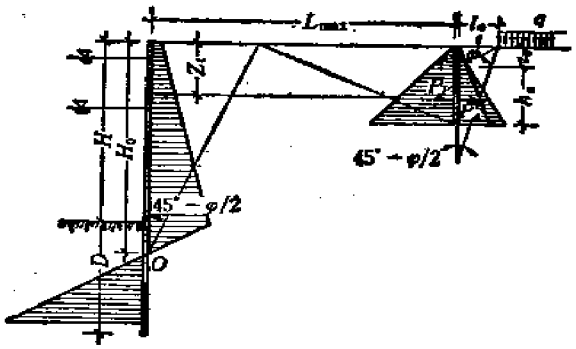


图 14.14 锚定板桩墙的尺寸

3．锚着力计算

板桩墙的锚定可用锚定板或灌浆锚杆。

用锚定板时锚着力T可以根据水平方向力的平衡条件确定，并根据图14.14所示的破裂面位置确定锚杆长度。锚定板的尺寸和埋置深度应满足下列条件

$$T\leqslant\frac{P_p}{FS}-P_a \tag{14.21a}$$

土压力P_p和P_a可按Rankine公式计算，锚定板的计算宽度考虑两端摩阻力后可比实际宽度放大，安全系数FS不小于1.5。

灌浆锚杆按下列方法计算

(1) 砂浆对锚杆的握固力

$$T\leqslant\frac{1}{FS}\pi d\cdot L_e\cdot\mu \tag{14.21b}$$

式中 d——锚杆直径；

L_e——有效锚固长度；

μ——锚杆与砂浆之间的粘结强度。

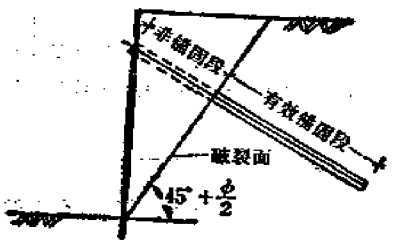


图 14.15 锚固段长度

(2) 锚杆孔壁对砂浆的抗剪力

$$T\leqslant\frac{1}{FS}\pi D\cdot L_e\cdot\tau \tag{14.21c}$$

式中 D——钻孔直径；

τ——孔壁土与砂浆之间的抗剪强度。

根据上述两式确定最起码的有效长度，加上破裂面内的非锚固段长度，即为锚杆总长(图14.15)。

4．板桩岸壁设计程序

把板桩划分成一维的梁单元，每个结点有变位u_i和转角θ_i两个自由度，相应的结点力为切力S_i和弯矩M_i，则含$i-1$和i两点的单元劲度矩阵可以写为

$$\begin{Bmatrix} S_{i-1} \\ M_{i-1} \\ S_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & \text{对} & \\ k_2 & k_3 & & \text{称} \\ k_4 & k_5 & k_6 & \\ k_7 & k_8 & k_9 & k_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ u_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \tag{14.22}$$

其中 $k_1=k_6=-k_4=12\dfrac{EJ}{D_i^3}$，$k_2=-k_5=k_7=-k_9=6\dfrac{EJ}{D_i^2}$，$k_3=k_{10}=4\dfrac{EJ}{D_i}$，$k_8=2\dfrac{EJ}{D_i}$，$EJ$ 为板桩抗弯刚度，D_i 为单元长度。两点上的结点力为

$$F_{i-1}=F_i=\frac{1}{2}(p_a-p_p)D_i \tag{14.23}$$

p_a 和 p_p 为单元中点的主动和被动土压力，按式(14.1)计算，但对成层地基垂直压力 γz 应改用分层累加法计算。变位求出后，结点力按下式计算

$$\left.\begin{aligned} S_{i-1}=S_i&=6\frac{EJ}{D_i^2}\left(\theta_i+\theta_{i-1}-2\frac{u_i-u_{i-1}}{D_i}\right)\\ M_{i-1}&=2\frac{EJ}{D_i}\left(\theta_i+2\theta_{i-1}-3\frac{u_i-u_{i-1}}{D_i}\right)\\ M_i&=2\frac{EJ}{D_i}\left(2\theta_i+\theta_{i-1}-3\frac{u_i-u_{i-1}}{D_i}\right)\end{aligned}\right\} \tag{14.24}$$

锚杆拉力可以通过锚杆处切力的变化等于集中力的概念求得，即

$$T=(S_{0上}+S_{0下})-X_0 \tag{14.25}$$

$S_{0上}+S_{0下}$ 为锚杆结点的切力变化，X_0 为锚点上土压力引起的结点荷载。板桩长度根据底端弯矩等于零的边界条件确定，通过迭代法求解，即当算出的底端弯矩不为零时，板桩再放长一些，重新计算。

下面介绍按上述思路编制的板桩岸壁设计程序的主要子程序[9]，原用 Algol 语言编写，此处已改写为 Fortran-77 语言。图 14.16 是用此程序设计的一个算例。

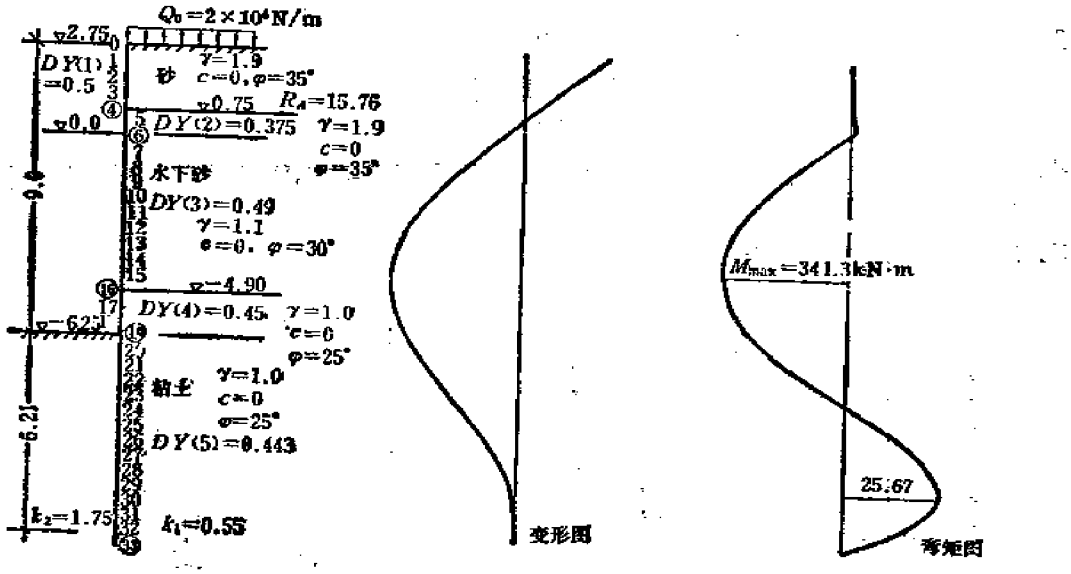


图 14.16 锚定板桩墙算例

P.14.1 板桩岸壁计算程序

【功能】 计算土压力、梁单元及总体劲度矩阵和荷载项，并解出挠度和锚杆力

【标识符】

MS——土层数

MT——板桩划分单元数

C、F——各土层凝聚力(10 kPa)和内摩擦角(弧度)

W1，W2——各土层后方和前方的容重(t/m^3)，前方挖除部分 W2 输入 0

K2——前方土层土压力增减系数

DZ——各土层内单元长度

JS——各土层底端处板桩结点号

NQ、JQ、Q——受集中力影响的结点数、结点号及结点力，Q 需要人工算出后输入

EJ——板桩的抗弯刚度

H1，H2——板桩后方和前方水位

Q0——后方均布荷载(10 kPa)

J0——锚杆所在处结点号

PT——锚杆力

GE——式(14.22)中的 $k_1 \sim k_{10}$

G——总劲度矩阵，以等带宽方式存贮

X——右端项

P、PN——单元侧压力及结点力

SOLVE——求解代数方程式的子程序

EM、ES——按式(14.24)算出的结点弯矩和切力

NI——迭代次数

【说明】

1. 105～110 形成板桩的总体劲度矩阵
2. 110～160 计算板桩上的土压力及荷载项
3. 160～170 解方程式及计算弯矩和切力
4. 170～180 计算板桩底端弯矩，如其值大于控制误差 0.2，需把板桩加长继续迭代，NI 为迭代次数
5. 180 以后计算锚杆力

```
      SUBROUTINE SHEP
      COMMON MS,F(10),C(10),W1(10),
     * W2(10),K1(10),K2(10),DZ(10),
     * JS(10),EJ,H1,H2,NQ,JQ(20),
     * Q(20),Q0,J0,PT
      COMMON /C1/MT,G(200,4),X(200)
      DIMENSION GE(10),P(100),
     * PN(100),Z(200),EM(200),
     * ES(200)
      NI=0
  100 Q1=Q0
      Q2=0.0
      DO 105 I=1,100
      X(I)=0.0
      DO 105 J=1,4
  105 G(I,J)=0.0
      DO 130 I=1,MS
      A=F(I)/2.
      D=DZ(I)/2.
      B=4.*D*C(I)
```

```
      F1=TAN(0.785-A)
      F2=TAN(0.785+A)
      F1=2.*D*F1*F1
      F2=2.*D*F2*F2*K2(I)
      G1=W1(I)
      G2=W2(I)
      C1=B*F1
      C2=0.
      IF(G2.GT.0.0001) C2=B*F2
      J1=1
      IF(I.GT.1) J1=JS(I-1)
      J2=JS(I)
      A=1.5*EJ/D/D
      B=EJ/D
      GE(1)=A/D
      GE(6)=A/D
      GE(2)=A
      GE(7)=A
      GE(3)=2.*B
      GE(10)=2.*B
      GE(5)=-A
      GE(9)=-A
      GE(4)=-A/D
      GE(8)=B
      Z1=0.
      IF(I.GT.1) Z1=Z2
      DO 120 J=J1,J2
      ZT=Z1+D
      Z2=ZT+D
      IRO=2*(J-1)
      DO 120 K=1,4
      IR=IRO+K
      DO 110 L=K,4
110   G(IR,L-K)=G(IR,L-K)+GE(L*(L-1)
     * /2+K)
      IF(ZT.GT.H1) THEN
      P1=F1*(Q+D*G1)-C1+2.0*D*(ZT-H1)
          ELSE
      P2=F1*(Q1+D*G1)-C1
      ENDIF
      IF(ZT.GT.H2) THEN
      P1=F1*(Q1+D*G2)+C2+2.*D*(ZT-H2)
      ELSE
      P2=F2*(Q2+D*G2)+C2
      ENDIF
      P(J)=P1-P2
      Q1=Q1+2.*D*G1
      Q2=Q2+2.*D*G2
      Z1=Z2
120   CONTINUE
130   CONTINUE
      DO 140 I=1,NQ
      J1=JQ(I)
140   P(J1)=P(J1)+Q(I)
      DO 150 J=1,MT
      IR=2*(J-1)+1
      A=P(J)/2.
      X(IR)=X(IR)+A
150   X(IR+2)=X(IR+2)+A
      P2=0.
      DO 160 I=0,MT
      IR=2*I+1
      Z(I)=X(IR)
160   P2=P2+Z(I)
      G(2*JO-1,1)=1.0E10
      CALL SOLVE
      DO 170 I=1,MS
      J1=1
      IF(I.GT.1) J1=JS(I-1)
      J2=JS(I)
      D=DZ(I)/2.
      A=1.5*E/D/D
      B=E/D
      DO 170 J=J1,J2
      IR=2*(J-1)+1
      C1=X(IR)-X(IR+2)
      C2=X(IR+1)+X(IR+3)
      EM(J-1)=A*C1+2*B*X(IR+1)+
     * B*X(IR+3)
      EM(J)=A*C1+B*X(IR+1)+
     *.2*B*X(IR+3)
      ES(J-1)=A/D*C1+A*C2
      ES(J)=-ES(J-1)
170   CONTINUE
      IF(ABS(EM(MT)).LT.0.2)
     * GOTO 180
      A=EM(MT)*0.01/(MT-JS(MS-1))
      DZ(MS)=DZ(MS)+A
      NI=NI+1
      GOTO 100
180   CONTINUE
      A=0.
      IF(JO.GT.0) A=P(JO)
      PT=A+ES(JO+1)-Z(JO)
      RETURN
      END
```

14.3.2 弹性地基梁方法

这是把板桩当作垂直放置的弹性梁，并按 Winkler 模型进行计算的方法，计算中假定墙上的土压力与变位成正比，但反力系数 $k(z)$ 可随深度 z 而增加。具体计算方法与水平承载桩类似，参看第 11 章，限于篇幅，此处从略。

14.3.3 有限元计算

由于柔性墙上的土压力分布相当复杂，用有限元进行变形分析就有一定的必要，特别在基坑开挖中，很快能取得实测成果，以便验证计算方法，所以这方面的工作很多。图 14.17 是一例按 Duncan 模型计算与实测的比较[9]。除计算模型外，分析中需注意下列特点：

① 施工过程模拟，包括墙前方的开挖和后方的回填；

② 支撑和锚着力的模拟，基坑开挖时的撑杆可以按刚性和弹性支承模拟，锚定板桩墙则宜把锚定板一起包括在分析范围内，锚杆可以按一维弹性杆模拟；

③ 由于撑杆和锚杆间隔一定距离才设置一根，因此，即使墙的纵向很长，严格说来也不是平面问题，通常取单宽墙按平面问题计算，并假定一根杆的锚着力按锚杆间距均匀分配，即单宽锚着力 $t=T/L$，L 为锚杆间距。

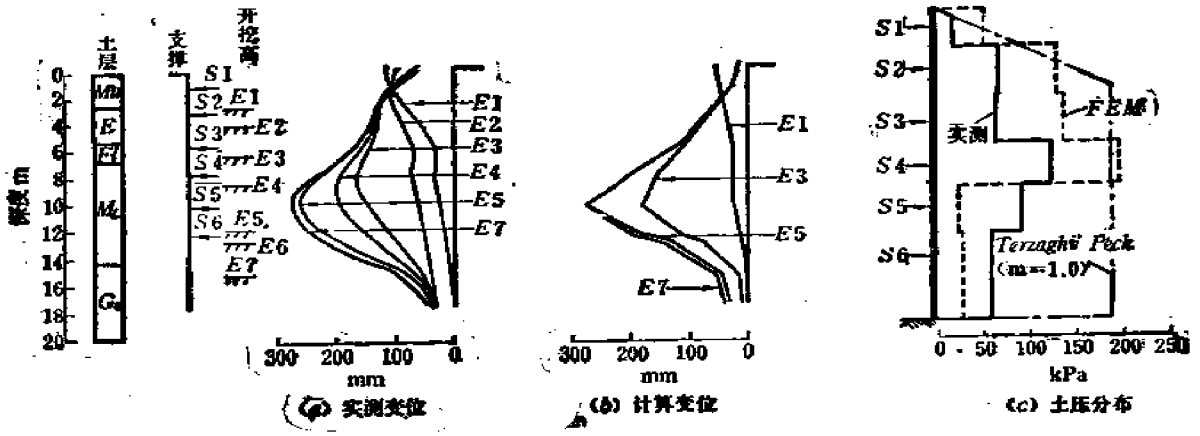


图 14.17 基元板桩墙有限元计算

图 14.18 为按上述方法简化为平面问题与按实际三维问题计算结果的比较[19]。由图可见，与空间问题支撑点断面和两支点中间断面相比，平面问题的结果的确介于两者之间，但就板桩设计至关重要的支撑点弯矩来说，按平面问题计算的结果大大偏小。

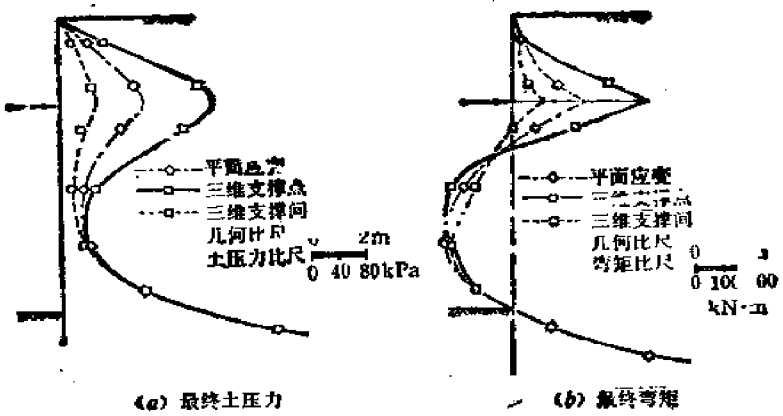


图 14.18 板桩墙三维计算

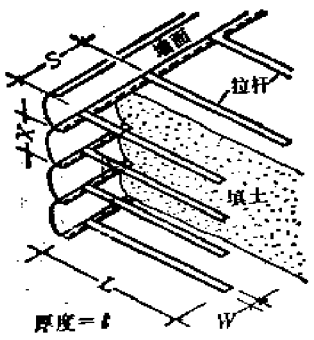


图 14.19 加筋土挡土墙的主要组成部分

14.4 加筋挡土墙

14.4.1 设计计算的主要问题

本节介绍加筋土挡土墙，其它通过筋条加固的土工问题限于篇幅从略。图 14.19 表示加筋土挡土墙的主要组成部分。

加筋土是具有垂直坡面的填土，与一般斜坡填土相比，要求地基有较大的承载力。设计中需要进行下述各项分析，以确保安全。① 拉筋的断裂分析；② 拉筋的抗拔分析；③ 加筋土的整体稳定分析；④ 支撑加筋土地基的下沉分析。

加筋土应修筑在填方地段，不宜用于滑坡、崩塌等工程地质

不良地段和地震高烈度区。填料宜用砂卵石、碎石等，不能用高塑性粘土、有机质土和极易风化的岩块。墙板可用十字形、矩形、槽形、六角形等钢筋混凝土板，金属墙面宜用柱状椭圆形板。拉筋宜采用片状钢筋混凝土制品、钢带、聚丙烯塑料等。塑料带因易蠕变，不宜用于支撑铁路荷载的加筋土。

14.4.2 拉筋断裂的分析计算

1. 墙面板上的侧压力

填土压力 σ_{x1} 按图 14.20*a* 计算，即

$$z<0.5H \qquad \sigma_{x1}=\gamma_2 K_a \beta \tag{14.26}$$

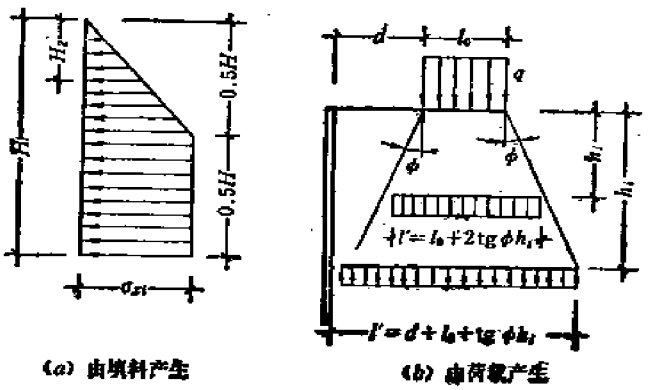
$$z\geqslant 0.5H \qquad \sigma_{x1}=0.5\gamma H K_a \beta \tag{14.26a}$$

其中：β——增大系数，在 1.5～1.8 之间选用。外荷载产生的侧压力 σ_{x2} 按图 14.20*b* 计算

$$\sigma_{x2}=\beta K_a \frac{ql_0}{l'} \tag{14.27}$$

作用于面积为 A 的单块墙背上的总压力 E_i 为

$$E_i=(\sigma_{x1}+\sigma_{x2})A \tag{14.28}$$



(a) 由填料产生　　(b) 由荷载产生

图 14.20 侧向应力

2. 拉筋强度验算

距墙顶 z_i 处的第 i 层拉筋的拉力 T_i 按下式计算

$$T_i=k\sigma_x L_x L_a \tag{14.29}$$

其中 $\sigma_x=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}$，$L_x$ 和 L_a 分别为拉筋之间的水平及垂直间距，k 为附加系数，通常用 1.2～1.5，如果 T_{max} 为算出的最大 T_i，则主筋的拉应力为

$$\sigma=\frac{T_{max}}{b(t-c)} \tag{14.30}$$

b 和 t 分别为筋条宽和厚度，c 为预留的锈蚀厚度，通常用 0.0015～0.002m。σ 必须小于容许应力 $[\sigma]$。

若片状钢筋混凝土拉筋采用环扣连接，应计算环扣的拉应力和剪应力。

14.4.3 拉筋的抗拔分析

拉筋的全长分成两段，一段位于主动区，一段为锚固区，主动区的宽度 L_a 假定为墙高的 0.3。墙顶上有斜坡时，L_a 按图 14.21 确定。单根拉筋的摩擦力，根据拉筋上下两面的摩阻力，按下式计算

$$S_f=2\sigma_x b L_b f \tag{14.31}$$

其中 σ_x 为拉筋处的垂直应力，b 为拉筋宽度，f 为摩擦系数，宜通过现场试验测定，初步估算时可用经验值 0.4。

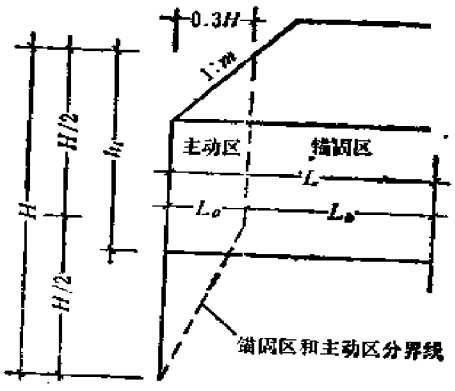


图 14.21 拉筋的有效锚固区

全墙的抗拔稳定系数 FS 按下式计算

$$FS=\frac{\Sigma S_{ti}}{\Sigma E_x} \tag{14.32}$$

其中 ΣS_{ti} 和 ΣE_x 分别为各层拉筋的摩擦力和侧压力

总和。FS 值原则上不小于 2.0，特殊情况下亦不得小于 1.5。

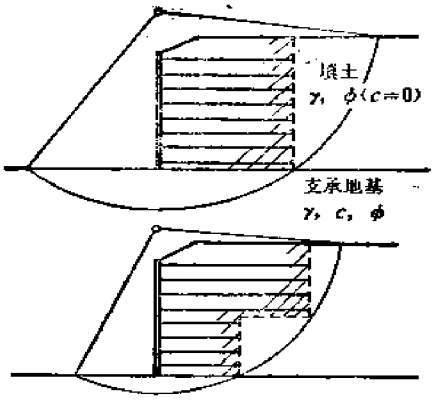


图 14.22 整体稳定分析

14.4.4 加筋土的整体稳定分析

整体稳定分析按圆弧法进行，一般情况的安全系数应大于 1.5，地震及施工时的稳定安全系数可放宽至 1.2。

当滑弧中包括筋条时，是否需要考虑筋条拉力产生的抗滑力矩，尚无统一的规定。一般情况下可按滑弧面不通过加筋区进行计算，如图 14.22。

14.4.5 支承加筋土地基的下沉分析

地基因加筋土自重和上部荷载而产生的下沉和不均匀下沉，应不超过根据加筋土的使用条件和墙面的变形允许量所确定的允许下沉量和不均匀下沉量。根据经验，允许的纵向倾斜度为：混凝土墙面——$\frac{1}{100}$；金属墙面——$\frac{2}{100}$。

14.5 装配式锚定挡土墙

14.5.1 结构形式

与第三节的锚定板桩墙不同，这里的墙体由离散的挡土板装配而成，如图 14.23。挡土板可用钢筋混凝土槽形板、空心板、矩形板或拱形板。土压力通过挡土板传给肋柱，后者通过锚杆拉住，也可以不设肋柱，把拉杆与挡土板直接连接。

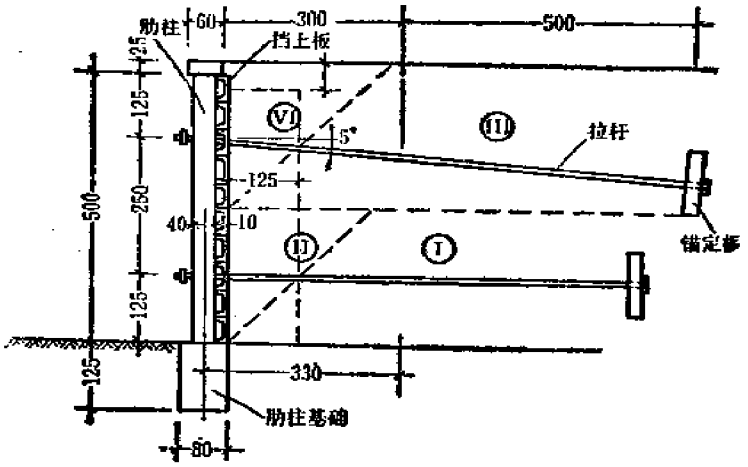


图 14.23 装配式挡土墙的结构

墙背填土宜用砂性土，如用粘性土，塑性指数不应超过 10%，墙背有地下水浸入时，应设置反滤层。

14.5.2 构件计算

1. 挡土板的计算

挡土板上土压力的计算方法参见 14.4.2。

上述土压力按均布荷载作用于挡土板上，有肋柱的挡土板可以按纵向延伸的简支梁设计；挡土板直接与拉杆连接时，可按单支点双向悬臂板设计。挡土板的计算跨度为其净跨加

板的一个搭接长度。

由于墙背上土压力从上到下增大，挡土板的厚度也可从上到下增加，但规格不宜过多。

2．肋柱计算

肋柱承受挡土板传来的土压力，由拉杆及基础支撑，可按与基础连接处为铰支的连续梁进行设计。

3．钢拉杆计算

根据肋柱计算出的支座反力就是钢拉杆的拉力 T，拉杆直径 d 可按下式确定。

$$d=\frac{2}{100}\sqrt{\frac{T}{\pi[\sigma]}}+0.2\text{ cm} \tag{14.33}$$

其中$[\sigma]$为钢材的容许应力，0.2cm 为安全储备量。

4．锚定板及钢垫板计算

锚定板和钢垫板承受锚杆拉力，按中心有支点的单向受弯构件计算。

锚定板的面积根据拉杆拉力除以锚定板单位面积的容许抗拔力$[p']$确定。$[p']$应通过现场试验决定，如无试验资料，也可用下列经验值。

埋置深度 3～5 m 时$[p']$=100～120 kPa

埋置深度 5～10 m 时$[p']$=130～150 kPa

对埋置深度小于 3 米的锚定板，尚应按下式计算板前土体的被动土压力

$$[P]=\frac{1}{2}\gamma H^2(K_p-K_a)B \tag{14.34}$$

式中 B 为板宽，H 为埋置深度。

14.5.3 锚杆长度的验算(Kranz 验算法)

前面计算土压力和锚杆拉力时，假定主动滑裂面通过墙面(肋柱)的底端。但是，如果锚杆长度不够，滑裂面可能后移，使一部分锚定板落入滑裂范围之内。这样，前面算出的锚杆力就不能发挥出来。为了防止这种破坏的可能，需要对各层锚杆的长度逐一进行验算。下面以双层锚杆为例说明之。

图 14.24 为上层锚杆较短时可能发生的两种破坏形式：a——沿滑裂面 bc 滑动，锚杆力A_1失效；b——沿滑裂面 bf 滑动，A_1 和 A_2 均失效。两种破坏的安全系数分别按下式确定。

$$FS_{(bc)}=\frac{E_{AH}-E_{1H}+(G-E_{AV}+E_{1V})\operatorname{tg}(\varphi-\alpha_1)}{A_{1H}} \tag{14.35a}$$

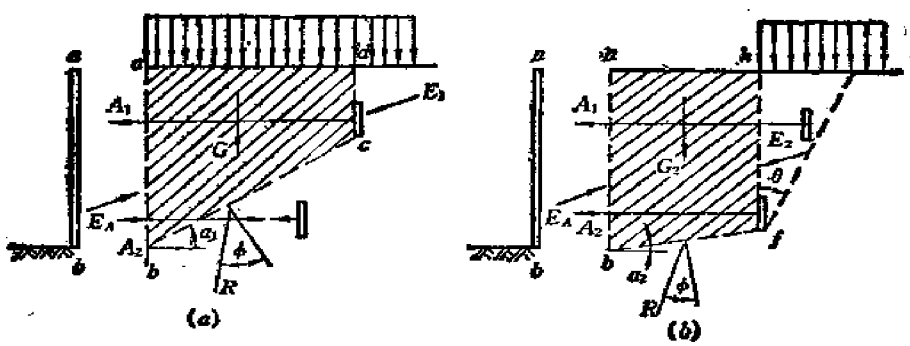


图 14.24 上层锚杆较短时的稳定验算

$$FS_{(bf)}=\frac{E_{AH}-E_{2H}+(G_2-E_{AV}+E_{2V})\operatorname{tg}(\varphi-\alpha_2)}{A_{1H}+A_{2H}} \tag{14.35b}$$

式中 A_{1H} 和 A_{2H} 分别为上层和下层锚杆力的水平分量；E_{AH} 和 E_{AV} 为墙上土压力反力的水平和垂直分量；E_{1H}、E_{1V} 和 E_{2H}、E_{2V} 为两种滑体后方土压力的水平和垂直分量；G 和 G_2 为包括表面荷载在内的滑体重量。

图 14.25 为下层锚杆较短时可能发生的破坏形式：a——沿滑裂面 bf 滑动，锚杆力 A_2 失效；b——沿裂面 bfc 滑动，A_1 和 A_2 均失效。相应的安全系数按下式计算

$$FS_{(bf)}=\frac{E_{AH}-E_{2H}+(G_2-E_{AV}+E_{2V})\operatorname{tg}(\varphi-\alpha_2)}{A_{2H}} \tag{14.36a}$$

$$FS_{(bfc)}=\frac{E_{AH}-E_{1H}+(G_2-E_{AV}+E_{2V})\operatorname{tg}(\varphi-\alpha_2)+(G_1-E_{2V}+E_{1V})\operatorname{tg}(\varphi-\alpha_3)}{A_{1H}+A_{2H}} \tag{14.36b}$$

式中符号含义同上。

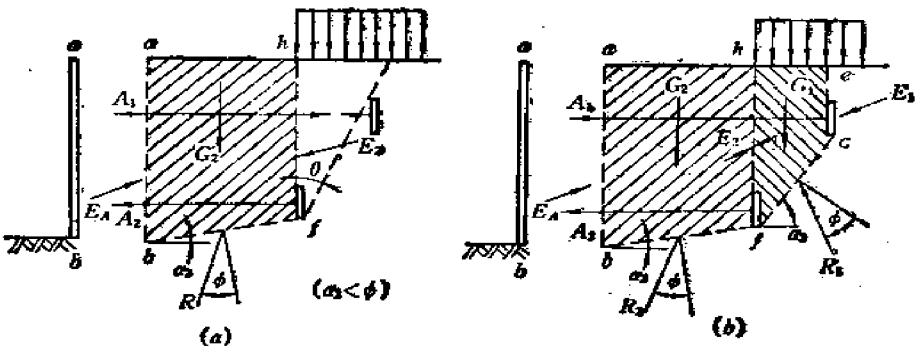


图 14.25 下层锚杆较短时的稳定验算

上述公式中土压力算法同第一节刚性墙。土面上的活荷载位置应按最不利组合确定，即当滑裂面倾角 α_i 大于 φ 角时应布置在前方(图 14.24)，否则布置在后方(图 14.25)。

14.5.4 稳定计算

为了防止整体失稳及过大的变形，需要将墙身连同锚定板的一部分或全部及所包含的土体进行整体稳定分析，分析的原则与刚性挡土墙相同，即整体滑移，包含地基在内的整体滑动及绕地基中一点的旋转倾覆，至于绕前趾的倾覆，一般当然不会发生。

1. 整体滑移验算

如图 14.26，设墙面与锚定板中心连线所包围的土墙 $ABCD$ 沿 BC 面发生滑移，则安全系数 FS 可由下式计算

$$FS=\frac{(\Sigma N-\Sigma E_H\operatorname{tg}\alpha_0)\operatorname{tg}\varphi}{\Sigma E_H+\Sigma N\operatorname{tg}\alpha_0} \tag{14.37}$$

其中 $\Sigma N=N_s+E_V$ 为假想土墙 $ABCD$ 的总重加上 CD 上的垂直土压力，E_H 为 CD 面上的水平土压力。计算土压力时墙摩擦角 δ 可取 $\left(\frac{1}{2}\sim\frac{2}{3}\right)\varphi$，$FS$ 值应不低于 1.8。

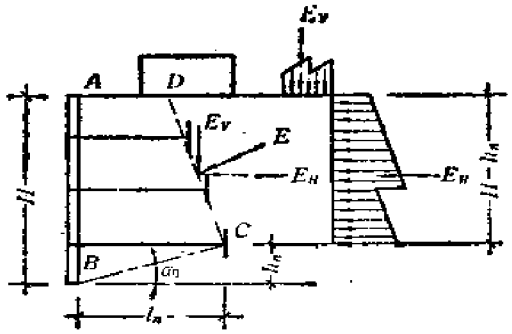


图 14.26 整体滑移分析

上述分析适用于锚定板分布均匀，各层锚定板面积之和不小于挡土板面积的 20%，且锚定板连线的斜率不大于 1:0.25 的情况。

2. 墙体与地基整体滑动验算

连同地基一起滑动的稳定分析可按圆弧法进行，当锚定板位于试算圆弧以外时，需要计入锚杆力的抗滑力矩。

锚杆力的计算可以参照式 (14.21) 灌浆锚杆的公式。例如图 14.27 中下面一层面积为 A 的锚定板的锚杆力为

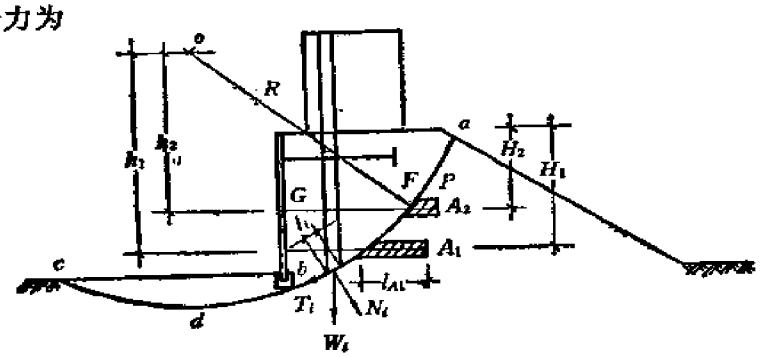


图 14.27 圆弧滑动分析

$$T_{A1}=\pi d_e l_{A1}(c+K_0\gamma H_1\operatorname{tg}\varphi) \tag{14.38}$$

式中 d_e 为锚定板的等代直径，$d_e=\sqrt{\dfrac{4A_1}{\pi}}$。安全系数的计算同条分法，即

$$FS=\frac{BR(c_i\Sigma l_i+\Sigma N_i\operatorname{tg}\varphi_i)+\Sigma(T_{Ai}h_i)}{BR\Sigma T_i} \tag{14.39}$$

式中 B 为肋柱与肋柱的间距。通过肋柱基础边缘 b 点假定不同的圆弧进行分析，所得的最小安全系数 FS 不应低于 1.8。

铁道科学研究院按上述原理编成计算程序 [12]，并对 $c=25$ kPa 和 $\varphi=25°$ 的填土计算了几种典型情况的墙高与拉杆强度关系曲线。图 14.28 是其中一例，适用于墙顶水平的情况，h 和 l 分别是拉杆距肋柱底的高度及其长度。图 14.29 是单线路肩墙的一个实际例子，墙高为 8.82 m，使用四根拉杆，对每根拉杆根据 h 值即可查出其长度。对于 $H_{墙}$ 不为零的情况要查另外的图表。

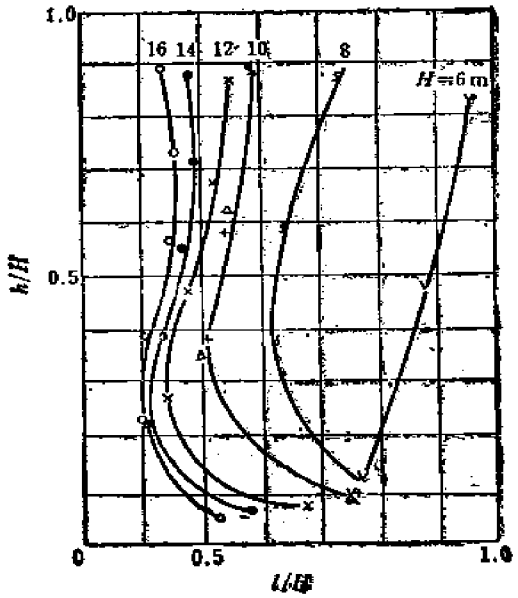


图 14.28 拉杆长度与墙身高度关系曲线

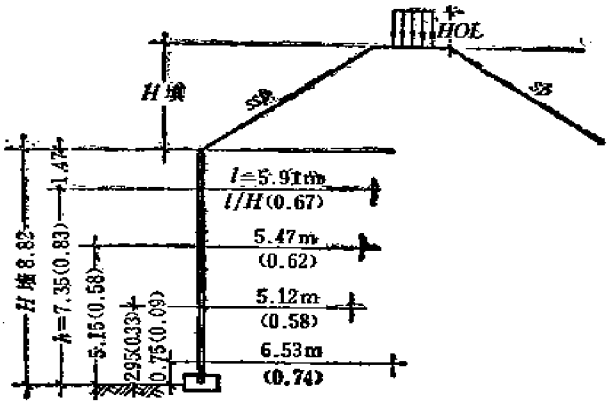


图 14.29 设计实例

14.6 抗滑桩和桩的抗滑作用

14.6.1 设计原则

抗滑桩适用于加固具有明显滑动趋势、且滑坡体较薄、滑动面以下为稳定岩土地层的滑坡地段。桩的间距宜为桩宽或桩径的3～5倍，最大的不宜超过15米，抗滑桩通常用挖孔灌注桩，截面多为矩形，高宽比为1.5～2.0。

抗滑桩的设计包括锁桩滑动验算和绕桩滑动验算。前者发生于桩较细长或在稳定地层中埋置深度不够的情况，当滑坡体发生滑动或只产生一定蠕变时桩即断裂或倾倒。后者发生于桩较牢固但间距较大的情况，土体滑动时桩仍安然无恙。

设置在斜坡上的桩排虽然主要为承受垂直荷载而设计，但对斜坡的稳定能起一定的抗滑作用，也可以按抗滑桩的原理进行计算。

14.6.2 滑坡体整体稳定验算

整体稳定验算按桩和土同时到达极限状态的原则进行。通过计算得出滑坡推力，也就是维持滑坡体稳定要求桩提供的抗力。

滑坡推力常用传递系数法计算，但此法的设计思想不够明确[14]。下面将根据极限设计的原则加以改进。

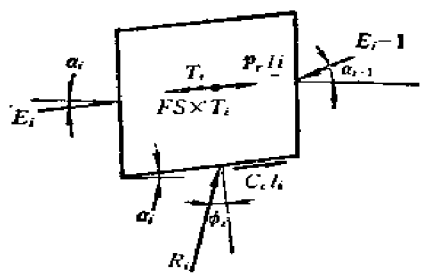


图 14.30 滑块上的作用力

滑坡体底面多随下卧层的分布呈折线形，宜通过工程地质调查首先确定。然后把滑坡体分成几大块，对每块建立下列极限平衡方程(图14.30)。

$$E_i = FS\cdot T_i - N_i \operatorname{tg}\varphi_i - c_i l_i - p_r l_i + E_{i-1}\psi \quad (14.40)$$

式中 $\psi = \cos\Delta\alpha_i + \sin\Delta\alpha_i \operatorname{tg}\varphi_i$ 称为传递系数，$\Delta\alpha_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i$，$T_i = W_i \sin\alpha_i$，$N_i = W_i \cos\alpha_i$，$W_i$ 为土块重，l_i 为滑面长，c_i 和 ϕ_i 为滑面上的凝聚力和摩擦角，p_r 为分配在单位长度上的桩的极限抗力。安全系数视工程情况取1.05～1.25。

计算分两步进行，第一步先确定强度参数 c_i 和 ϕ_i。对正待处理的处于极限状态的滑坡，如缺乏试验资料，可采用下列试算法，取 $FS=1$，$p_r=0$，然后假定不同的 c_i 和 ϕ_i，反复进行试算，直至最后一块推力等于零为止。第二步是要求设置抗滑桩后滑坡的整体安全系

数达到某一规定的 FS 值，计算中先假定不同的桩抗力 p_r 进行计算，直至最后一块推力等于零。

以图 14.31 为例，设要求 $FS=1.25$，计算工作可以列表进行(表 14.2)。试算④次

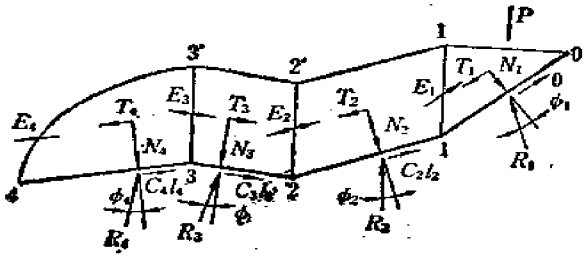


图 14.31 整体滑动验算

表 14.2 滑坡推力计算

块号	W_i kN	α_i	l_i m	c_i kPa	ϕ_i	$\tg\phi_i$	c_il_i kN	N_i kN	$N_i\tg\phi_i$ kN	T_i	$FS\cdot T_i$	$\Delta\alpha_i$	ψ_i
1	1500	40°	15	0	20°	0.364	0	1149	418	964	1205	—	—
2	2500	20°	15	2	18°	0.325	30	2442	794	889	1111	20°	0.829
3	1500	−5°	10	2	10°	0.176	20	1592	281	−139	−139*	25°	0.832
4	2000	10°	17	3	15°	0.268	51	1970	528	347	434	−15°	1.035

块号	p_rl_i					ψE_{i-1}					E_i				
	①	②	③	④	⑤	①	②	③	④	⑤	①	②	③	④	⑤
1	0	150	60	61.5		—	—	—	—		787	637	727	725.5	
2	0	150	60	61.5		652	528	603	601.4		939	665	830	827	
3	0	100	40	41		781	553	690	683		341	13	210	207	
4	0	170	68	70		353	14	218	214		208	−305	5	−0.7	
p_r	0	10	4	4.1											

* T 为负，代表抗力，故不乘以 FS，这也是目前流行算法的一个缺点，更合理的方法是式(14.40)中 T_i 不乘 FS，而把 c_i 和 φ_i 除以 FS。

即满足要求，求出的 $p_r=4.1$ kPa，乘以桩的横向和纵向间距 L_x 和 L_y，即得每根桩承担的极限推力 P_r

$$P_r=p_rL_xL_y \tag{14.41}$$

14.6.3 绕桩滑动验算

以上的桩土作用力 p_r 是维持滑坡体稳定要求桩提供的。但是，如果桩的间距过大，土体可能绕过桩而下滑。因此需要通过绕流分析计算桩对土最多能提供的抗力 p_{max}，并根据 $p_r\leqslant p_{max}$ 的原则设计桩的间距。

日本建设省土木研究所曾假定桩后存在一个扩散角为 $\alpha=45°+\varphi/2$ 的被动土压力区，提出下列计算土面下某一深度 z 的水平土压力公式[15]

$$p_h=(K_p\gamma z+2\sqrt{K_p}c)\left(D+2z\tg\alpha\sin\alpha\frac{\pi\alpha}{180°}\right) \tag{14.42}$$

或积分后得总压力

$$P_{max}=2H^2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha\frac{\pi\alpha}{180^\circ}\left(\frac{1}{3}K_p\gamma H+\sqrt{K_p}c\right)+DH\left(\frac{1}{2}K_p\gamma H+2\sqrt{K_p}c\right)\quad(14.42a)$$

由图 14.32 可见，上述假设相当于把桩的作用看作是包括 $abce$ 土体在内的挡土墙，把宽度 in 的土体完全挡住，P_{max} 几乎与 H 的三次方成正比。如果滑坡体较厚，这样算出的 P_{max} 无疑太大。因此，我们建议按 8.7.4 中式 (8.61) 和 (8.62) 计算，按这些公式算出的 P_{max} 将与 H 的二次方成正比。为方便应用，把这两式重写如下

方桩 $$p_h=c_a(p_0+\sigma_a)A+2\operatorname{tg}\varphi(p_0+\sigma_a)B \quad(14.43a)$$

圆桩 $$p_h=c_d(p_0+\sigma_a)D \quad(14.43b)$$

各种 φ 角下的系数 c_a 和 c_d 见表 14.3。

表 14.3 桩的阻滑系数

φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
c_a	0.452	0.922	1.430	2.000	2.664	3.462	4.455	5.732	7.433
c_d	0.497	1.012	1.566	2.182	2.892	3.737	4.778	6.102	7.853

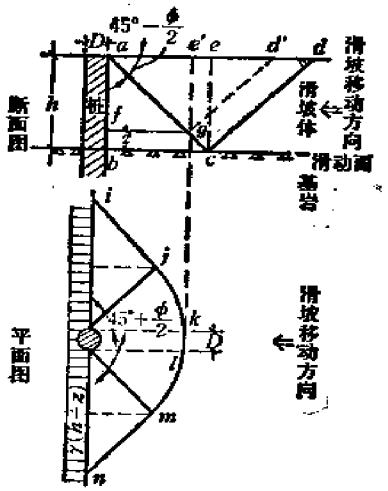


图 14.32 日本土木省的计算图式

设桩在纵横向上的间距相等，$L=L_x=L_y$，或横向间距 L_x 已定，则根据上述绕流压力公式求得的 P_{max}，计算桩的最大间距如下：

$$L_{max}=\sqrt{\frac{P_{max}}{p_r}} \quad(14.44a)$$

或

$$L_{max}=\frac{P_{max}}{p_rL_c} \quad(14.44b)$$

实际采用的间距应除以安全系数。

例如，对 $\varphi=30^\circ$、$c=0$ 和 $\rho=2\times10^3\text{kg/m}^3$，$K_0=0.5$ 的情况，按式(14.42a) $P_{max}=60\left(1.05H+\frac{D}{2}\right)H^2$，而按式(14.43b) $P_{max}=18.7DH^2$，当 $p_r=4.1$ 和 $H=10\text{m}$、$D=0.4\text{m}$ 时，两种公式计算的 L_{max} 分别为 125m 和 13.5m，前者显然大得不合理。

14.6.4 桩的结构计算

按式(14.41)求出每根柱上的总推力 P_r 后，可根据土质情况假定矩形、三角形或梯形分布计算桩的内力。一般对粘性土按矩形分布，砂土或松散堆积体按三角形分布，介于两者之间时按梯形分布，然后按水平承载桩进行桩身的变形和内力计算。对弹性桩一般按 Winkler 模型用反力系数法进行，详见第十一章。潘家铮曾编制了一些图表供设计时查用[14]。

当符合下列条件时，则按刚性桩计算。地基反力系数按矩形分布时

$$\sqrt[4]{\frac{kB_p}{4EJ}}\cdot h_2\leqslant1.0 \quad(14.45)$$

地基反力系数按三角形分布时

$$\sqrt[5]{\frac{mB_p}{EJ}}\cdot h_2\leqslant2.5 \quad(14.45a)$$

式中 h_2——滑动面以下桩长；EJ——桩的截面刚度；B_p——桩的计算宽度，对矩形桩

$B_p=B+1$，对圆形桩 $B_p=0.9(D+1)$；k——反力系数；m——反力系数随深度而增加的系数。

14.6.5 锚固段地基应力验算

前面的验算保证了滑坡体的稳定和桩不发生断裂，但如果锚固段不够坚固，桩就可能倾倒。这种破坏可以通过地基横向应力验算来防止。

对包括碎石在内的土层地基，按前面水平承载桩计算，各深度横向压应力应满足下列条件

$$\sigma_z\leqslant\frac{4}{\cos\varphi}[(\gamma_1H+\gamma_2z)\operatorname{tg}\varphi+c] \tag{14.46}$$

式中 z 为滑面以下验算点深度，H 为桩所在点滑体高，γ_1 和 γ_2 分别为滑体和地基土容量，c 和 φ 为地基的凝聚力和内摩擦角。

对岩石地层则应满足下列条件

矩形桩 $$\sigma_{max}\leqslant K\eta R \tag{14.47a}$$

圆形桩 $$\sigma_{max}\leqslant\frac{1}{1.27}K\eta R \tag{14.47b}$$

其中 R 为岩石单轴抗压极限强度，K 为水平向换算系数，根据岩层构造采用 0.5～1.0，η 为折减系数，通常用 0.3～0.5。

14.6.6 斜坡上桩台的稳定验算

对于斜坡上桩排的抗滑作用，也应当区分绕桩滑动和断桩滑动两种情况。

对长桩大跨的桩排，桩的刚度较大而不易破坏，需进行绕桩滑动分析。此时，可按式(8.61)或(8.62)算出每根桩对土的抗力，除以桩排间距 L 即为作用于每米长滑动土体上的抗力，把这部分抗力产生的抗滑力矩计入安全系数公式即可。

对于断桩滑动，目前流行的算法是假定滑动面上作用一个切桩力，计算滑弧安全系数时把每根桩的切桩力所产生的抗滑力矩计入[16]。切桩力是根据桩在滑动面以下某处被弯断或被掘出(当滑动面以下的桩长太短时)的原则决定。滑动面以下单位桩长所受的力为桩前方的被动土压力与后方的主动土压力之差，即

$$p_e=\gamma z(K_p-K_a)\beta D \tag{15.48}$$

$\beta=1\sim3$ 为土压力增大系数，z 为地面到滑动面的深度。由于滑动面深度较大，土压力随深度变化忽略不计。按简支梁计算的切力 P 和最大弯矩 M 如下(图 14.33)

$$P=R=\frac{p_ez_0}{2} \tag{14.49}$$

$$M_{max}=\frac{p_ez_0^2}{8} \tag{14.50}$$

弯断时 M_{max} 等于桩的允许弯矩 $[M]$，由此求出 z_0 后代入式(14.49)可得：

$$P_1=\sqrt{2p_e[M]} \tag{14.51}$$

掘出时 $z_2=1.25\,z_0$，此时的切力为

$$P_2=0.4p_ez_2 \tag{14.52}$$

计算的切桩力取 P_1 和 P_2 中的较小者。

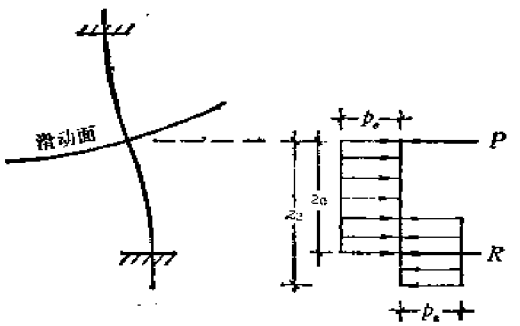


图 14.33 切桩力计算

上述方法采用的滑动面以下土体处于被动或主动土压力状态可能夸大了桩上的作用

力，而且用简支梁的假设计算桩力也缺乏根据。下面介绍沈珠江建议的另一种基于极限分析原理的断桩滑动分析法[17]。该法采用的破坏图式是，在土体中发生一个剪切流动带，同时每根桩在桩顶接头处和剪切带的上、下缘发展三个塑性铰(图 14.34)。

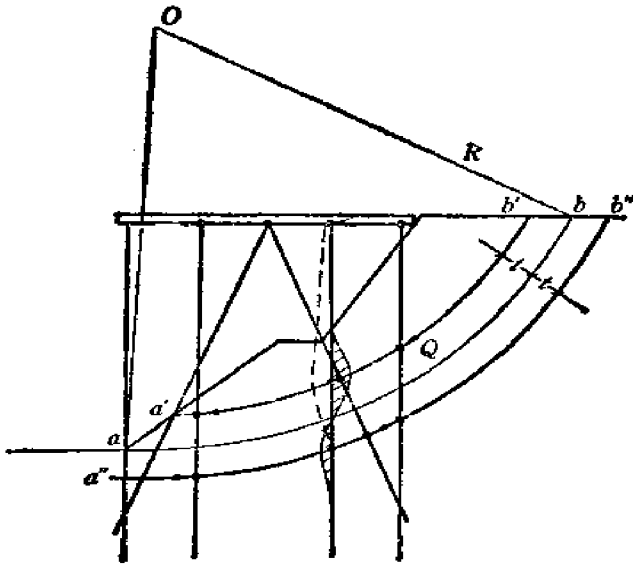


图 14.34 断桩滑动分析

分析步骤如下：

① 先假定没有桩的作用，求得最危险滑动面位置 ab，相应的滑弧半径 R 和滑动力矩 M_s 及抗滑力矩 M_r；

② 选定一流动带厚度 $2t$，求出沿 $a'b'$ 面的滑动力矩 M_s' 和抗滑力矩 M_r'；

③ 根据桩的抗弯力矩 M_0，按照简支梁公式计算，土对第 i 根桩的最大作用力

$$Q_i = \frac{l_i' + l_i''}{2\,tl_i'} M_0 \qquad (14.53)$$

式中假定 Q_i 为集中力并沿 $a'b'$ 面作用，l_i' 为桩顶到 $a'b'$ 面长度，l_i'' 为 $a'b'$ 与 $a''b''$ 面之间的桩长；

④ 按下式分别求出沿 ab 和 $a'b'$ 剪裂的安全系数。

$$FS = \frac{M_r + \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} Q_i(R-t)}{M_s} \qquad (14.54a)$$

$$FS' = \frac{M_r' + \frac{1}{2L}\sum_{i=1}^{n} Q_i(R-1.5t)}{M_s'} \qquad (14.54b)$$

式(14.54b)中假定 Q_i 的一半作用在 $a'b'$ 面以上的桩段上，其作用点在 $a'b'$ 面以上 $0.5t$ 处。上式中 L 为桩排间矩，n 为桩的总数，但不考虑坡址附近的桩，那里 $a'b'$ 面以上桩的入土深度小于 t，不起抗滑作用。

如果第二步中选定的流动带厚度 $2t$ 是正确的话，则应得出 $FS' = FS$，因为根据假设 ab 面和 $a'b'$ 面上应力都处于极限应力状态。如果两者不等，则必须调整 t 值，重新计算。如果 $FS' > FS$，t 值需适当减少，否则适当增加，直至 $FS' = FS$，即为设计的安全系数。

参 考 文 献

1. W. C. Huntington 著，张式深等译，土压力和挡土墙，人民铁道出版社，北京，1965。
2. I.K.Lee 等著，俞调梅等译，岩土工程，中国建筑工业出版社，北京，1986。
3. K.H. 罗斯科，应变在土力学中的影响，水利水运科技情报，1973 年增刊 6。
4. G. W Clough, J.M.Duncan, 挡土墙性能的有限元分析，水利水运科技情报，1973 年增刊 2。
5. H.B Seed &Whitman R.V., Design of earth retaining structures for dynamic load, Proc, Speciality Conf. on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, pp 103—147, 1970.
6. 魏汝龙，挡土墙上的地震土压力和地震加速度分布，水利水运科学研究，1982 年 2 期。
7. Prakash 著，王余庆等译，土动力学，冶金出版社，1984。
8. 沈珠江，汪兆京，板桩岸壁计算程序，水利水运科技情报，1985 年 4～5 期。

9. B.B.Broms, L.H.Wong & K.S.Wong, Experience with finite element analysis of braced excavation in Singapore, 2nd Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, p. 325, 1986.
10. Matos Fermandes M.,Three dimensional analysis of flexible earth—retaining structures,Ibid, p.433, 1986.
11. 铁道部第一设计院主编，铁路工程设计技术手册<路基>第七编，挡土墙，中国铁道出版社，北京，1984。
12. 专题情报资料，加筋土及锚杆支护——锚定式支挡建筑物——77-35，铁道部科学技术情报研究所，1977。
13. 日本国有铁道编，土工结构物设计标准和解说，中国铁道出版社，北京，1982。
14. 潘家铮，建筑物的抗滑稳定和滑坡分析，水利出版社，1980。
15. 山田刚二等，滑坡和斜坡崩坍及其防治，科学出版社，1980。
16. 天津大学等编，港口工程(下册)，人民交通出版社，1979。
17. 沈珠江，高桩码头岸坡的极限分析，南京水利科学研究院研究报告汇编，土工研究第一分册(1966～1978)，p.207，1985。

第十五章　土工问题的反分析

15.1　概述

通常，在求解数学方程时，已知条件是工程问题的几何参数，包括土层、荷载、约束等的几何尺寸、荷载条件、材料本构模型及其需要的参数等。根据上述已知条件，通过解析法或半解析法或数值法，求解物体的位移、应力，有时还有孔隙水压力等。这一求解过程常常称为正分析过程。

在土工问题的分析中，合理地选用土的本构模型以及较为精确地确定模型参数具有重要的意义。通常，土的模型参数是由室内试验确定的。然而由于土样在取土、运输过程中的扰动，现场和试验两者边界条件的差异，以及地基土分布的非均质性，由室内试验测定的参数往往与实际值存在较大差异。在实际工程中不确定因素更多。因此，除了室内试验和现场观测之外，还需要分析者具有丰富的实践经验来对参数加以判断。而且，对复杂的工程这样做常常还是不够的。为了解决这一问题，太沙基提出了观测-设计方法，即动态的设计方法，在建筑物早期的开挖或建造过程中进行一系列的现场观测，然后，根据现场观测的结果修改土的参数，以便进行较为精确的分析以修改原设计。

反分析法是利用工程中实测的某些值(如位移、孔隙水压力和应力等)，通过数值计算确定土层的参数，进而使分析的结果尽可能地反映工程的实际情况。反分析法是太沙基观测方法的提高。近年来，反分析法在土工问题分析中得到了愈来愈多的应用。

土工问题中的反分析法主要有三种类型，逆分析法、直接分析法和概率统计法。以下逐节对这三种类型的反分析法作一简要介绍。然后，在本章最后一节介绍一个应用实例，采用反分析直接分析法确定一土堤地基固结过程中的参数情况。

15.2　逆分析法

逆分析法需要变换通常平衡方程的顺序，将所要求的参数分离出来，然后根据实际观测值(如位移、孔隙水压力或应力等)以及其它已知条件(如荷载等)求解出需求的参数。以有限元分析为例，逆分析法需要变换通常形式的有限元分析的平衡方程，分离出所求的参数，从而推导出新的方程，求出所求的参数。所求的参数不同，应用的本构模型不同，均需要重新推导计算方程。下面通过两种情况介绍反分析逆分析法的基本思路和分析问题的方法。

15.2.1　材料参数的逆分析

这里介绍根据有限单元法反分析材料弹性参数并采用最小二乘法确定未知弹性参数的优化值的方法。

对于线弹性体，在有限元分析中，单元劲度矩阵 K^e 和待求参数间成线性关系。对各向同性材料，可以用体积模量 B 和剪切模量 G 来描述材料特性。单元劲度矩阵可表示为

$$K^e = BK_B^e + GK_G^e \tag{15.1}$$

集成后的总劲度矩阵K为

$$K=\sum_{i=1}^{2n}p_iK_i \tag{15.2}$$

式中 n——材料种类数，$2n$为未知材料参数总数；

p_i——未知材料参数；

K_i——当其它参数为零，而第i个参数为1时的集成劲度矩阵。

若在土层中有m个实测点，在划分有限元网格时这些点应选在网点上。首先，将有限元平衡方程按实测位移点和未知位移点分离如下式所示：

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1^*\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix} \tag{15.3}$$

式中 U_1^*——实测位移向量；

U_2——未知位移向量；

F_1，F_2——对应的结点荷载向量。

将式(15.3)展开，消去U_2，得

$$(K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})U_1^*=F_1-K_{12}K_{22}^{-1}F_2 \tag{15.4}$$

记

$$Q=K_{12}K_{22}^{-1} \tag{15.5}$$

式(15.4)可改写为

$$(K_{11}-QK_{21})U_1^*=F_1-QF_2 \tag{15.6}$$

将式(15.2)代入上式，得

$$\sum_{i=1}^{2n}p_ir_i=F_1-QF_2 \tag{15.7}$$

式中

$$r_i=(K_{11,i}-QK_{21,i})U_1^* \tag{15.8}$$

式(15.8)中的劲度矩阵可由式(15.3)中的子矩阵K_i求得。

集成所有未知材料参数可得一个$2n$阶向量P，集成向量r_i可得一个$m\times 2n$阶矩阵R。

$$P=[p_1\ \ p_2\ \cdots\ p_{2n}]$$

$$R=[r_1\ \ r_2\ \cdots\ r_{2n}]$$

则方程式(15.7)可改写成

$$RP=F_1-QF_2 \tag{15.9}$$

这就是最后得到的方程。由于劲度矩阵K为待求材料参数P的函数，故Q矩阵也是材料参数P的函数。因此，方程式(15.9)无法直接求解，而需要采用迭代法求解。另外，式(15.9)的解存在的必要条件为实测的位移数m必须大于或等于待求材料参数总数$2n$。

对于$m>2n$的情况，式(15.9)可采用基于最小二乘法的迭代法求解。

设材料参数向量P取一初值，则可以计算R，Q矩阵。在式(15.9)中引入向量P，则误差函数ε可由下式确定：

$$\varepsilon=(RP-F_1+QF_2)^T(RP-F_1+QF_2) \tag{15.10}$$

由最小二乘法求上述误差函数ε对P的最小值，可得下式：

$$R^TRP=R^T(F_1-QF_2) \tag{15.11}$$

解方程式(15.11)可以得到一个新的向量 P。再由新的 P 向量求矩阵 R、Q，代入式(15.11)，重新解式(15.11)。如此迭代，直到两次求出的材料参数向量 P 充分接近，小于某一给定的误差限定值，这时所得的向量 P 即为所求的材料参数向量。

15.2.2 土压力的逆分析

首先举一个简单的例子，对一垂直板桩墙沿深度实测了一些点的水平位移，现采用反分析法求作用在板桩上的土压力分布。设在板桩上一些不同的高度 z，测得一些相应的板桩水平位移值 y，根据板桩实测水平位移值，可以求出一个近似的板桩位移函数。例如，位移函数可用下述三角级数表示。

$$Y(z)=\sum_{i=1}^{n}[a_i\sin(i\pi z/L)+b_i\cos(i\pi z/L)] \tag{15.12}$$

式中 L——板桩长度；

n——选用的三角级数项数。

若实测的板桩水平位移数 $m\geqslant 2n$，则三角级数中的未知系数 a_i 和 b_i 可由最小二乘法的曲线拟合法求得。确定了未知系数 a_i 和 b_i，就确定了板桩的位移函数 $Y(z)$。

板桩的位移函数 $Y(z)$ 确定后，由梁的弹性弯曲方程可以求出作用在板桩上的土压力分布 $P(z)$。

$$EJY^{\mathrm{IV}}(z)=P(z) \tag{15.13}$$

式中 EJ——板桩的抗弯刚度。

上述反分析方法的缺点在于需要对结构物的近似位移函数多次求导数，这就加大了由量测误差所决定的位移函数 $Y(z)$ 的原始误差的影响。因此，应用上述方法时，除非实测位移值的精度非常高，所得出的位移函数能与实际情况比较接近。否则，最后求得的土压力分布误差将是比较大的。另外，在上述方法中，实测值均是结构物的位移。若实测值除位移值外还包括结构物上一些点的土压力值，就需要采用另外的方法进行反分析。

下面介绍一种基于有限元法计算的土压力的逆分析法。

考虑一挡土结构，将挡土结构以及土的单元分成 n_e 组。第 i 组单元的未知土压力的法向和切向分量可以用某些合适的函数的线性组合来近似表示：

$$q_i=G_i(X_i)a_i \tag{15.14}$$

式中 i——脚标 i 为单元组号；

q——土压力分量向量；

G——近似函数矩阵；

a——未知系数向量；

X——坐标向量。

用 N_i 表示第 i 组单元的联系单元内位移分布与单元结点位移的形状函数矩阵，相应于土压力分布的结点力矢量可定义为下列积分，

$$f_i=\int_{A_i}N_i^TT_iq_i\mathrm{d}A \tag{15.15}$$

式中 A_i——第 i 组单元表面面积；

T_i——联系局部坐标中与整体坐标中土压力分量的转换矩阵。

将式(15.14)代入式(15.15)，并对各组单元同样处理，可以得到整个结构的结点力 f 与未知系数向量 a 的关系，记作

$$f = Sa \tag{15.16}$$

式中 S——与结构形状、采用的有限元网格以及采用的土压力近似函数有关的矩阵。

有限元方程为

$$[K]\{u\} = \{f\} \tag{15.17}$$

将式(15.16)代入上式，并按位移种类分类，得

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^0 \\ u_2^* \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} a \tag{15.18}$$

式中 u_1^0——被约束点的位移向量；

u_2^*——实测点的位移向量；

u_3——未知位移点的位移向量。

式(15.18)可改写为

$$Ca = u_2^* \tag{15.19}$$

$$Da = 0 \tag{15.20}$$

式中

$$C = [K_{22} - K_{23}K_{33}^{-1}K_{32}]^{-1}[S_2 - K_{23}K_{33}^{-1}S_3] \tag{15.21}$$

$$D = K_{12}C + K_{13}K_{33}^{-1}[S_3 - K_{32}C] - S_1 \tag{15.22}$$

式(15.19)和式(15.20)是该反分析问题的基本方程。式(15.19)表示未知系数向量 a 与实测位移 u_2^* 的关系，式(15.20)则保证满足约束结点的条件。未知系数向量 a 确定后，代入式(15.14)即可得到土压力分布。

若实测量不但包括位移值，还包括一些点的土压力值(如利用压力盒测得)，则采用下述方法。实测土压力值用向量 q^* 表示。利用式(15.14)，向量 q^* 可表示成未知系数向量 a 的线性组合，

$$La = q^* \tag{15.23}$$

式中 L——对应于土压力实测点那部分 G 矩阵值。

结合式(15.19)、式(15.20)和式(15.23)可以得到一组线性方程组。若实测位移数和实测土压力数之和大于或等于未知系数，则线性方程组可根据最小二乘法求解。

$$\begin{bmatrix} C \\ L \\ D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ L \\ D \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} C \\ L \\ D \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_2^* \\ q^* \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15.24}$$

由上式可以利用实测位移及土压力求解出未知系数向量 a，然后可由式(15.14)求出土压力分布。

比较求解土压力分布的方程式(15.24)和求解材料参数的方程式(15.11)，不难发现，根据式(15.11)求解材料参数需要采用迭代法，而根据式(15.24)未知系数向量 a 可直接求出。两者相比，总的说来，根据某些实测值反分析土压力分布要比反分析材料参数节省计算时间。因此可以说，相对于材料参数的反分析，由实测位移及土压力反分析结构上的土压力分布是比较方便的。

15.3 直接分析法

反分析中的直接分析法是求解反分析问题的另一途径。它把数值分析方法和数学规划

法结合起来，通过不断修正上的未知参数，使得一些现场实测值与相应的数值分析的计算值的差异达到最小。直接分析法不象反分析中的逆分析法那样需要重新推导数值分析的方程。以有限元法为例，在采用反分析直接法时，不需要重新推导有限元方程，重新编制有限元计算程序，只是把正分析时应用的有限元计算程序当成一个子程序应用即可。反分析直接分析法具有较强的适应性，能处理各种类型的反分析问题，可以运用于非线性、弹塑性问题的分析。

通常，在直接分析法中，把一些实测值(例如位移、孔隙水压力、应力等)与相应的数值分析计算值两者差的平方和作为目标函数 J，即

$$J=\sum_{i=1}^{m}(S_i-S_i^*)^2\rightarrow\min. \tag{15.25}$$

式中 m——实测值总数；

S_i^*——第 i 点实测值，例如位移、孔隙水压力等；

S_i——相应的数值分析计算值。

上式中 S_i 是随着土的力学参数 $\{p\}_n$ 的不同值而变化的，n 为独立变化的需要通过反分析确定的参数总数。可以认为 S_i 是参数 $\{p\}_n$ 的函数，因此，目标函数 J 为参数 $\{P\}_n$ 的函数。这样反分析计算转换为求一目标函数的极小值问题。当目标函数 J 达到极小值时，其所对应的参数 $\{P\}_n$ 就是反分析所需要得到的结果。

在式(15-25)中，目标函数定义为实测值与相应计算值差的平方和。除这种形式外，目标函数也可以定义为其它形式。例如，定义为实测值与计算值两者差的绝对值之和，即

$$J=\sum_{i=1}^{m}|S_i-S_i^*|\rightarrow\min. \tag{15.26}$$

目标函数也可定义为实测值与计算值之比值与 1 两者差的平方和，可表示为

$$J=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{S_i^*}{S_i}-1\right)^2\rightarrow\min. \tag{15.27}$$

上式中，目标函数是无量纲的。如果实测量不但有位移，还包括孔隙水压力、应力等，采用式(15.27)的定义较好。

通常，上述目标函数是土的参数 $\{P\}_n$ 的复杂的非线性函数，式(15.25)、式(15.26)和式(15.27)一般无法采用解析法求解。上述方程可采用数学规划法求解。

求解上述方程有许多方法，如单纯形法，复形法，共轭梯度法，模式探索法等等。这些计算方法在一些有关优化的书里有详细的介绍，在此仅对常用的单纯形法和共轭梯度法作简要介绍：

1．共轭梯度法

以反分析土的弹性模量 E 和泊松比 ν 为例。在有限元计算中，结点位移 u 和单元应力 σ 的计算方程为

$$u=K^{-1}F \tag{15.28}$$

$$\sigma=DBu \tag{15.29}$$

式中 K——总劲度矩阵；

F——荷载向量；

D——弹性矩阵；

B——几何矩阵。

若实测值有位移和应力，则目标函数可定义为

$$J=\sum_{i=1}^{m_d}\left(\frac{u_i}{u_i^*}-1\right)^2+\sum_{j=1}^{m_s}\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_j^*}-1\right)^2\rightarrow\min. \tag{15.30}$$

约束条件：$E>0$

$0\leqslant\nu\leqslant0.5$

式中 m_d——实测位移数；

m_s——实测应力数；

u_{id}^*，σ_j^*——分别为实测的位移和应力值；

u_i，σ_j——分别为对应的位移和应力计算值。

共轭梯度法求解式15.30步骤如下：

(1) 取变量的初始值 $X_0=(E_0,\nu_0)$；

(2) 计算梯度：$g_n=(\partial J/\partial E,\ \partial J/\partial\nu)$，其中 n 表示迭代次数；

(3) $d_n=g_n+(g_n^Tg_n)/(g_{n-1}^Tg_{n-1})d_{n-1}$；

(4) $X_{n+1}=X_n+\lambda_nd_n$。

此时需采用一维优化方法确定 λ_n 值，使由 x_{n+1} 计算的目标函数值在局部最小。

(5) 重复(1)～(4)步，直到前后两次算出的X值充分接近，满足某一收敛准则为止。

目标函数 J 对 E 的梯度如下式所示：

$$\frac{\partial J}{\partial E}=2\sum_{i=1}^{m_d}\{(u_i-u_i^*)\{(\partial K^{-1}/\partial E)F\}_i\}+2\sum_{j=1}^{m_s}\{(\sigma_i-\sigma_i^*)[\{(\partial D/\partial E)Bu\}_i+DB\{(\partial K^{-1}/\partial E)F\}_i]\} \tag{15.31}$$

式中

$$\partial K^{-1}/\partial E=(-1)\{K^{-1}(\partial K/\partial E)K^{-1}\}^T \tag{15.32}$$

$\{\}_i$：表示第 i 个单元的向量。

由于总劲度矩阵 K 是由单元劲度矩阵 K^e 叠加而成，故式(15.32)中的 $\partial K/\partial E$ 也可由各单元的 $\partial K^e/\partial E$ 线性叠加而成。

类似，$\partial J/\partial\nu$ 也可用同样的方法计算。

由上面简要介绍可见，共轭梯度法需要计算目标函数的导数，这样的算法对有限元分析部分需要重新推导方程，重新编制程序。为了解决这问题，可以采用差分代替导数。如在步骤(2)中采用中心差分公式代替导数：

$$\frac{\partial J}{\partial x_i}=\frac{[J(x_1,\cdots,x_i+\Delta x,\cdots,x_n)-J(x_1,\cdots,x_i-\Delta x,\cdots,x_n)]}{2\Delta x} \tag{15.33}$$

式中 x_i——需要反分析确定的参数，如前面所述的 E、ν 等参数。

采用差分代替导数后，反分析中不需要改变有限元方程，而只需把有限元分析当成一个子程序，在求差分时调用即可。

2. 单纯形法

若需要由反分析确定的土参数数组 $\{x\}_n$ 为一个 n 维向量，则目标函数为数组 $\{x\}_n$ 的函数，$J=J(\{x\}_n)$。单纯形法是建立一个 n 维空间，在其中对 $n+1$ 个点(由它们构成一个初始单纯形)上的函数值进行比较，去掉其中目标函数值最大的点，代之以新的点，从而构成一个新的单纯形。这样，通过迭代逐步逼近目标函数的极小值所对应的点。

首先给出初始点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，单纯形边长 Q，反射系数 $\alpha>0$，收缩系数

$\beta(0<\beta<1)$，延伸系数 $\gamma>1$。然后，

(1) 形成初始单纯形：

除顶点 $X^{(0)}$ 以外，其余 n 个顶点为

$$x^{(1)}=(x_1^{(0)}+P,\ x_2^{(0)}+q,\ \cdots,\ x_n^{(0)}+q)$$
$$x^{(2)}=(x_1^{(0)}+q,\ x_2^{(0)}+P,\ \cdots,\ x_n^{(0)}+q)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{(n)}=(x_1^{(0)}+q,\ x_2^{(0)}+q,\ \cdots,\ x_n^{(0)}+P)$$

式中

$$P=\frac{\sqrt{n+1}+n-1}{\sqrt{2}\cdot n}a$$

$$q=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{2}n}a=P-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

(2) 计算各点的目标函数值，并找出其中目标函数的最大值和最小值，其对应点为 $x^{(h)}$ 和 $x^{(l)}$ 点。

$$J_i=J(x^{(i)})\qquad(i=0,1,2,\cdots,n)\tag{15.34}$$
$$J(x^{(h)})=\max\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}\tag{15.35}$$
$$J(x^{(l)})=\min\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}\tag{15.36}$$

(3) 求反射点

$$x^{(n+2)}=x^{(n+1)}+\alpha(x^{(n+1)}-x^{(h)})\tag{15.37}$$

式中 $x^{(n+1)}$ 是单纯形顶点中除目标函数为最大值的点 $x^{(h)}$ 以外其余点的中心点，即

$$x^{(n+1)}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n}x^{(i)}-x^{(h)}\right)\tag{15.38}$$

(4) 延伸

若 $J(x^{(n+2)})\leqslant J(x^{(l)})$，则计算延伸点 $x^{(n+3)}$，

$$x^{(n+3)}=x^{(n+1)}+\gamma(x^{(n+2)}-x^{(n+1)})\tag{15.39}$$

若 $J(x^{(n+3)})<J(x^{(l)})$ 则以 $x^{(n+3)}$ 代替点 $x^{(h)}$，否则以 $x^{(n+2)}$ 代替点 $x^{(h)}$。

(5) 收缩

若对满足 $i\neq h$ 的所有 i，都存在

$$J(x^{(h)})>J(x^{(n+2)})>J(x^{(i)})$$

或

$$J(x^{(n+2)})\geqslant J(x^{(h)})$$

则将向量 $x^{(h)}-x^{(n-1)}$ 收缩。若 $J(x^{(h)})>J(x^{(n+2)})$，先用 $x^{(n+2)}$ 代替 $x^{(h)}$，然后再收缩。所谓收缩，即令

$$x^{(n+4)}=x^{(n+1)}+\beta(x^{(h)}-x^{(n+1)})\tag{15.40}$$

当 $J(x^{(n+4)})<J(x^{(h)})$ 时，以 $x^{(n+4)}$ 代替 $x^{(h)}$。

(6) 缩小边长

若 $J(x^{(n+4)})\geqslant J(x^{(h)})$，则将所有向量 $x^{(i)}-x^{(l)}$ 缩小一半，即令

$$x^{(i)}=x^{(l)}+0.5(x^{(i)}-x^{(l)})\qquad(i=0,1,2,\cdots,n)\tag{15.41}$$

(7) 若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|J(x^{(i)})-J(x^{(n+2)})|\leqslant\varepsilon_{允许}$，则计算终止，否则转到步骤 (2)，直至满足要求为止。

单纯形法在计算中，只用到函数值，不需要计算目标函数的导数。比较简单，且稳定性

好。缺点是收敛可能比较慢。

15.4 概率统计法

概率统计法可以用来研究实测数据的测量误差对反分析得到的参数的影响，也可用来研究地基中土层分布的不确定性以及地基中土的力学性质在空间的变化情况。

在各种可采用的概率统计方法中，Bayes 方法优点最多。在分析中，它可以考虑专家的经验判断。这对土工问题尤其重要。另外，对与时间有关的问题，例如固结问题，采用Bayes法对前阶段土的未知参数的估计有助于对下一阶段土的参数的估计。

下面简要介绍采用 Bayes 法的情况，根据具有一定测量误差的实测值反分析材料参数。

考虑实测值向量 u^*，它是有误差的。误差向量 Δu 可认为是随机变量，其数学期望值可假定等于零，即

$$E|\Delta u| = 0 \tag{15.42}$$

而且假定与量测仪器精度有关的误差协方差矩阵可用下式表示：

$$c_u = E|\Delta u \Delta u^T| \tag{15.43}$$

如果所有的实测值是相互独立的，则 c_u 是对角矩阵。

未知参数向量 x 也被认为是随机变量，其数学期望值为基于经验的估值 x_0，其协方差矩阵为 c_x^0，记为

$$x_0 = E|x| \tag{15.44}$$

$$c_x^0 = E|[x - x_0][x - x_0]^T| \tag{15.45}$$

如果向量 x_0 各分量是相互独立的，c_x^0 也是对角矩阵。它的值与经验估值的可靠性有关。

为了对未知参数取得较好的估计，Bayes 反分析法需要结合经验判断。同其它的反分析方法一样，需要一个数值模型，例如有限单元法，根据一组初始的参数 x 计算与实测值 u^* 对应的计算值 u。

首先考虑一种简单的情况，u 与 x 成线性关系，即

$$u(x) = u' + L(x - x') \tag{15.46}$$

式中 L——常系数矩阵；

u'，x'——常向量。

使下述误差函数极小化可以得到参数向量 x 的最好估计 $\bar{x}$：

$$E_{rr} = [u^* - u(x)]^T[c_u]^{-1}[u^* - u(x)] + [x_0 - x]^T[c_x^0]^{-1}[x_0 - x] \tag{15.47}$$

上述误差函数包括两部分，第一部分代表实测值与计算值的差异，第二部分反映参数的差异。将式 (15.46) 代入式 (15.47)，并令误差函数对 x 的导数等于零，可以得到下述线性方程：

$$[L^T c_u^{-1} L + (c_x^0)^{-1}]x = L^T c_u^{-1}[u^* - u' + Lx'] + [c_x^0]^{-1}x_0 \tag{15.48}$$

解式(15.48)所得的 x 就是参数向量的最好估计向量 $\bar{x}$：

$$\bar{x} = [I - M_0 L]x_0 + M_0 u^* - M_0[u' - Lx'] \tag{15.49}$$

式中 I——单位矩阵；

$$M_0 = [L^T c_u^{-1} L + (c_x^0)^{-1}]^{-1} L^T c_u^{-1} \tag{15.50}$$

为了分析 $\bar{x}$ 向量的可靠度，下面求 $\bar{x}$ 向量的协方差矩阵 $c_{\bar{x}}$：

由概率统计知识可知，若一向量 a 与随机向量 b 线性相关，

$$a = Ab \tag{15.51}$$

式中 A——常数矩阵。

则两向量的协方差矩阵存在下述关系，

$$C_a = AC_bA^T \tag{15.52}$$

式15.49中，向量 $\bar{x}$，x_0 和 u^* 存在线性关系，而且 x_0 和 u^* 统计无关，与得到式15.52相类似，可得到 x 的协方差矩阵为

$$C_x = [I - M_0L]C_x^0[I - M_0L]^T + M_0C_uM_0^T \tag{15.53}$$

应该指出，对大多数岩土力学问题，u 与 x 是非线性关系，即式15.46并不成立，因此基于线性关系推出的式15.49和式15.53不能直接应用于求解非线性问题。对非线性问题，可采用迭代法求解。将 $u-x$ 关系在参数矢量 x' 的邻域上采用 Taylor 级数展开并取其线性项，可得类似于式15.46的方程：

$$u(x) \cong u(x') + L(x')\{x - x'\} \tag{15.54}$$

非线性问题的迭代法求解主要步骤如下：

(1) 取向量 x' 等于所估的初值 x_0；

(2) 用应力分析所采用的数值方法，例如有限单元法，求出位移 $u' = u(x')$；

(3) 采用有限差分法计算矩阵 $L(x')$。这意味着要解几次应力分析问题，n 为未知参数的个数。在每次计算中，计算所用参数除对第 i 个分量有一个小的增量 Δx_i 外，其余分量与 x' 的分量相同。由步骤(2)可得差分 Δu_i。矩阵 $L(x')$ 可表示为

$$L(x') = \left[\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}\middle|\frac{\Delta u_2}{\Delta x_2}\middle|\cdots\middle|\frac{\Delta u_n}{\Delta x_n}\right] \tag{15.55}$$

(4) 向量 L，u' 和 x' 已知，则可由式15.49求出向量 $\bar{x}$；

(5) 如 $\bar{x}$ 和 x' 的差异足够小，则迭代结束，否则令 $x' = \bar{x}$，重复回到步骤(2)。

(6) 若迭代收敛，求得 $\bar{x}$ 值后，最终值向量 $\bar{x}$ 为协方差矩阵，可由式15.53求得，从而得到 $\bar{x}$ 值的可靠度。

15.5 工程实例分析

下面通过一工程实例分析简要介绍采用反分析直接法确定地基固结过程中的力学参数的情况。

15.5.1 一个反分析法程序

前面已经谈到，直接分析法把数值分析方法和数学规划法结合起来，通过不断修正土的未知参数，使得一些现场实测值与相应的数值分析的计算值的差异达到最小。对地基固结问题，式15.27可改写为

$$J = \sum_{s=1}^{T_n}\left\{\sum_{i=1}^{I_{n1}}\left(\frac{u_i^t}{u_{i_0}^t} - 1\right)^2 + \sum_{j=1}^{I_{n2}}\left(\frac{w_j^t}{w_{j_0}^t} - 1\right)^2 + \sum_{k=1}^{I_{n3}}\left(\frac{p_{wk}^t}{p_{wk_0}^t} - 1\right)^2\right\} \to \min. \tag{15.56}$$

式中 J——目标函数；

T_n——时间分段数；

I_{n1}，I_{n2} 和 I_{n3}——分别为实测的水平位移，竖向位移和孔隙水压力值的测点数量；

u_i^t，$u_{i_0}^t$——分别为结点 i，时间 t 时计算水平位移值和实测水平位移值；

w_j^t, w_j^t。——分别为结点 j，时间 t 时计算竖向位移值和实测竖向位移值；

p_{wk}^t, p_{wk}^t。——分别为结点 k，时间 t 时计算孔隙水压力值和实测孔隙水压力值。

上述计算值由 Biot 固结理论有限单元法分析得到。Biot 固结理论有限单元法分析详见第六章。在有限元分析中，土的应力应变关系采用四参数非线性方程式。在下一节将对它作一简要介绍。

式 15.56 采用数学规划法中的模式探索法求解。模式探索法基本思路如下：

式 15.56 可表示成一般形式，

$$f = f(x) \to \min. \tag{15.57}$$

式中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$。

x 的初值为 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n^0)$，初始步长为 $\delta x = (\delta x_1^0, \delta x_2^0, \cdots, \delta x_i^0, \cdots, \delta x_n^0)$。

(1) 探索移动

依次沿坐标轴方向进行探索移动。例如，第 j 次沿 x_i 轴方向进行探索移动。

若 $$f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1} + \delta x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1}) < f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_m^{j-1})$$

则 $$f = f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1} + \delta x_i^{j-1} x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$$

而且 $$x_i^j = x_i^{j-1} + \delta x_i^{j-1}$$

$$\delta x_i^j = \delta x_i^{j-1}$$

否则

若 $$f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1} - \delta x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1}) < f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$$

则 $$f = f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1} - \delta x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$$

而且 $$x_i^j = x_i^{j-1} - \delta x_i^{j-1}$$

$$\delta x_i^j = -\delta x_i^{j-1}$$

否则 $$f = f(x_1^j, x_2^j, \cdots, x_{i-1}^j, x_i^{j-1}, x_{i+1}^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$$

而且 $$x_i^j = x_i^{j-1}$$

$$\delta x_i^j = \delta x_i^{j-1}$$

依次完成沿各坐标轴方向的探索移动后，再进行模式移动。

(2) 模式移动

若 $f(x^j + \delta x^j) < f(x^j)$

则 $f = f(x^j + \delta x^j)$，而且令 x^j 取 $x^j + \delta x^j$ 值，δx^j 值不变；

否则，

若 $f(x^j - \delta x^j) < f(x^j)$

则 $f = f(x^j - \delta x^j)$，而且令 x^j 取 $x^j - \delta x^j$ 值，δx^j 取 $-\delta x^j$ 值

否则 $f = f(x^j)$，而且 x^j 值不变，缩小步长，例如 δx^j 取 $0.5\delta x^j$。

完成模式移动后，再次进行探索移动。

通常，当探索步长小于某一数值，或某次探索前后函数值的差值小于某一数值，或超过某一探索次数则停止计算。对于如式 15.56 的目标函数，也可把函数值小于某一数值作为判断标准之一。模式探索法适用于求多元函数的极值，其优点为适用性强，缺点为有时收敛

较慢。

把 Biot 固结理论有限单元法程序作为一个子程序，应用模式探索法，可编制应用反分析直接法确定地基固结过程中力学参数的反分析程序。

15.5.2　一个四参数非线性方程

采用双曲线方程，配合用有效应力 p' 进行归一的正常固结粘土固结排水三轴压缩试验归一化应力应变曲线(图 15.1)：

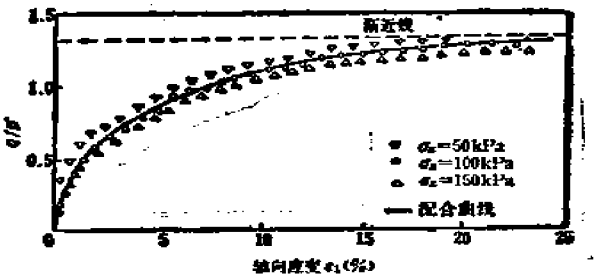


图 15.1　归一化应力应变曲线

$$\frac{q}{p'}=\frac{e_1}{\bar{a}+\bar{b}e_1} \tag{15.58}$$

式中　$q=\sigma_1-\sigma_3$，主应力差；

e_1——轴向应变；

$\bar{a}$ 和 $\bar{b}$——由试验确定的参数。[1]

参数 $\bar{a}$ 可表示为

$$\bar{a}=\frac{1}{\bar{E}_0} \tag{15.59}$$

式中 $\bar{E}_0$——归一化应力应变曲线的初始斜率。它是表示土的变形特性的重要指标。并称为正常固结粘土的初始模量数或归一化初始模量。参数 $\bar{b}$ 可表示为

$$\bar{b}=1/(q/p')_{ult} \tag{15.60}$$

式中　$(q/p')_{ult}$——归一化应力应变曲线的极限值。它表示正常固结粘土的强度特征。在 p'-q 平面上，正常固结粘土的极值线和破坏线如图 15.2 所示，破坏线斜率为 M，极值线斜率为 M_{ult}。M 值可用有效内摩擦角表示：

$$M=\frac{6\sin\varphi'}{3-\sin\varphi'} \tag{15.61}$$

破坏线的斜率与极值线的斜率之比定义为土体破坏比 R_f，即

$$R_f=\frac{M}{M_{ult}} \tag{15-62}$$

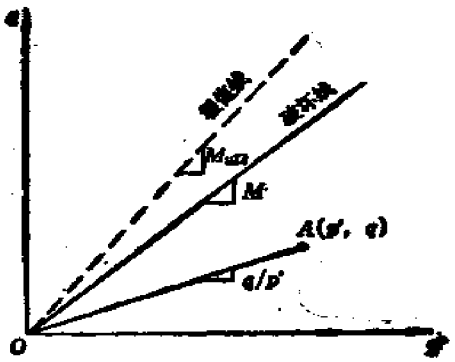


图 15.2　p'-q 应力平面

设荷载作用下地基中一点的应力状态为 (p', q)，如图 15.2 中 A 点所示。点 A 与原点的连线 OA 的斜率为 q/p'。OA 线的斜率与破坏线的斜率之比定义为该点在荷载作用下的强度发挥度，即

$$\tau_s=(q/p')/M \tag{15.63}$$

式(15.58)对轴向应变微分，结合式(15.59)，式(15.60)，式(15.62)和式(15.63)，可以得到一个切线模量方程(龚晓南，1984)，

$$E_t=\frac{3\bar{E}_0p'}{3-M\tau_s}(1-R_f\tau_s)^2 \tag{15.64}$$

上式表明，土的切线模量是土体在荷载作用下土体中的平均有效应力和该点土体强度发挥度的函数。

土体切线泊松比采用下述方程(龚晓南，1984)。

$$\nu_t=\nu_0+(\nu_f-\nu_0)\tau_s \tag{15.65}$$

式中　ν_0——初始切线泊松比，多数情况其值可取 0.15～0.35；

ν_f——破坏状态时土体切线泊松比，在有限元分析中可取 0.495。

15.5.3 工程实例分析

联邦德国 Radolfzell 附近的土堤建于 1977 年。堤基土层主要有二层，第一层为粉砂和粉土，约 3 米。第二层为约 60 米厚的软粘土。新坝建在老堤上，如图 15.3 所示。新堤填土分三次，每次填土高度及填土全过程如图 15.5(a) 所示，图中虚线表示计算荷载曲线。粉砂和粉土的刚度远比软粘土大，故地基第一层土应力应变关系可取为线弹性，第二层土应用上述四参数非线性方程。在反分析中，第一、二层土的泊松比分别取为 $\nu_{01}=0.15$ 和 $\nu_{02}=0.30$，破坏比为 0.86，参数 M 参照强度试验结果取 $M=1.20(\varphi'=30°)$。需要在反分析中确定的参数为第一层土的弹性模量和渗透系数，第二层土的归一化初始模量和渗透系数。参考实测资料，在有限元分析中，土层深度取为 34m，宽度取为 100m。有限元计算网格如图



图 15.3 土堤剖面

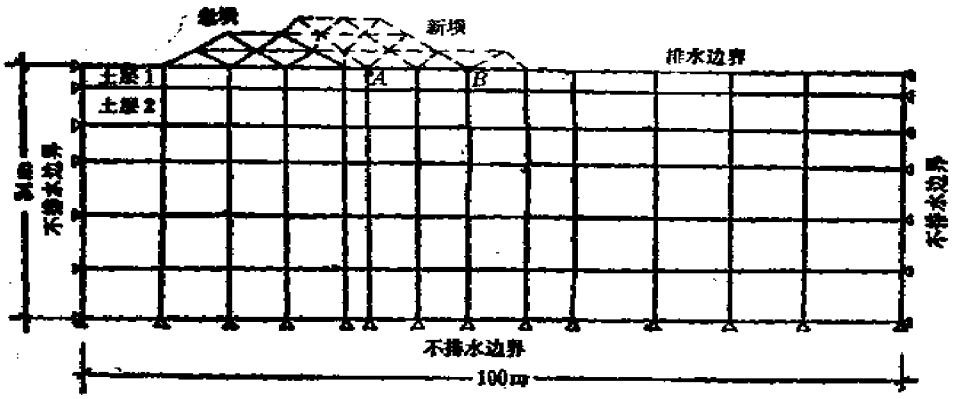


图 15.4 有限元计算网格

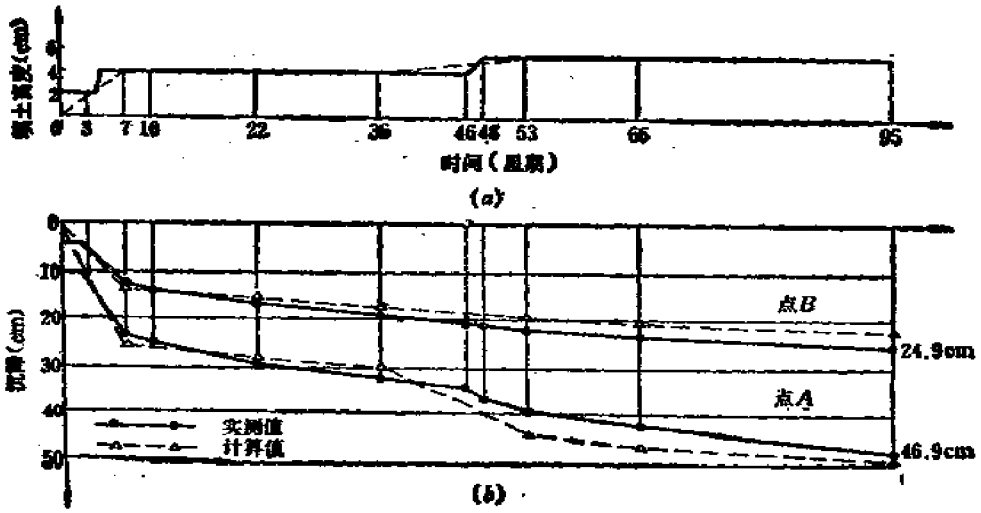


图 15.5 填土过程(a)与沉降曲线(b)

616052

15.4所示。反分析结果为第一层土层弹性模量 $E=3200\,\mathrm{kPa}$，第二层土的归一化初始模量 $\bar{E}_0=30.2$，第一、二层土的渗透系数分别为 $k_1=3.47\times10^{-7}\mathrm{cm/s}$，$k_2=1.01\times10^{-7}\mathrm{cm/s}$。第一层土试验测定的 E_s 值处于 1000～6700 kPa 之间，反分析结果与之相比，两者较为接近。其它无资料可以比较。图 15.5(*b*)表示 A 点和 B 点的沉降曲线。实线为实测沉降曲线，其实测值用于反分析。虚线为根据反分析得到的参数计算得到的沉降曲线。总的说来，计算沉降曲线与实测沉降曲线两者比较接近。文献 (Gong 和 Gudehus, 1988) 对两者作了较详细比较分析，这里不予赘述。

参 考 文 献

1. Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T., Simple optimization techniques for evaluating deformation moduli ffom field observations. Soil and Foundations, Vol. 23, No. 1, p.107—113, 1983.
2. Arai, K., Ohta, H., Kojima, K. and Wakasugi, M., Application of back-analysis to several test embankments on soft clay deposits. Soil and Foundations, Vol. 26, No. 2, p. 60—72, 1986.
3. Arai, K., Ohta, H. and Kojima, K., Estimation of nonlinear constitutive parameters based on monitored movement of subsoil under consolidation. Soil and Foundations, Vol. 27, No. 1, p. 35—49, 1987.
4. Asaoka, A., and Matsuo, M., Bayesian approach to inverse problem in consolidation and its application to settlement prediction. Proc. 3rd ICONMIG, Aachen, 1979.
5. Bjerrum,L., Some notes on Terzaghi's method of working, in From Theory to Practice in Soil Mechanics, Wiley, New York, 1960.
6. Bösinger, E., Leinenkugel, H. -J., and Gudehus, G., Schlussbericht-Zeitabhangige Setzung einer Dammschuttung auf weichem Untergrund, 1978
7. Cividini, A., Jurina, L. and Gioda, G., Some aspects of characterization problems in geomechanics. Int. ,J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Vol. 18, p. 487—503, 1981.
8. Cividini,A., Maier, G. and Nappi, A., Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes' approach.Int. J. Rock Mech. & Min. Sci., Vol. 20, p. 215—226, 1983.
9. Gioda, G, A numerical procedure for defining the values of soil parameters affecting consolidation. Proc. of 7th ECSMFE. London, Vol. 1, p. 169—172, 1979.
10. Gioda, G., Indirect identification of the average elastic characteristics of rock masses. Proc. Int. Conf. on Structural Foundations on Rock, Sydney, 1980.
11. Gioda, G., Some remarks on back analysis and characterization problem. Proc. of 5th ICONMIG, Nagoya, Vol. 1, p. 47—61, 1985.
12. Gioda, G. and Sakurai, S., Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics, Theme/feature paper, Int. J. for Numerical and analytical methods in geomechanics. Vol. 11, p. 555—583, 1987.
13. 龚晓南：油罐软粘土地基性状，浙江大学博士论文，1984。
14. Gong,X. N., A procedure of estimation of meterial parameters of soil under consolidation based on back analysis method. (to be published).
15. 龚晓南和 Gudehus, G.：反分析法确定固结过程中土的力学参数，浙江大学学报，1989，第 6 期。
16. Kavanagh, K. T., Clough, R. W., Finite element application in the characterization of elastic solids. Int. J. Solids Structures, Vol. 7, p. 11—23, 1971.
17. 粘精斌，反分析法确定土层的模型参数，浙江大学硕士论文，1988。
18. Zeng, G. X. and Gong, X. N., Geotechnical aspects of the soft clay ground under tanks. Proc. of the 11th ICSMFE, San Francisco, 1985.
19. Zeng, G. X., Gong, X. N., Nian, J. B. and Hu, Y. F., Back analysis for determining nonlinear mechanical parameters in soft clay excavation. Proc . of the 6th ICONMIG. Innsbruck, Austria, Vol. 3. p. 2069—2074, 1988.

0 0 0 0 0 0 0 0 4 5 3 9 9 0